

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ КЕРУВАННЯ ШВИДКІСТЮ У ПРИСТРОЇ З БАГАТОСТУПІНЧАСТИМ ЗУБЧАСТИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ І ЗАМКНУТИМИ ГІДРОСИСТЕМАМИ ЧЕРЕЗ ВОДИЛА

© Малащенко В. О., Стрілець О. Р., 2020

<https://doi.org/10.23939/istcipa2020.54.016>

Мета. Розроблення математичної моделі динамічних процесів у пристроях зміни швидкості за допомогою багатоступінчастих зубчастих диференціальних передач із замкнутими гідросистемами на прикладі конкретної конструкції. **Методика.** Розглянуто пристрій із багатоступінчастим диференціалом, в якому зубчасте колесо – епіцикл першого ступеня з’єднано із сонячним зубчастим колесом другої ступені, зубчасте колесо – епіцикл другого ступеня з’єднано з сонячним зубчастим колесом третього ступеня, і так далі залежно від кількості ступенів, а керують швидкістю за допомогою водил кожного ступеня за допомогою встановлених на них замкнутих гідросистем. На основі рівняння Лагранжа II роду складено та розв’язано рівняння динаміки таких пристроїв залежно від умов їх роботи. **Результати.** Отримана математична динамічна модель руху зубчастого диференціала з можливістю керування рухом водил замкнутими гідросистемами з метою забезпечення необхідного закону зміни навантаження на веденій ланці – епіциклі, а результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу з гідросистемним керуванням. **Наукова новизна.** Вперше побудовано динамічну модель пристрою зміни швидкості у механічних приводах машин з багатоступінчастим зубчастим диференціалом, що дає змогу визначати швидкість ланки керування і вибирати необхідну замкнуту гідросистему для керування швидкістю руху веденої ним ланки. **Практична значущість.** Отримані результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу з гідросистемним керуванням через водила, коли обертальний момент опору змінюється періодично протягом тривалого часу; або величина ударного обертального моменту опору після різкого збільшення залишається незмінним протягом тривалого часу; або величина ударного обертального моменту опору після різкого збільшення зберігається протягом малого часу; або виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження.

Ключові слова: динаміка, пристрій для керування змінами швидкості, багатоступінчастий зубчастий диференціал, замкнута гідросистема, сонячне зубчасте колесо, епіцикл, водило, сателіт.

Вступ. Технологічні процеси машин у різних галузях промисловості, наприклад, у машинобудуванні, гірництві, енергетиці, цивільному, промисловому і дорожньому будівництві, сільському господарстві залежать від швидкості їх виконавчих механізмів. Для керування змінами швидкості у сучасній техніці використовують пристрої у вигляді ступінчастих і безступінчастих коробок швидкостей, які мають прості та складні зубчасті передачі або ланцюгові, пасові та фрикційні варіатори. Основними недоліками існуючого ступінчастого керування швидкістю є складність конструкції пристроїв, велика матеріаломісткість, виникнення значних динамічних навантажень під час переходів з однієї швидкості на іншу, а традиційного безступінчастого – інтенсивне спрацювання деталей внаслідок використання фрикційних зв’язків стрічкових, колодкових або дискових гальм та блокувальних фрикційних муфт. Це істотно впливає на зменшення довговічності і надійності деталей приводів і машин загалом. Тому актуальною науково-технічною задачею є розроблення нових пристроїв для керування процесом зміни швидкості з застосуванням зубчастих диференціалів з замкнутими гідросистемами як перспективнішим при усуненні недоліків існуючих пристроїв,

про що частково сказано в [1], обґрунтовано кінематичні [2] і енергетичні [3] можливості. Проектування, виготовлення та експлуатація таких пристроїв вимагають знань про силові процеси, які виникають у них. Дослідження силових динамічних процесів у пристроях зміни швидкості із зубчастими диференціалами, де керування швидкістю здійснюється за допомогою замкнутої гідросистеми через водила, є актуальною задачею.

Аналіз літературних джерел за темою статті. Розглянуто роботи, у яких досліджено пристрої зі зубчастими диференціальними передачами [4–21].

У [4] проаналізовано вплив зміни форми профілю зуба планетарної передачі на динаміку без врахування енергозатрат.

У [5] запропоновано і досліджено нелінійну динамічну модель двоступінчастого планетарного механізму на підставі аналітичного розв'язку динамічних рівнянь у програмі MATLAB, але при цьому не враховані втрати, які виражаються ККД.

У [6] проведено спільний аналіз діапазонів ефективності та коефіцієнта передачі планетарних передач, якого можна досягти усіма можливими конструктивними рішеннями.

У [7] наведено результати перевірки динамічної моделі приводу з редуктором, які проводилися на реальному об'єкті в різних умовах експлуатації і стимуляційні дослідження, щоб визначити придатність моделі, але без врахування енергетичної ефективності.

У [8] запропоновано новий метод розрахунку кінематичних і силових параметрів на основі гіперграфу і матричної операції. Розраховують ККД за потоком потужності, а рівняння втрат потужності на кожному вузлі виводяться через підхід, оснований на відносній силі само обертання.

У [9] отримано формули теоретичної ефективності для двоступінчастої диференціальної передачі та перевірено експериментальними дослідженнями.

У [10] досліджено ККД складних зубчастих передач на основі графічних та гвинтових теорій, що дають змогу отримувати наближені значення.

