

Отже, для двовимірних неосесиметричних задач механіки деформівного твердого тіла на основі інтегрування диференціальних рівнянь суцільності Коші між деформаціями та переміщеннями в областях визначення – суцільному крузі й крузі з круговим отвором, площині та площині з круговим отвором – одержані вихідні інтегродиференціальні рівняння суцільності, які при вказаних необхідних умовах погодження переміщень з деформаціями еквівалентно зведені до відомого диференціального рівняння суцільності. При цьому виведені формули коректного визначення переміщень за відомими деформаціями з використанням умов погодження та знайдені інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень. Останні можуть знайти важливе застосування як критерії достовірності числових розрахунків напружено-деформованого стану деформівних тіл під час розв’язування прямих задач механіки і як необхідні умови для існування розв’язків відповідних прямих [5, 7] і обернених [8, 9] задач пружності чи термopужності.

1. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., 1975. 2. Папкович П.Ф. Теория упругости. Л. М., 1939. 3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М., 1981. 4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975. 5. Вігак В.М. Розв’язки задач пружності та термopужності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. 1995. Вип. 9. С.34–122. 6. Вігак В.М. Розв’язування плоских задач пружності та термopужності в прямокутній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1996. 9, № 1. С.19–25. 7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К., 1970. 8. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. К., 1988. 9. Вігак В.М. Керування термopужними напруженнями в циліндрі у випадку двовимірного неосесиметричного температурного поля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1992. Вип. 36.

УДК 513.88

О. Г. Сторож

Львівський національний університет ім. І. Франка

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

© О. Г. Сторож, 2000

Використовуючи метод диференціювання розкладу одиниці, побудовано формулу обернення та рівність Парсеваля для сингулярного самоспряженого диференціально-граничного оператора.

Using differentiation of identity resolution method the inverse formula and Parseval quality for singular self-adjoint differential-boundary operator are constructed.

1. Нехай L, L_0 – відповідно максимальний і мінімальний диференціальні оператори, що діють у просторі $L_2(a, b)$ і породжені сингулярним самоспряженим диференціальним виразом $l[y]$ порядку s [4]. Накладемо на цей вираз такі обмеження:

1) задача Коші для рівняння $l[y] - \lambda y = f$ при кожному $f \in L_2(a, b)$ і при кожному комплексному λ має єдиний розв'язок, звідки випливає, що оператори L та L_0 взаємно спряжені, так що L_0 – симетричний оператор;

2) L_0 має індекс дефекту (m, m) , тому існують самоспряжені розширення цього оператора, причому [4] резольвента $(L_u - \lambda)^{-1}$ кожного такого розширення L_u є інтегральним оператором з ядром Карлемана, якщо $\lambda \neq \operatorname{Re} \lambda$.

Нехай $D(L)$ – область визначення оператора L . Покладемо

$$\forall y, z \in D(L) \quad \{y, z\} \stackrel{\text{def}}{=} (Ly | z) - (y | Lz)$$

і розглянемо в просторі $L_2(a, b)$ самоспряжений оператор T такий, що

$$D(T) = \{y \in D(L) : \{y, w_j\} = (y, \varphi_j), j = 1, \dots, r; \quad \{y, w_j\} = 0, j = r+1, \dots, m\},$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = t[y] \stackrel{\text{def}}{=} l[y] + \sum_{j=1}^r \{y, w_{m+j}\} \varphi_j + \sum_{q=1}^p (y | \chi_q) \psi_q,$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_r, \chi_1, \dots, \chi_p \in D(L)$, причому $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ лінійно незалежні, а ядро

$K(x, \xi) = \sum_{q=1}^p \psi_q(x) \chi_q(\xi)$ симетричне, тобто $K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$. Далі, $w_1, \dots, w_m$ – елементи з

$D(L)$, лінійно незалежні за модулем $D(L_0)$, а $(\cdot | \cdot)$ – символ скалярного добутку в гільбертовому просторі $L_2(a, b)$.

У цій роботі побудовано розклад за власними функціями оператора T , спорідненого в сенсі [1] з парою (L, L_0) . При цьому використовується метод диференціювання розкладу одиниці, запропонований в [3, 5].

