ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 15–18

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 15–18

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КУТОВІЙ ОБЛАСТІ

В. Дільний

Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. І. Франка, 34, 82100, Дрогобич, Україна

(Отримано 7 грудня 2010 р.)

Знайдено повний опис перетворення Фур'є-Лапласа класу функцій Гарді-Смірнова у нескінченній кутовій області.

Ключові слова: клас Гарді, клас Смірнова, перетворення Фур'є-Лапласа.

2000 MSC: 42A38

УДК: 517.5

Для дослідження повноти деяких систем експонент з вагою потрібними є теореми представлення для певних класів аналітичних функцій (див. [2, 5]). Деякі результати такого роду можуть бути одержані з теорем 1 та В (див. нижче).

Нехай D – необмежена опукла n- кутна, $n \in \mathbb{N}$, область комплексної площини, що лежить в деякому куті, величина якого є меншою за π, і межа області D складається з півпрямих l_1 і l_{n+1} та, можливо, відрізків l_2, ..., l_n, нумерація і орієнтація яких відповідає додатному обходу D. Через a_j, $j = \overline{1,n}$, позначимо (скінченні) вершини області, а через α_j, $j \in \overline{1,n+1}$ – величини кутів, що рахуються в додатному обході, між додатним напрямом осі абсцис і напрямним вектором променя чи відрізка l_j, який визначається раніше вибраним обходом ∂D. Через $\frac{\pi}{\beta}$, $1 < \beta \leqslant +\infty$, позначимо величину кута $\pi - \alpha_{n+1} + \alpha_1$. Нехай l_j^* - пряма, що проходить через сторону l_j. Через $\overrightarrow{b}$ при $\beta < +\infty$ позначимо вектор з початком у точці перетину прямих l_1^* і l_{n+1}^*, який лежить на бісектрисі l_1^* і l_{n+1}^* та напрямлений в сторону області D. Якщо ж $\beta = +\infty$, то через $\overrightarrow{b}$ позначатимемо вектор, напрям якого співпадає з вибраним напрямом сторони l_{n+1}. Нехай φ_*, $0 \leqslant \varphi_* < 2\pi$, - кут між додатним напрямом дійсної осі і вектором $\overrightarrow{b}$, який вимірюється від цієї осі у додатному напрямі. Нехай також $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (якщо $\beta = +\infty$, то вважаємо, що $\alpha = 1$) і $h(\theta) = h(\theta, D)$, де

$$h(\theta, D) = \sup_{z \in \overline{D}} \left\{ \mathrm{Re}\left(ze^{-i\theta}\right)\right\}.$$

Функція h є неперервною на проміжку $\triangle_{\alpha,\varphi_*} = \{\theta : |\theta - \pi + \varphi_*| \leqslant \pi/(2\alpha)\}$. Позначимо через $H^p(D_\times, h)$, $1 \leqslant p < +\infty$, простір функцій f, аналітичних в куті $D_\times = \{z : |\arg z - \pi + \varphi_*| \leqslant \pi/(2\alpha)\}$, для яких

$$||f||^p := \sup_{|\varphi - \pi + \varphi^*| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-prh(\varphi)} dr \right\} < +\infty.$$

Нехай $D^* = \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, а $E^p[D]$ і $E^p_*[D]$ – простори функцій, аналітичних відповідно в D і D^*, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать в D (відповідно в D^*). У випадку, коли D є областями $\mathbb{C}(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ чи $D_\sigma = \{z : \mathrm{Re} z < 0, |\mathrm{Im} z| < \sigma\}$, вказані простори досліджувалися відповідно у [1] та [2]. Позначимо через W^2_σ клас Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, що належать простору $L^2(\mathbb{R})$, а через $H^2(\mathbb{C}_-)$ простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \mathrm{Re} z < 0\}$. Нехай далі $D^-_\times = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\times$. Через $T^2(D^-_\times)$ позначимо множину всіх впорядкованих наборів $F = (F_1, F_2, ..., F_{n+1})$, де $F_1(ze^{-i\alpha_1})e^{a_1 z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_{n+1}(ze^{i(\pi - \alpha_{n+1})})e^{a_{n+1} z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а $F_j\left(ze^{-i(\alpha_j - \pi/2)}\right) e^{\frac{a_j + a_{j-1}}{2} z} \in W^2_{\left|\frac{a_j - a_{j-1}}{2}\right|}$, причому

