ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№804, 2014, с. 127–130

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№804, 2014, p. 127–130

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

Демків І. І.

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 вересня 2014 р.)

На тестових прикладах порівнюється наближення функції однієї змінної за допомогою одержаних інтерполяційних дробів, інтерполяційних дробів Тіле та рядів Тейлора.

Ключові слова: вузли інтерполяції, континуальна множина вузлів, функціональні дроби.

2000 MSC: 65D05, 65D15

УДК: 519.65

Вступ

Інтегральні інтерполяційні ланцюгові дроби (І ІЛД) для функціоналів уперше були введені у роботі [1]. Але побудований тут І ІЛД має одну ваду: він не переходить у ІЛД для функції однієї змінної, коли його аргумент та каркас континуальних вузлів, стають тотожними сталими. Функціональні інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, які є природним узагальненням інтерполяційних ланцюгових дробів для функції однієї змінної були уведені в роботі [2]. Вони мають вигляд:

$$Q_n\left(x\left(\cdot\right)\right) = K_0 + \int\limits_0^1 \cfrac{K_1\left(z_1\right)\left[x\left(z_1\right) - x_0\left(z_1\right)\right]dz_1}{1 + \cfrac{\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1 K_2\left(\mathbf{z}^2\right)\prod\limits_{i=1}^{2}\left[x\left(z_i\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)\right]dz_i}{\cfrac{\ddots}{1+\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1\cdots\int\limits_{z_{n-1}}^1 K_n(\mathbf{z}^n)\prod\limits_{i=1}^{n}[x(z_i)-x_{i-1}(z_i)]dz_i}}}. \tag{1}$$

Інтерполяційні умови виконуються тут на континуальній множині вузлів

$$x^n(t,\xi^n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H(t-\xi_i)(x_i(t) - x_{i-1}(t)), \tag{2}$$

для будь-яких ξ_i з області

$\mathbf{\Omega}_{\xi^n} = \{\xi^n = (\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n) : 0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le ... \le \xi_n \le 1\}.$

Тут $x_i(t) \in Q[0,1]-$ каркас континуальних вузлів, $i = 0, 1, ..., n$, $H(t)$ – функція Хевісайда, $Q[0,1]-$ простір кусково-неперервних функцій. Має місце

Теорема 1. *Для того, щоб ІЛД (1) був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F\left(x\left(\cdot\right)\right) : Q\left[0,1\right] \to R^1$ на континуальній множині вузлів (2) необхідно, щоб його ядра визначались за формулами*

$$K_p^I\left(\overrightarrow{\xi}^k\right) = (-1)^p \prod_{i=1}^{p}\left[x_i\left(\xi_i\right) - x_{i-1}\left(\xi_i\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^p}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_p} \cfrac{\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1\ldots\int\limits_{z_{p-2}}^1 K_{p-1}^I\left(\overrightarrow{z}^{p-1}\right)\prod\limits_{i=1}^{p-1}\left[x^p\left(z_i, \overrightarrow{\xi}^p\right) - x_{i-1}\left(z_i\right)\right]dz_i}{\cfrac{\int\limits_0^1\ldots\int\limits_{z_{p-3}}^1 K_{p-2}^I\left(\overrightarrow{z}^{p-2}\right)\prod\limits_{i-1}^{p-2}\left[x^p\left(z_i,\overrightarrow{\xi}^p\right)-x_{i-1}(z_i)\right]dz_i}{\cfrac{\ddots}{\cfrac{\ddots}{\cfrac{\int\limits_0^1 K_1^I(z_1)\left[x^p\left(z_1,\overrightarrow{\xi}^p\right)-x_0(z_1)\right]d\,z_1}{F\left(x^p\left(\cdot,\overrightarrow{\xi}^p\right)\right)-F(x_0(\cdot))} - 1}}} - 1} - 1, \qquad p = 2, 3, \ldots, n, \tag{3}$$

$$K_1^I\left(\xi_1\right) = -\left[x_1\left(\xi\right) - x_0\left(\xi\right)\right]^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left(x_0\left(\cdot\right) + H\left(\cdot - \xi_1\right)\left(x_1\left(\cdot\right) - x_0\left(\cdot\right)\right)\right).$$

Теорема 2. *Для того, щоб ІЛД (1) з ядрами, що визначаються формулами (3), був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to R^1$ на континуальній множині вузлів (2) достатньо, щоб функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняв "правило підстановки"*

$$\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_p}\left[F\left(x^{p+1}\left(\cdot, \mathbf{z}^{p+1}\right)\right)\Big|_{z_{p+1}=z_p}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^p}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_p} F\left(x^{p+1}\left(\cdot, \mathbf{z}^{p+1}\right)\right)\right]\Bigg|_{z_{p+1}=z_p} \frac{x_{p+1}(z_p) - x_{p-1}(z_p)}{x_p(z_p) - x_{p-1}(z_p)}, \quad p = \overline{1,n}$$