Перш ніж формулювати основний результат, введемо в розгляд оператори V, S, L_u, L_v , які визначимо так:

$$\forall y \in L_2(a, b) \quad Vy = \int_a^b K(\cdot, \xi) y(\xi) d\xi; \quad S = T - V;$$

$$D(L_u) = \{y \in D(L) : \{y, w_j\} = 0, j = 1, \dots, m\}, \quad \forall y \in D(L_u) \quad L_u y = l[y].$$

$$D(L_v) = \{y \in D(L) : \{y, w_j\} = 0, j = r+1, \dots, r+m\}, \quad \forall y \in D(L_v) \quad L_v y = l[y].$$

Усі ці оператори є самоспряженими (деталі – див. [2]).

Нехай $G_0(x, \xi, \lambda)$ – ядро оператора $(L_u - \lambda)^{-1}$. Справедливе таке твердження.

Теорема 1. Якщо $\lambda \neq \operatorname{Re} \lambda$, то $(T - \lambda)^{-1}$ є інтегральним оператором з ядром Карлемана

$$G(x, \xi, \lambda) = G_0(x, \xi, \lambda) + \sum_{j=1}^{m+r+p} \rho_j(x, \lambda) \overline{g_j(\xi, \lambda)},$$

де $\rho_j(\cdot, \lambda), g_j(\cdot, \lambda) \in D(L) \quad (j = 1, \dots, m+r+p)$.

З теореми 1 і результатів праць [3, 5] випливає повнота системи узагальнених власних функцій оператора T . Нижче наведено співвідношення, які діагоналізують цей оператор.

2. Визначимо оператор J так:

$$D(J) = D(L_v) \cap D(S), \quad \forall y \in D(J) \quad Jy = L_v y = Sy.$$

Нехай J^* – оператор, спряжений з J . Покладемо

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} D(L_v) \cap D(J)^\perp, \quad K_2 \stackrel{\text{def}}{=} D(S) \cap D(J)^\perp$$

(мається на увазі ортогональність відносно скалярного добутку графіка оператора J^*) і позначимо через $M(A; P)$ найменший замкнений підпростір простору $L_2(a, b)$, що містить множину A і редукує самоспряжений оператор P , а через $P|N$ – звуження цього оператора на підпростір N .

Теорема 2. Нехай $R(V)$ – область значень оператора V . Тоді

$$M(K_1 \cup R(V); L_v) = M(K_2 \cup R(V); T) \stackrel{\text{def}}{=} M, \quad T| M^\perp = L_v| M^\perp.$$

Виходячи з цієї теореми, при доведенні якої істотно використовуються результати праць [5, 6], неважко побудувати такі $\mu_1, \dots, \mu_t \in L_2(a, b)$, що $M = \bigoplus_{k=1}^t M(\mu_k; T)$ ($1 \leq p+r$).

3. Нехай E – розклад одиниці оператора T . З теореми 1 і результатів праці [3] випливає, що функція $\lambda \mapsto \mu_k(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (E(-\infty, \lambda] \mu_k)(x)$ ($k=1, \dots, t$) є при майже всіх $x \in [a, b]$ абсолютно неперервною відносно міри Стілтєса, породженої функцією

$m_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (E(-\infty, \lambda] \mu_k | \mu_k)$, а отже, в силу теореми Радона – Никодима, для майже всіх $x \in [a, b]$ існує похідна $\frac{d\mu_k(x, \lambda)}{dm_k(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} u_k(x, \lambda)$.

Використовуючи теорему про розклад за власними функціями самоспряженого сингулярного диференціального оператора (див. [4], с. 250), теорему 2 і основні результати праці [3], можна довести правильність такого твердження.

Теорема 3. Нехай $y_1(x, \lambda), \dots, y_s(x, \lambda)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $I[y] = \lambda y$ така, що $y_k^{[j-1]}(c, \lambda) = \delta_k^j$, де δ – дельта Кронеккера, $c \in (a, b)$, $y^{[j]}$ – квазіпохідна порядку j функції y , $\sigma(\lambda) = \{\sigma_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^s$ – спектральна матриця розподілу оператора L_v , а P_0 та P_1 ортопроектори на відповідно $M^\perp$ та M . Покладемо

$$(Uf)(\lambda) = \left\{ \int_a^b (P_0 f)(x) \overline{y_1(x, \lambda)} dx, \dots, \int_a^b (P_0 f)(x) \overline{y_s(x, \lambda)} dx, \int_a^b (P_1 f)(x) \overline{u_1(x, \lambda)} dx, \dots, \int_a^b (P_1 f)(x) \overline{u_t(x, \lambda)} dx \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \hat{f}_1(\lambda), \dots, \hat{f}_{s+t}(\lambda) \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(\lambda). \quad (1)$$