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_j(z) = 0, \tag{1}$$

$z \in D^-_\times$. Простір $T^2(D^-_\times)$ можна розглядати як нормований простір з нормою $||F|| = \max\left\{\max\left\{||F_j||_{H^2}, j \in \overline{2,n}\right\}; ||F_1||_{W^2}; ||F_{n+1}||_{W^2}\right\}$, де під $||F_j||_{H^2}$ та $||F_j||_{W^2}$ розуміємо норми у відповідних просторах Гарді та Вінера. Властивості просторів $E^2[D]$ та $T^2(D^-_\times)$ відзначено у лемах 1 та 2, а $H^2(D_\times, h)$ та $E^2_*[D]$ в [4]. Метою цієї статті є доведення наступного твердження.

Теорема 1. *Рівності*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-zw} dw,\ f \in E^2[D], \tag{2}$$

де $j \in \overline{1, n+1}$, *задають взаємно однозначне відображення простору* $E^2[D]$ *на* $T^2(D^-_\times)$ *і справедлива* *двоїста формула*

$$f(w)=\frac{-1}{i\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{n+1}e^{-i\varphi_j}\int_0^{+\infty}F_j(re^{-i\varphi_j})e^{re^{-i\varphi_j}w}dr, \tag{3}$$

де $w\in D$, $\varphi_j=\alpha_j-\pi/2$.

Зазначимо, що для випадку, коли $D=\{w:|\mathrm{Im}z|<\sigma,\mathrm{Re}z<0\}$, теорема 1 доведена в [9]. Перетворення, задане формулою (2), називатимемо, як і в [9], перетворенням Фур'є-Лапласа. В [4] доведено наступне твердження.

Теорема B. *Рівність*

$$G(z)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial D}g(w)e^{zw}dw,\quad g\in E_*^2[D] \tag{4}$$

задає взаємно однозначне відображення простору $H^2(D_\times,h)$ на $E_*^2[D]$ і справедлива двоїста формула

$$g(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty e^{i\theta_*}}G(z)e^{-zw}dz, \tag{5}$$

де θ_* – довільне число, що $|\theta_*-\pi+\varphi_*|<\pi/(2\alpha)$.

Добре відомою є наступна теорема (див. [7]).

Теорема Пелі-Вінера. *Рівність*

$$G_0(z)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial\mathbb{C}_-}g_0(w)e^{zw}dw,\quad g_0\in H^2(\mathbb{C}_-),$$

задає взаємно однозначне відображення простору $H^2(\mathbb{C}_-)$ на $L^2(-\infty;0)$ і справедлива двоїста формула

$$g_0(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 G_0(x)e^{-xw}dx.$$

Ця теорема є граничним випадком як теореми 1, так і теореми B. З іншого боку, разом теореми 1, B та Пелі-Вінера повністю розв'язують питання опису перетворення Фур'є-Лапласа просторів Гарді-Смірнова у нескінченній кутовій області.

Лема 1. *Якщо $f\in E^p[D]$, $1\leqslant p<+\infty$, то f має майже скрізь (м. с.) на ∂D кутові граничні значення, які теж позначаємо через f і $f\in L^p(\partial D)$. Якщо $f\in E^1[D]$, то*

$$\int_{\partial D}f(z)dz=0.$$

□ *Доведення.* Для випадку, коли D – кут $\mathbb{C}(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$, лема 1 доведена в [1], коли D – півсмуга – в [2], а коли D – (обмежений) многокутник – в [3]. Довільну D чи D^* можна розбити на скінченну кількість вищевказаних областей, звідки маємо потрібне. ■

Лема 2. *Простори $E^2[D]$ та $T^2(D_\times^-)$ є банаховими відносно вказаних норм.*

□ *Доведення.* Розіб'ємо D на k_0 областей D_j такого вигляду, як і при доведенні попередньої леми, що $\overline{D}=\bigcup_{j=1}^{k_0}\overline{D_j}$ і $D_j\bigcap D_k=\varnothing$, $j\neq k$. Тоді $f\in E^2[D]$ тоді і тільки тоді, коли f аналітична в D і $f\in E^2[D_j]$ для кожного $j\in\overline{1;k_0}$. А кожен із просторів $E^2[D_j]$ є повним, тому $E^2[D]$ – повний. Повнота ж простору $T^2(D_\times^-)$ випливає з повноти просторів Гарді у відповідних півплощинах та повноти просторів Вінера. ■