У [11] обґрунтовано зменшення вартості конструкції багатошвидкісних планетарних передач на основі системного синтезу з врахуванням таких вимог, як ступінь співвідношення, ефективність, планарність механізму та один перехідний зсув, для важких вантажних транспортних засобів.

У [12] наведено конструкцію двопланетарного редуктора з розрахунком кінематики, статичної та ефективності зачеплення зубчастих коліс. Розрахунки геометрії та міцності зубчастих коліс, валів і підшипників кочення опускаються, оскільки їх визнано типовими розрахунками конструкції.

У [13] на основі обертального моменту рівнянь силового балансу і силового аналізу основних елементів проаналізовано розподіл потужностей багатоступінчастого мікропланетарного редуктора 2К-Н.

У [14] автори пропонують алгоритм для вирішення завдання з виявлення виродженої планетарної зубчастої передачі, автоматизований за допомогою інтерактивної комп'ютерної програми. Алгоритм застосовують для передач з будь-якою кількістю ступенів свободи.

У [15] звернено увагу на повне розуміння базової механіки планетарних передач та оцінки їх механічної ефективності та робиться висновок, що для тих самих вхідних та вихідних ланок втрата потужності має для кожної дійсної послідовності кутових швидкостей своєрідне математичне вираження.

У [16] наведено причини, які стримують застосування плавно регульованої планетарної передачі, через конструктивну складність механізму регулювання передаточного відношення та описані варіанти його спрощення.

У [17] зауважено, що планетарні передачі використовують в промисловості через багато переваг, мають підвищену ефективність і дуже компактний привод, складений з зубчастих коліс, і вихід з ладу однієї ланки впливає на всю передачу, тому необхідно знати причини цього.

У [18] запропоновано динамічну модель керування швидкістю через епіцикл привода із зубчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою, отримано систему диференціальних рівнянь.

У [19] запропоновано динамічну модель керування швидкістю через сонячне зубчасте колесо привода із зубчастою одноступінчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою, отримано і розв'язано систему диференціальних рівнянь.

У [20] запропоновано динамічну модель керування швидкістю через водило привода із зубчастою одноступінчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою – отримано і розв'язано систему диференціальних рівнянь.

У [21] наведено визначення зведених обертальних моментів до ведучої ланки пристрою зміни швидкості через зубчастий диференціал, якою може бути епіцикл, або водило, або сонячне зубчасте колесо.

Із аналізу останніх публікацій видно, що питанням динаміки нових пристроїв керування змінами швидкості з зубчастими диференціалами за допомогою замкнутих гідросистем приділено мало уваги. Ці питання динаміки таких пристроїв чекають свого розв'язання. Вивчення динаміки таких пристроїв дасть змогу розробити методи зменшення впливу динамічних навантажень на їх ланки.

Мета. Метою роботи є розроблення математичної моделі динамічних процесів у пристроях зміни швидкості за допомогою багатоступінчастих зубчастих диференціальних передач із замкнутими гідросистемами у випадку, коли ланками керування є водила, а ведучим валом є сонячне зубчасте колесо першого ступеня, а веденим валом є епіцикл останньої ступені.

Методика проведення досліджень. На рис. 1 показано багатоступінчастий зубчастий диференціал із замкнутими гідросистемами і керуванням швидкістю через водила.

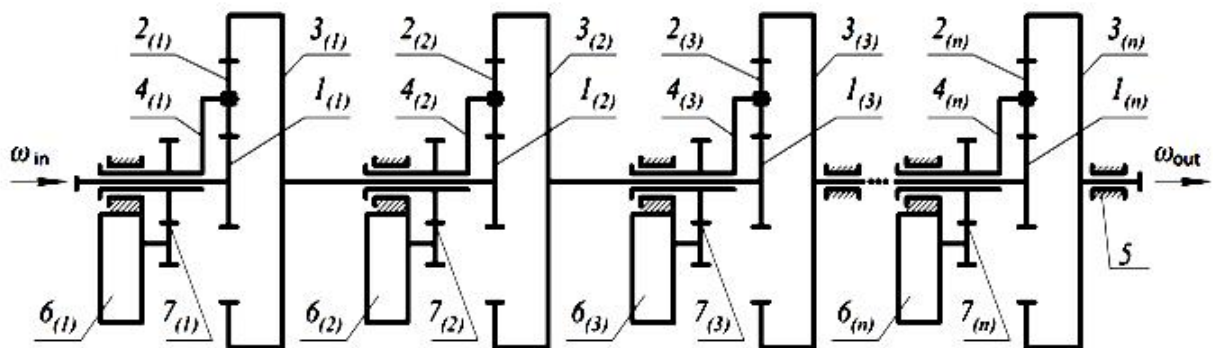


Рис. 1. Схема багатоступінчастого диференціала зі замкнутими гідросистемами та з керуванням швидкістю через водила

Fig. 1. Scheme of multistage gear differential with closed-loop hydraulic systems with speed control through carriers

Розглядається пристрій з багатоступінчастим диференціалом, в якому зубчасте колесо – епіцикл $3_{(1)}$ першого ступеня з'єднано з сонячним зубчастим колесом $1_{(2)}$ другого ступеня, зубчасте колесо – епіцикл $3_{(2)}$ другого ступеня з'єднано з сонячним зубчастим колесом $1_{(3)}$ третього ступеня, ..., зубчасте колесо – епіцикл $3_{(n-1)}$ $(n-1)$ ступені з'єднано з сонячним зубчастим колесом $1_{(n)}$ n -го ступеня, а керування швидкістю виконується за рахунок водил першої $4_{(1)}$, другої $4_{(2)}$, третьої $4_{(3)}$, ..., n -ної $4_{(n)}$ ступенів за допомогою встановлених на них замкнутих гідросистем $6_{(1)}$, $6_{(2)}$, $6_{(3)}$, ..., $6_{(n)}$. Замкнуті гідросистеми $6_{(1)}$, $6_{(2)}$, $6_{(3)}$, ..., $6_{(n)}$ однакові за будовою, розміщені на корпусі 5 і з'єднані з водилами $4_{(1)}$, $4_{(2)}$, $4_{(3)}$, ..., $4_{(n)}$ через зубчасті передачі $7_{(1)}$, $7_{(2)}$, $7_{(3)}$, ..., $7_{(n)}$.