Тоді

$$(U^{-1} \hat{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^s \hat{f}_j(\lambda) y_k(x, \lambda) d\sigma_{jk}(\lambda) + \sum_{k=1}^t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{s+k}(\lambda) u_k(x, \lambda) dm_k(\lambda), \quad (2)$$

$$(f | g) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^s \hat{f}_j(\lambda) \overline{\hat{g}_k(\lambda)} d\sigma_{jk}(\lambda) + \sum_{k=1}^t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{s+k}(\lambda) \overline{\hat{g}_{s+k}(\lambda)} dm_k(\lambda).$$

При цьому відображення U діагоналізує оператор T і є унітарним перетворенням простору $H = L_2(a, b)$ на простір $\hat{H} = U_0(M^\perp) \bigoplus_{k=1}^t L_2((-\infty, \infty); dm_k)$, де U_0 – (унітарний) оператор $L_2(a, b) \rightarrow L_2(\sigma)$, що діагоналізує L_v . Отже,

$$U_0(M^\perp) = \left\{ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in L_2(\sigma) : \gamma_j(\lambda) = \int_a^b f(x) \overline{y_j(x, \lambda)} dx, j=1, \dots, s, f \in M^\perp \right\} \quad (3)$$

Інтеграли, які фігурують у (3), збігаються в середньому у $L_2(\sigma)$, а інтеграли, які фігурують в (1), (2), збігаються в середньому в відповідно $\hat{N}$ та N .

1. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. 1972. 204, N 3. С.542–545. 2. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 3. Маутнер Ф.И. О разложении по собственным функциям // Успехи мат. наук. 1955. 10, N 4. С.127–132. 4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 5. Aronszajn N., Brown R.D. Finite-dimensional perturbations of spectral problems and variational approximations methods for eigenvalue problems // St. Math.. 1970. 36, N 1. P.1–70. 6. Kato T. On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators // J. of the Math. Soc. Of Jap.. 1957. 9, N 2. P.239–249.

УДК 513.927.25

О.Б. Шувар

Львівський національний університет ім. І. Франка

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ

© О.Б. Шувар, 2000

Встановлено асимптотичну поведінку власних значень для одного класу скінченновимірних збурень диференціального оператора з матричними коефіцієнтами.

Asymptotic behaviour of eigenvalues for a class of finite-dimensional perturbations of odd order differential operator with matrix coefficients is established.

Нехай $P_2(x), \dots, P_n(x)$ – визначені на $[0, 1]$ неперервні функції, значеннями яких є комплексні матриці порядку $m \times m$ (надалі кожен таку матрицю ототожнюємо з відповідним лінійним оператором, а множину лінійних операторів, що діють в просторі C^m позначаємо через B_m),

$$l[y] = y^{(n)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_n(x)y \quad (1)$$

$(y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)))$ – диференціальний вираз непарного порядку $n = 2\mu - 1$.

Далі, нехай $U_v = U_{v0} + U_{v1}$, де

$$U_{v0}(y) = A_v y^{(k_v)}(0) + \sum_{j=0}^{k_v-1} A_{vj} y^{(j)}(0), \quad U_{v1}(y) = B_v y^{(k_v)}(1) + \sum_{j=0}^{k_v-1} B_{vj} y^{(j)}(0),$$

а $A_v, B_v, A_{vj}, B_{vj} \in B_m$ ($v = 1, \dots, n+r$, $r = 0, 1, \dots, n$), причому $n-1 \geq k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0$, $n-1 \geq k_{n+1} \geq \dots \geq k_{n+r} \geq 0$; $k_{v+2} < k_v$, якщо $v = 1, 2, \dots, n-2, n+1, \dots, n+r-2$; хоча б один з операторів A_v або B_v ($v = 1, \dots, n+r$) є ненульовим, а система крайових форм $\{U_1, \dots, U_n\}$ лінійно незалежна.