□ *Доведення теореми 1.* $f\in E^2[D]$. Тоді, оскільки за лемою 1 $f\left(a_1+\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}\right)\in L^2(0;+\infty)$, то за теоремою Пелі-Вінера [7, с. 20] маємо

$$F_1(z)=\frac{e^{i\alpha_1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-a_1z}\int_0^{+\infty}f\left(a_1+\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}\right)e^{-z\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}}d\rho$$
$$=e^{-a_1z}f_1(ze^{i\alpha_1}),$$

де $f_1\in H^2(\mathbb{C}_-)$, та, оскільки $f\left(a_{n+1}+\rho e^{i(\alpha_{n+1}-\pi)}\right)\in L^2(0;+\infty)$, маємо

$$F_{n+1}(z)=\frac{e^{i\alpha_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-a_{n+1}z}$$
$$\times\int_0^{+\infty}f\left(a_{n+1}+\rho e^{i\alpha_{n+1}}\right)e^{-z\rho e^{i\alpha_{n+1}}}d\rho$$
$$=e^{-a_1z}f_{n+1}\left(ze^{(i\alpha_{n+1}-\pi)}\right),$$

де $f_{n+1}\in H^2(\mathbb{C}_-)$. Також, оскільки за лемою 1 $f\left(\frac{a_j+a_{j-1}}{2}+\rho e^{i\alpha_j}\right)\in L^2(-\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2};\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2})$, на основі іншої теореми Пелі-Вінера [7] отримуємо

$$F_j(z)=\frac{e^{i\alpha_j}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a_j+a_{j-1}}{2}z}$$
$$\times\int_{-\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}}^{\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}}f\left(\frac{a_j+a_{j-1}}{2}+\rho e^{i\alpha_j}\right)e^{-z\rho e^{i\left(\alpha_j-\frac{\pi}{2}\right)}}d\rho=$$
$$=e^{-\frac{a_j+a_{j-1}}{2}z}f_j\left(ze^{i\left(\alpha_j-\frac{\pi}{2}\right)}\right),$$

де $f_j\in W^2_{\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}}$, для всіх $j\in\overline{2;n}$. Якщо $z\in\left\{z_1:|\arg z_1+\varphi^*|<\frac{\pi}{2\alpha}\right\}$, то, оскільки $\mathrm{Re}(zw)>0$, маємо $f(w)e^{-zw}\in E^1[D]$ і тому за лемою 1

$$\int_{\partial D}f(w)e^{-zw}dw=0,$$

звідки випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n+1}F_k(z)=0,\quad z\in\left\{z_1:|\arg z_1+\varphi^*|<\frac{\pi}{2\alpha}\right\}.$$

Але кожна з функцій $F_2,F_3,...,F_{n+1}$ є аналітичною у півплощині $\left\{z:-\varphi^*-\frac{\pi}{2\alpha}<\arg z<\pi-\varphi^*-\frac{\pi}{2\alpha}\right\}$ і за щойно встановленим

$$F_1(z)=-\sum_{k=2}^{n+1}F_k(z),\quad z\in\left\{z_1:|\arg z_1+\varphi^*|<\frac{\pi}{2\alpha}\right\},$$

тому F_1 аналітично продовжується в $D^-_\times$. Аналогічно функції $F_1, F_2, ..., F_n$ є аналітичними у півплощині $\left\{z : \pi - \varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha} < \arg z < 2\pi - \varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$, тому F_{n+1} аналітично продовжується в $D^-_\times$. Отже, $(F_1, ..., F_{n+1}) \in T^2_\sigma(D^-_\times)$.