Ведучою ланкою такої багатоступінчастої зубчастої диференціальної передачі є сонячне зубчасте колесо $1_{(1)}$ першого ступеня, а веденою ланкою – епіцикл $3_{(n)}$ n -го ступеня.

Будову і роботу замкнутої гідросистеми описано в [22]. Цей принцип роботи замкнутої гідросистеми використано для керування кутовою швидкістю веденої ланки – епіцикла, багатоступінчастого зубчастого диференціала.

Результати досліджень та їх обговорення. Динамічну модель руху багатоступінчастого зубчастого диференціала з керуванням швидкістю через водила у формалізованому виді запишемо, застосувавши рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = M_{3(n)}. \quad (1)$$

У вираз для кінетичної енергії системи T входять кінетичні енергії таких ланок: $T_{1(1)}, T_{1(2)}, T_{1(3)}, \dots, T_{1(n)}$ – сонячних коліс із валами; $T_{2(1)}, T_{2(2)}, T_{2(3)}, \dots, T_{2(n)}$ – блоків сателітів; $T_{3(1)}, T_{3(2)}, T_{3(3)}, \dots, T_{3(n)}$ – епіциклів; $T_{4(1)}, T_{4(2)}, T_{4(3)}, \dots, T_{4(n)}$ – водил зі спареними зубчастими колесами передач 7, відповідно $7_{(1)}, 7_{(2)}, 7_{(3)}, \dots, 7_{(n)}$; $6_{(1)}, 6_{(2)}, 6_{(3)}, \dots, 6_{(n)}$ – замкнутих гідросистем з приводними зубчастими колесами передач $7'$, відповідно $7'_{(1)}, 7'_{(2)}, 7'_{(3)}, \dots, 7'_{(n)}$.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \{ [J_{1(1)} \omega_{1(1)}^2 + k_{c(1)} J_{2(1)} \omega_{2(1)}^2 + k_{c(1)} m_{2(1)} v_{o2(1)}^2 + J_{3(1)} \omega_{3(1)}^2 + (J_{4(1)} + J_{7(1)}) \omega_{4(1)}^2 + (J'_{7(1)} + J_{6(1)}) \omega_{6(1)}^2] + \\ & + [J_{1(2)} \omega_{1(2)}^2 + k_{c(2)} J_{2(2)} \omega_{2(2)}^2 + k_{c(2)} m_{2(2)} v_{o2(2)}^2 + J_{3(2)} \omega_{3(2)}^2 + (J_{4(2)} + J_{7(2)}) \omega_{4(2)}^2 + (J'_{7(2)} + J_{6(2)}) \omega_{6(2)}^2] + \\ & + [J_{1(3)} \omega_{1(3)}^2 + k_{c(3)} J_{2(3)} \omega_{2(3)}^2 + k_{c(3)} m_{2(3)} v_{o2(3)}^2 + J_{3(3)} \omega_{3(3)}^2 + (J_{4(3)} + J_{7(3)}) \omega_{4(3)}^2 + (J'_{7(3)} + J_{6(3)}) \omega_{6(3)}^2] + \dots + \\ & + [J_{1(n)} \omega_{1(n)}^2 + k_{c(n)} J_{2(n)} \omega_{2(n)}^2 + k_{c(n)} m_{2(n)} v_{o2(n)}^2 + J_{3(n)} \omega_{3(n)}^2 + (J_{4(n)} + J_{7(n)}) \omega_{4(n)}^2 + (J'_{7(n)} + J_{6(n)}) \omega_{6(n)}^2] \}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\omega_{1(i)}, \omega_{2(i)}, \omega_{3(i)}, \omega_{4(i)}, \omega_{6(i)}$ – відповідно кутові швидкості ланок системи; $J_{1(i)}, J_{2(i)}, J_{3(i)}, J_{4(i)}, J_{6(i)}$ – відповідно динамічні моменти інерції ланок відносно центрів мас; $m_{2(i)}$ – маса блока сателітів; $k_{c(i)}$ – кількість сателітів; $v_{o2(i)} = \omega_{4(i)} r_{4(i)}$ – колова швидкість осі обертання сателітів; $r_{4(i)}$ – радіус обертання водила. Цей радіус дорівнює сумі початкових радіусів сонячного зубчастого колеса і сателіта $r_{4(i)} = 0,5(d_{w1(i)} + d_{w2(i)}), i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Кутові швидкості виразимо через кутові швидкості ведучих і ведених ланок [2] для всіх ступенів:

$\omega_{1(1)}$; – ведуча ланка (сонячне колесо) $\omega_{1(2)}; \omega_{1(3)}; \dots, \omega_{1(n)}$;

$$\omega_{2(1)} = \frac{\omega_{1(1)} (u_{21(1)}^{(4)} - u_{31(1)}^{(4)}) + \omega_{3(1)}}{u_{34(1)}^{(1)}}; \omega_{2(2)}; \omega_{2(3)}; \dots, \omega_{2(n)};$$