Нехай тепер навпаки $(F_1, ..., F_{n+1}) \in T^2_\sigma(D^-_\times)$ Позначимо доданки із правої частини (3) через $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n+1}$. Оскільки $F_1(z)e^{a_1 z} \in L^2(\{re^{-i\varphi_1} : r > 0\})$ то за теоремою Пелі-Вінера функція ψ_1 належить класу Гарді у півплощині $\{w : \alpha_1 < \arg(w - a_1) < \pi + \alpha_1\}$. Аналогічно, оскільки $F_{n+1}(z)e^{a_n z} \in L^2(\{re^{-i\varphi_{n+1}} : r > 0\})$, то ψ_{n+1} належить класу Гарді у півплощині $\{w : \alpha_{n+1} < \arg(w - a_n) < \pi + \alpha_{n+1}\}$. Далі, $F_j(z)\exp\left(\frac{a_j + a_{j-1}}{2}\right) \in L^2\left(\{re^{-i\varphi_j} : r > 0\}\right)$, $j \in \overline{2; n}$, тому ψ_j належить класу Гарді у півплощині $\left\{w : \alpha_j < \arg\left(w - \frac{a_j + a_{j-1}}{2}\right) < \pi + \alpha_j\right\}$. Отже, функція $\psi = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \psi_j$ належить класу $E^2[D_\sigma]$. Залишилось показати, що $f = \psi$, якщо F визначена рівністю (2). За теоремою Пелі-Вінера для кутових граничних значень ψ_1 на l_1 справедлива рівність (інтеграл розуміється в L^2-метриці)

$$\psi_1(w) = \frac{-e^{-i\varphi_1}}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} F_1\left(re^{-i\varphi_1}\right) e^{\left(re^{-i\varphi_1}\right)w} dr.$$

Оскільки кожна функція F_j, $j = \overline{1; n}$, є цілою з індикатором (див. [8])

$$h_j(\varphi) = \frac{|a_j - a_{j-1}|}{2} |\sin(\varphi + \varphi_j)|$$

$$+\frac{|a_j + a_{j-1}|}{2} \cos\left(\arg\frac{a_j + a_{j-1}}{2} + \varphi\right),$$

то функція ψ_j допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину за винятком відрізка $[a_{j-1}; a_j]$ і її аналітичне продовження у півплощину $\{w : |w| \cos(\arg w - \varphi_{n+1}) < A_j\}$, де

$$A_j = -\frac{|a_j - a_{j-1}|}{2} |\sin(\varphi_j - \varphi_{n+1})|$$

$$-\frac{|a_j + a_{j-1}|}{2} \cos\left(\arg\frac{a_j + a_{j-1}}{2} - \varphi_{n+1}\right)$$

дається рівністю

$$\psi_j(w) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi_{n+1}} \int\limits_0^{+\infty} F_j(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{re^{-i\varphi_{n+1}} w} dr.$$

Але м. с. на $\partial D_\times$ виконується $\sum\limits_{j=2}^{n+1} F_j(z) = -F_1(z)$. Тому кутові граничні значення функції ψ на l_1 м. с. рівні

$$-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D^-_\times} F_1(z) e^{wz} dz,$$

де інтеграл береться в додатному обході області $D^-_\times$. За теоремою типу順Планшереля (див. [1, с.432]) останній інтеграл рівний $f(w)$, $w \in l_1$. А за теоремою Лузіна-Прівалова [3, с.292] $f = \psi$ на $D^-_\times$. ■

Література

[1] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

[2] Винницкий Б. В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. –1994. – **46**, №5. – С. 484–500.

[3] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.

[4] Винницкий Б. В. Аппроксимационные свойства систем экспонент в одном пространстве аналитических функций // Укр. мат. журн. –1996. – **48**, №2. – С. 168–183.

[5] Винницкий Б.В., Дильный В.М. Об обобщении теоремы Берлинга-Лакса // Мат. заметки – 2006. – **79**, №3 – С. 362–268.

[6] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. –М.: Наука, 1984. – 368 с.

[7] Винер Н., Пели Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1963. – 256 с.

[8] Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. –1975. – **39**. – № 3. – С. 657–702.

[9] Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних у півсмузі //Матем. студії – 1997. – **7**. –№ 1. – С. 41–52.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

В.Н. Дильный

Дрогобицкий государственный педагогический университет, ул. И. Франко, 34, Дрогобыч, 82100, Украина

Найдено полное описание преобразования Фурье-Лапласа класса функций Харди–Смирнова в бесконечной угловой области.

Ключевые слова: класс Харди, класс Смирнова, преобразование Фурье–Лапласа.

2000 MSC: 42A38

УДК: 517.5

ON REPRESENTATION OF ONE CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS IN ANGULAR DOMAIN

V. Dilnyi

Drohobych State pedagogical University 34 I. Franko Str., 82100, Drohobych, Ukraine

The full description of Fourier-Laplace transform is established for a Hardy-Smirnov space of functions on infinite angular domain.

Key words: Hardy space, Smirnov space, Fourier-Laplace transform.

2000 MSC: 42A38

УДК: 517.5