$\omega_{3(1)}; \omega_{3(2)}; \omega_{3(3)}; \dots, \omega_{3(n)}$ – ведена ланка (епіцикл); $\omega_{3(1)} = \omega_{1(1)} u_{31(1)}^{(4)} + \omega_{4(1)} u_{34(1)}^{(1)}$,

$$\omega_{4(1)} = \frac{\omega_{3(1)} - \omega_{1(1)} u_{31(1)}^{(4)}}{u_{34(1)}^{(1)}}; \omega_{4(2)}; \omega_{4(3)}; \dots, \omega_{4(n)}$$

$$\omega_{6(1)} = \frac{\omega_{4(1)}}{u_{7'7(1)}}; \omega_{6(2)}; \omega_{6(3)}; \dots, \omega_{6(n)}.$$

де передаточні відношення ступенів:

$$u_{21(1)}^{(4)} = -\frac{z_{1(1)}}{z_{2(1)}}; u_{21(2)}^{(4)} = -\frac{z_{1(2)}}{z_{2(2)}}; u_{21(3)}^{(4)} = -\frac{z_{1(3)}}{z_{2(3)}}; \dots, u_{21(n)}^{(4)} = -\frac{z_{1(n)}}{z_{2(n)}};$$

$$\begin{aligned}
u_{31(1)}^{(4)} &= -\frac{z_{1(1)}}{z_{3(1)}}; u_{31(2)}^{(4)} = -\frac{z_{1(2)}}{z_{3(2)}}; u_{31(3)}^{(4)} = -\frac{z_{1(3)}}{z_{3(3)}}; \dots, u_{31(n)}^{(4)} = -\frac{z_{1(n)}}{z_{3(n)}}; \\
u_{24(1)}^{(1)} &= 1 - u_{21(1)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(1)}}{z_{2(1)}}; u_{24(2)}^{(1)} = 1 - u_{21(2)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(2)}}{z_{2(2)}}; \\
u_{24(3)}^{(1)} &= 1 - u_{21(3)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(3)}}{z_{2(3)}}; \dots, u_{24(n)}^{(1)} = 1 - u_{21(n)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(n)}}{z_{2(n)}}; \\
u_{34(1)}^{(1)} &= 1 - u_{31(1)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(1)}}{z_{3(1)}}; u_{34(2)}^{(1)} = 1 - u_{31(2)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(2)}}{z_{3(2)}}; \\
u_{34(3)}^{(1)} &= 1 - u_{31(3)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(3)}}{z_{3(3)}}; \dots, u_{34(n)}^{(1)} = 1 - u_{31(n)}^{(4)} = 1 + \frac{z_{1(n)}}{z_{3(n)}}; \\
u_{7'7(1)}^{(4)} &= -\frac{z_{7'(1)}}{z_{7(1)}}; u_{7'7(2)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(2)}}{z_{7(2)}}; u_{7'7(3)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(3)}}{z_{7(3)}}; \dots, u_{7'7(n)}^{(4)} = -\frac{z_{7'(n)}}{z_{7(n)}}.
\end{aligned}$$

Підставимо значення швидкостей до виразу (2), спростимо і запишемо у вигляді:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (J_{11(n)} \omega_{1(n)}^2 + 2J_{13(n)} \omega_{1(n)} \omega_{3(n)} + J_{33(n)} \omega_{3(n)}^2), \quad (3)$$

де прийнято такі позначення:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= J_{1(1)} + \frac{k_{c(1)} J_{2(1)}}{u_{34(1)}^{(1)}} (u_{21(1)}^{(4)} - u_{31(1)}^{(4)})^2 + \frac{(k_{c(1)} m_{2(1)} r_{4(1)}^2 + J_{4(1)} + J_{7(1)} + J_{7'(1)} + J_{6(1)})}{u_{34(1)}^{(1)}} (u_{31(1)}^{(4)})^2]; \\
J_{13} &= \frac{k_{c(1)} J_{2(1)}}{u_{34(1)}^{(1)}} (u_{21(1)}^{(4)} - u_{31(1)}^{(4)}) - \frac{(k_{c(1)} m_{2(1)} r_{4(1)}^2 + J_{4(1)} + J_{7(1)} + J_{7'(1)} + J_{6(1)})}{u_{34(1)}^{(1)}} u_{31(1)}^{(4)}; \\
J_{33} &= \frac{k_{c(1)} J_{2(1)} + k_{c(1)} m_{2(1)} r_{4(1)}^2 + J_{4(1)} + J_{7(1)} + J_{7'(1)} + J_{6(1)}}{u_{34(1)}^{(1)}} + J_{3(1)}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи вираз для кінетичної енергії (3) до рівняння Лагранжа II роду (1) і беручи часткові похідні за кутовими швидкостями ω_1 і ω_3 , отримаємо систему двох диференціальних рівнянь для кожного ступеня

$$\begin{cases} J_{11(n)} \dot{\omega}_{1(n)} + J_{13(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{361(n)}; \\ J_{13(n)} \dot{\omega}_{1(n)} + J_{33(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{363(n)}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} J_{11(n)} \dot{\omega}_{1(n)} + J_{13(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{361(n)}; \\ J_{13(n)} \dot{\omega}_{1(n)} + J_{33(n)} \dot{\omega}_{3(n)} = M_{363(n)}, \end{cases} \quad (6)$$

де $M_{361(n)} = M_{1(n)} + M_{7(n)} u_{71(n)}^{(4)}$, $M_{363(n)} = -M_{3(n)} + M_{3(n)} u_{74(n)}^{(1)}$.

Зведений момент M_{361} визначаємо за рівністю потужностей моментів сил при нерухомому водилі, а момент M_{363} – при нерухомому сонячному колесі.

Оскільки момент $M_{1(1)} = M_{1(1)}(\omega_1)$ є функцією від кутової швидкості сонячного колеса, момент зміни навантаження на валу епіцикла $M_{363(n)} = M_{3(n)}(t)$ залежить від часу, а $M_{7(n)} = M_{7(n)}(Q_{pid})$ залежить від витрат рідини гідросистеми для цього ступеня, то у загальному випадку отримана система рівнянь (5) і (6) є нелінійною.

Розглянемо приклад, коли пристрій керування швидкістю буде із двоступінчастим зубчастим диференціалом і замкнутими гідросистемами (рис. 2).

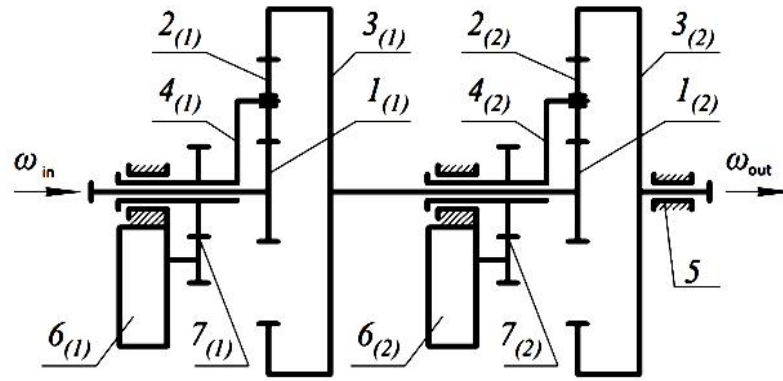


Рис. 2. Схема пристрою з двоступінчастим зубчастим диференціалом із замкнутими гідросистемами зі зміною швидкості через водила

Fig. 2. Scheme of twostage gear differential with closed-loop hydraulic systems with speed control through carriers

Використовуючи (5) і (6), маємо диференціальні рівняння динаміки відповідно для першого і другого ступенів

$$J_{11(1)}\dot{\omega}_{1(1)} + J_{13(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = M_{\text{зв}1(1)}; \quad (7)$$

$$J_{13(1)}\dot{\omega}_{1(1)} + J_{33(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = M_{\text{зв}3(1)}, \quad (8)$$

$$J_{11(2)}\dot{\omega}_{1(2)} + J_{13(2)}\dot{\omega}_{2(2)} = M_{\text{зв}1(2)}; \quad (9)$$

$$J_{13(2)}\dot{\omega}_{1(2)} + J_{33(2)}\dot{\omega}_{4(2)} = M_{\text{зв}3(2)}. \quad (10)$$

Розв'язання системи рівнянь окремо для кожного ступеня таке. Приведемо рівняння (7) і (8) до вигляду

$$a_{1(1)}\dot{\omega}_{1(1)} + b_{1(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{1(1)}; \quad (11)$$

$$a_{2(1)}\dot{\omega}_{1(1)} + b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{2(1)}, \quad (12)$$

де для $n = 1$: $a_{1(1)} = J_{11(1)}$; $a_{2(1)} = b_{1(1)} = J_{13(1)}$; $b_{2(1)} = J_{33(1)}$; $c_{1(n)} = M_{\text{зв}1(1)}$; $c_{2(1)} = M_{\text{зв}3(1)}$.

Розв'яжемо систему рівнянь (10) і (11) для першого ступеня так. Перемножимо рівняння (11) на a_2 / a_1 , отримаємо

$$a_{2(1)}\dot{\omega}_{1(1)} + \frac{b_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}. \quad (13)$$

Віднімемо від рівняння (11) рівняння (13), отримаємо

$$b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} - \frac{b_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}\dot{\omega}_{3(1)} = c_{2(1)} - \frac{c_{1(1)}a_{2(1)}}{a_{1(1)}}. \quad (14)$$

У виразі (14) зведемо подібні і визначимо $\dot{\omega}_{3(1)}$

$$\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{2(1)}a_{1(1)} - c_{1(1)}a_{2(1)}}{b_{2(1)}a_{1(1)} - b_{1(1)}a_{2(1)}}. \quad (15)$$

Подібно визначимо $\dot{\omega}_{1(1)}$. Для цього перемножимо рівняння (11) на b_2 / b_1 .

$$\frac{a_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}\dot{\omega}_{1(1)} + b_{2(1)}\dot{\omega}_{3(1)} = \frac{c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}. \quad (16)$$

Потім від рівняння (16) віднімемо рівняння (12), отримаємо

$$a_{2(1)}\dot{\omega}_{1(1)} - \frac{a_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}\dot{\omega}_{1(1)} = c_{2(1)} - \frac{c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}}. \quad (17)$$

Затим зведемо подібні і визначимо $\dot{\omega}_{1(1)}$.

$$\dot{\omega}_{1(1)} = \frac{c_{2(1)}b_{1(1)} - c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}a_{2(1)} - b_{2(1)}a_{1(1)}}. \quad (18)$$

Тоді для першого ступеня маємо

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{1(1)} &= \frac{d\omega_{1(1)}}{dt} = \frac{c_{2(1)}b_{1(1)} - c_{1(1)}b_{2(1)}}{b_{1(1)}a_{2(1)} - b_{2(1)}a_{1(1)}}; \\ \dot{\omega}_{3(1)} &= \frac{d\omega_{3(1)}}{dt} = \frac{c_{2(1)}a_{1(1)} - c_{1(1)}a_{2(1)}}{b_{2(1)}a_{1(1)} - b_{1(1)}a_{2(1)}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подібно визначимо похідні швидкостей другого ступеня. За аналогією маємо для $n = 2$: $a_{1(2)} = J_{11(2)}$; $a_{2(2)} = b_{1(2)} = J_{13(2)}$; $b_{2(2)} = J_{33(2)}$; $c_{1(2)} = M_{3\phi 1(2)}$; $c_{2(2)} = M_{3\phi 3(2)}$, а

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{1(2)} &= \frac{d\omega_{1(2)}}{dt} = \frac{c_{2(2)}b_{1(2)} - c_{1(2)}b_{2(2)}}{b_{1(2)}a_{2(2)} - b_{2(2)}a_{1(2)}}; \\ \dot{\omega}_{3(2)} &= \frac{d\omega_{3(2)}}{dt} = \frac{c_{2(2)}a_{1(2)} - c_{1(2)}a_{2(2)}}{b_{2(2)}a_{1(2)} - b_{1(2)}a_{2(2)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отже, наведено математичну динамічну модель руху зубчастого диференціала з можливістю керування рухом водил замкнутими гідросистемами з метою забезпечення необхідного закону зміни навантаження на веденій ланці – епіциклі, а результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу із гідросистемним керуванням.

Висновки. 1. Побудована динамічна модель пристрою зміни швидкості у механічних приводах машин з багатоступінчастим зубчастим диференціалом, що дозволяє визначати швидкість ланки керування і проводити вибір необхідної замкнутої гідросистеми для керування швидкістю руху веденої його ланки.

2. Отримані результати можуть бути підґрунтям для проведення кількісного аналізу силових залежностей механічного приводу з гідросистемним керуванням через водила, коли обертальний момент опору змінюється періодично протягом тривалого часу; або величина ударного обертального моменту опору після різкого збільшення залишається незмінною протягом тривалого часу; або величина ударного обертального моменту опору після різкого збільшення зберігається на протязі малого часу; або виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження.

1. Malashchenko V. Fundamentals of Creation of New Devices for Speed Change Management / V. Malashchenko, O. Strilets, V. Strilets // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. Lviv : NULP, 2015. Vol. 1. No. 2. P. 11–20.

2. Вавилов А. В. трансмиссий дорожных машин для повышения их конкурентоспособности и обеспечения импортозамещения / А. В. Вавилов, В. А. Малащенко, О. Р. Стрилец, В. Н. Стрелец // Научно-технический журнал “Автомобильные дороги и мосты”. Минск: БелдорНИИ, 2016. № 2(18). С. 102–108.

3. Malashchenko V. Investigation of the energy effectiveness of multistage differential gears when the speed is changed by the carrier / V. Malashchenko, O. Strilets, V. Strilets, S. Klysz // *Diagnostyka*. Warchava, 2019. Vol. 20. No. 6. P. 57–64.
4. Bahk, C.-J Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics / C.-J. Bahk, R. G. Parker // *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 2013. No. 70. P. 298–319
5. Qilin H. Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System / Qilin Huang, Yong Wang, Zhipu Huo, Yudong Xie // *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2013. 12 p. doi: 10.1155/2013/149046.
6. Salgado, D. R. Analysis of the transmission ratio and efficiency ranges of the four-, five-, and six-link planetary gear trains / D. R. Salgado, J. M. Castillo // *Mechanism and Machine Theory*, 2013. Vol. 73. 218–243, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.11.001
7. Peruń G. Verification Of Gear Dynamic Model In Different Operating Conditions / G. Peruń // *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*, 2014. 84. P. 99–104.
8. Fuchun Y. Power flow and efficiency analysis of multi-flow planetary gear trains / Y. Fuchun, F. Jianxiong, Zh. Hongcai // *Mechanism and Machine Theory*, 2015. Vol. 92. pp. 86–99. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.05.003
9. Pawar P. V. Design of two stage planetary gear train for high reduction ratio / P. V. Pawar, P. R. Kulkarni // *International Journal of Research in Engineering and Technology*, 2015 – ESAT Publishing House, Bangalore, India, – Vol. 4, Iss. 6. pp. 150–157. doi: 10.15623/ijret.2015.0406025
10. Chao C. Efficiency analysis of two degrees of freedom epicyclic gear transmission and experimental / C. Chao, C. Jiabin // *Mechanism and Machine Theory*, 2015. Vol. 87. pp. 115–130. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.017
11. Tianli X. Synthesis of seven-speed planetary gear trains for heavy-duty commercial vehicle / X. Tianli, H. Jibin, P. Zengxiong, L. Chunwang // *Mechanism and Machine Theory*, 2014. Vol. 90. pp. 230–239, doi: 10.1016/j.mechmachtheory. 2014.12.012.
12. Drewniak J. Design for the bi-planetary gear train / J. Drewniak, P. Garlicka, P. Kolber // *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*. 2016. 91. pp. 5–17. doi: 10.20858/sjsutst.2016.91.1
13. Li J. Power Analysis and Efficiency Calculation of Multistage Micro-planetary Transmission / J. Li, Q. Hu, C. Zong, T. Zhu // *Energy Procedia*, 2017. 141. pp. 654–659. doi: 10.1016/j.egypro.2017.11.088
14. Wenjian Y. Automatic detection of degenerate planetary gear trains with different degree of freedoms / Y. Wenjian, D. Huafeng // *Applied Mathematical Modelling*, 2018. 64. pp. 320–332. doi: 10.1016/j.apm.2018.07.038
15. Esmail E. L. Power losses in two-degrees-of-freedom planetary gear trains: A critical analysis of Radzimovsky's formulas / E. L. Esmail, E. Pennestrì, A. Hussein Juber // *Mechanism and Machine Theory*, 2018. Vol. 128. pp. 191–204, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015
16. Dankov A. M. Planetary Continuously Adjustable Gear Train With Force Closure Of Planet Gear And Central Gear: From Idea To Design / A. M. Dankov // *Science & Technique*, 2018. 17(3). 228–237. doi: 10.21122/2227-1031-2018-17-3-228-237.
17. Dobariya M. Design of Compound Planetary Gear Train / M. Dobariya // *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. 2018. Vol. 6, iss. 4. pp. 3179–3184, doi: 10.22214/ijraset.2018.452.
18. Стрілець О. Р. Динамічна модель керування швидкості через епіцикл привода із зубчастою диференціальною передачею / О. Р. Стрілець, В. О. Малащенко, В. Р. Пасіка, В. М. Стрілець // *Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. “Динаміка, міцність та проектування машин і приладів”*. Львів: НУЛП, 2019. № 911. С. 63–67.
19. Стрілець О. Р. Динаміка пристрою для керування змінами швидкості з зубчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою через сонячне зубчасте колесо / О. Р. Стрілець, В. О. Малащенко, В. М. Стрілець // *Вісник Національного технічного університету “ХПІ”. Серія: Машинознавство та САПР*. Харків: НТУ “ХПІ”, 2020. № 1' 2020. С. 93–98.
20. Стрілець О. Р. Динаміка пристрою для керування змінами швидкості з зубчастою диференціальною передачею і замкнутою гідросистемою через водило / О. Р. Стрілець, В. О. Малащенко, В. М. Стрілець // *Науковий вісник ХДМУ*. Херсон : ХДМУ, 2020. № 2 (7). С. 176–182.
21. Стрілець О. Р. Визначення зведених обертальних моментів рівнянь динаміки пристроїв зміни швидкості через зубчасті диференціали з замкнутими гідросистемами / О. Р. Стрілець, В. О. Малащенко, В. М. Стрілець // *Вісник Хмельницького національного університету. Науковий журнал. Технічні науки*. Хмельницький: ХНУ, 2020. Вип. 4. С. 18–23.
22. Strilets O. Dynamic model of a closed-loop hydraulic system for speed control through gear differential / O. Strilets; V. Malashchenko; V. Strilets // *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU, 2020. Vol 98. No. 2. P. 91–98.

V. O. Malashchenko

Lviv Polytechnic National University

O. R. Strilets

National University of Water And Environmental Engineering

DYNAMIC MODEL OF SPEED CONTROL IN THE DEVICE WITH A MULTISTAGE GEAR DIFFERENTIAL AND THE CLOSED-LOOP HYDRAULIC SYSTEMS THROUGH CARRIERS

Aim. Development of a mathematical model of dynamic processes in speed change devices with multistage gear differential transmissions with closed-loop hydraulic systems on an example of a concrete design. **Method.** A device with a multistage differential has been considered, in which the gear wheel - the ring gear of the first stage is connected to the sun gear wheel of the second stage, the gear wheel - the ring gear of the second stage is connected to the sun gear wheel of the third stage, and so on, depending on the number of steps. Speed control is performed at the expense of carriers of each stage by means of the closed hydraulic systems established on them. On the basis of the Lagrange equation of the second kind the equations of dynamics of such devices depending on conditions of their work have been derived and solved. **Results.** The mathematical dynamic model have been obtained of gear differential motion with the possibility of controlling the movement of reserved hydraulic systems in order to provide the necessary law of load change on the driven link - ring gear, and the results can be the basis for quantitative analysis of power dependencies of mechanical drive with hydraulic control. **Scientific novelty.** For the first time a dynamic model of a speed change device in mechanical drives of machines with a multistage gear differential has been built, which allows to determine the speed of the drive link and select the required closed-loop hydraulic system to control the speed of its driven link. **Practical significance.** The results obtained can be the basis for a quantitative analysis of the power dependences of a mechanical drive with hydraulic control through the carriers, when the torque of the resistance changes periodically over a long period of time; or the magnitude of the impact torque of the resistance after a sharp increase remains unchanged for a long time; or the magnitude of the impact torque of the resistance after a sharp increase is maintained for a short time; or the actuator stops immediately due to significant overload.

Key words: dynamics, speed change control device, multistage gear differential, closed-loop hydraulic system, sun gear, ring gear, carrier, planet.

1. Malashchenko V., Strilets O. and Strilets V., "Fundamentals of Creation of New Devices for Speed Change Management", *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*, vol. 1, no. 2, pp. 11–20, 2015.

2. Vavilov A. V., et al., "Sovershenstvovaniye transmissiy dorozhnykh mashin dlya povysheniya ikh konkurentosposobnosti i obespecheniya importozameshcheniya" ["Improvement of road cars transmissions to increase their competitiveness and ensure import substitution"], *Avtomobilnyye dorogi i mosty [Roads and Bridges]*, no. 2(18), pp. 102–108, 2016. [In Russian].

3. Malashchenko V., et al., "Investigation of the energy effectiveness of multistage differential gears when the speed is changed by the carrier". *Diagnostyka*. vol. 20. no. 6. pp. 57–64, 2019

4. Bahk C.-J. and Parker R. G., "Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics", *Mechanism and Machine Theory*, no. 70. pp. 298–319, 2013.

5. Qilin H., et al., "Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 12 p. doi: 10.1155/2013/149046.

6. Salgado D. R. and Castillo J. M., "Analysis of the transmission ratio and efficiency ranges of the four-, five-, and six-link planetary gear trains", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 73, pp. 218–243, 2014. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.11.001.

7. Perún G., "Verification Of Gear Dynamic Model In Different Operating Conditions", *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*, no. 84, pp. 99–104, 2014.

8. Fuchun Y., Jianxiong F. and Hongcai Zh., "Power flow and efficiency analysis of multi-flow planetary gear trains", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 92, pp. 86–99, 2015. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.05.003

9. Pawar P. V. and Kulkarni P. R., "Design of two stage planetary gear train for high reduction ratio", *International Journal of Research in Engineering and Technology*, vol. 4, iss. 6, pp. 150–157, 2015. doi: 10.15623/ijret.2015.0406025

10. Chao Ch. and Jiabin Ch. "Efficiency analysis of two degrees of freedom epicyclic gear transmission and experimental", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 87, pp. 115–130, 2014. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.017

11. Tianli X., et al., "Synthesis of seven-speed planetary gear trains for heavy-duty commercial vehicle", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 90, pp. 230–239, 2014. doi: 10.1016/j.mechmachtheory. 2014.12.012.
12. Drewniak J., Garlicka P., and Kolber P. "Design for the bi-planetary gear train", *Scientific Journal of Silesian University of Technology. Series Transport*, no. 91, pp. 5–17, 2016. doi: 10.20858/sjsutst.2016.91.1
13. Li J., et al., "Power Analysis and Efficiency Calculation of Multistage Micro-planetary Transmission", *Energy Procedia*, no. 141, pp. 654–659, 2017. doi: 10.1016/j.egypro.2017.11.088
14. Wenjian Yang and Huafeng Ding, "Automatic detection of degenerate planetary gear trains with different degree of freedoms", *Applied Mathematical Modelling*, no. 64, pp. 320–332, 2018. doi: 10.1016/j.apm.2018.07.038.
15. Esmail E. L., Pennestr Δ E. and Juber A. H., "Power losses in two-degrees-of-freedom planetary gear trains: A critical analysis of Radzimovsky's formulas", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 128, pp. 191–204, 2018. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015.
16. Dankov A. M., "Planetary Continuously Adjustable Gear Train With Force Closure Of Planet Gear And Central Gear: From Idea To Design", *Science & Technique*, no. 17(3), pp. 228–237, 2018. doi: 10.21122/2227-1031-2018-17-3-228-237.
17. Dobariya M., "Design of Compound Planetary Gear Train", *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, vol. 6, iss. 4, pp. 3179–3184, 2018. doi: 10.22214/ijraset.2018.452.
18. Strilets O., et al., "Dynamichna model keruvannya shvydkosti cherez epitsykl pryvoda iz zubchastoyu dyferentsialnoyu peredacheyu" ["Dynamic model of speed control through the ring gear of the drive with gear differential transmission"], *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". "Dynamika, mitsnist ta proektuvannya mashyn i pryladiv"* [Bulletin of the Lviv Polytechnic National University. "Dynamics, strength and design of machines and devices"], no. 911. pp. 63–67, 2019. [In Ukrainian].
19. Strilets O., Malashchenko V. and Strilets V., "Dynamika prystroyu dlya keruvannya zminamy shvydkosti z zubchastoyu dyferentsialnoyu peredacheyu i zamknutoyu hidrosystemoyu cherez sonyachne zubchaste koleso" ["Dynamics of the device for control of changes of speed with a gear differential transfer and the closed hydraulic system through a sun gear wheel"]. *Visnyk NTU "KPI". Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mechanical Engineering and CAD], no. 1'2020. pp. 93–98, 2020. [In Ukrainian].
20. Strilets O., Malashchenko V. and Strilets V., "Dynamika prystroyu dlya keruvannya zminamy shvydkosti z zubchastoyu dyferentsialnoyu peredacheyu i zamknutoyu hidrosystemoyu cherez vodylo" ["Dynamics of the speed changes control device with a gear differential and the closed hydraulic system through the carrier"], *Naukovyy visnyk KhDMU* [Scientific Bulletin of KhDMU], no. 2 (7). pp. 176–182, 2020. [In Ukrainian].
21. Strilets O., Malashchenko V. and Strilets V., "Vyznachennya zvedenykh obertalnykh momentiv rivnyan dynamiky prystroyiv zminy shvydkosti cherez zubchasti dyferentsialy z zamknutymy hidrosystemamy" ["Determination of the consolidated torques for the equations of dynamics of speed change devices through gear differentials with closed hydraulic systems"], *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences*, iss. 4. pp. 18–23, 2020. [In Ukrainian].
22. Strilets O., Malashchenko V. and V. Strilets, "Dynamic model of a closed-loop hydraulic system for speed control through gear differential". *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU. Vol. 98. No. 2, pp. 91–98. 2020.