Теорема 3. *Нехай гладкий функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняє "правило підстановки". Тоді для нього справджується представлення*

$$F(x(\cdot)) = K_0^I + \underset{i=1}{\overset{n+1}{D}} \frac{q_i(x(\cdot))}{1},$$

де

$$\underset{i=1}{\overset{n}{D}} \frac{a_i}{b_i} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

$$q_m(x(\cdot)) = \int_0^1 \int_{z_1}^1 \cdots \int_{z_{m-1}}^1 K_m(\mathbf{z}^m) \prod_{l=1}^{m} \left[x(z_l) - x_{l-1}(z_l)\right] dz_l,$$

$K_p^I(\mathbf{z}^p)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, визначаються за формулами (3), а $K_{n+1}(\mathbf{z}^{n+1}) = K_{n+1}^R(\mathbf{z}^{n+1})$ одержується з (3) при $p = n+1$, $x_{n+1}(z) \equiv x(z)$.

"Правило підстановки" накладає істотні обмеження на функціонал, що інтерполюється. Тому у роботі [3] досліджуються інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби на континуальній множині вузлів (2), які не вимагають виконання правила підстановки.

I. Постановка задачі

Метою цієї роботи є на тестових прикладах порівняти наближення функції однієї змінної за допомогою одержаних у [2, 3] інтерполяційних ланцюгових дробів, інтерполяційних ланцюгових дробів Тіле та рядів Тейлора.

II. Розв'язування

Якщо у досліджуваних функціональних І ІЛД з [2,3] аргумент $x(z)$ та каркас континуальних вузлів $x_i(z)$, $i = \overline{0,n}$ стають тотожними сталими, то ці І ІЛД переходять у інтерполяційні ланцюгові дроби для функції однієї змінної вигляду

$$Q_n^I(x) = F(x_0) + \underset{i=1}{\overset{n}{D}} \frac{q_i(x)}{1}, \tag{4}$$

де $q_1(x) = (x - x_0) F_{01}$; $q_2(x) = -\prod_{i=1}^{2} \frac{x - x_{i-1}}{x_2 - x_{i-1}} [1 - f_2]$;

$$\ldots; q_n(x) = -\prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_{i-1}}{x_n - x_{i-1}} [1 - f_n]; \tag{5}$$

$$f_2 = \frac{F_{01}}{F_{02}}; \ldots; f_k = \underset{i=1}{\overset{k}{D}} \frac{q_{k-i}(x_k)}{-1};$$

$$q_0(x_k) = F(x_0) - F(x_k) - 1; k = 3, 4, ..., n.$$

Тут використано позначення

$$F_{0k} = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0}, k = 1, 2, ...$$

Правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Ланцюговий дріб (4), (5) є інтерполяційним для функції $F(x) : [a,b] \to R^1$ з вузлами $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$.*

□ *Доведення.* Здійснюється безпосередньою перевіркою. ■

Функції $f(x)$ будемо інтерполювати на проміжку $\xi \in [0;1]$. За вузли інтерполяції візьмемо точки $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$.

Досліджуваний інтерполяційний ланцюговий дріб (4)–(5) матиме вигляд

$$Q_2^I(\xi) = F(x_0) + \frac{q_1(\xi)}{1 + q_2(\xi)},$$

де $q_1(\xi) = \frac{(\xi - x_0)}{x_1 - x_0}(F(x_1) - F(x_0))$,

$$q_2(\xi) = \frac{(\xi - x_0)(\xi - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{(x_2 - x_0)(F(x_1) - F(x_0))}{(x_1 - x_0) F(x_2) - F(x_0)}\right).$$

Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле другого порядку матиме вигляд

$$Tile_2(\xi) = F(x_0) + \frac{(\xi - x_0)}{r_1 + \frac{(\xi - x_1)}{(r_2 - F(x_0))}},$$

де $r_1 = \frac{(x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)}$,

$$r_2 = \frac{x_0 - x_2}{\frac{(x_1 - x_0)}{F(x_1) - F(x_0)} - \frac{(x_2 - x_1)}{F(x_2) - F(x_1)}} + F(x_1).$$

Уведемо позначення

а) $dQ = \left|Q_2^I(\xi) - f(\xi)\right|$ – похибка наближення функції $f(\xi)$ І ЛД (4), (5);

б) $dT = |Tile_2(\xi) - f(\xi)|$ – похибка наближення функції $f(\xi)$ І ЛД Тіле;

в) $dff = |ff(\xi) - f(\xi)|$ – похибка наближення функції $f(\xi)$ рядом Тейлора $ff(\xi)$ в точці 0.

Результати обчислень запишемо у таблиці. Функції записані у першому рядку.

Таблиця 1

Порівняння похибок

$F = tan(x)$			
ξ	dQ	dT	dff
0.10	0.64e-2	0.12e-1	0.3e-3
0.3	0.71e-2	0.17e-1	0.9e-2
0.45	0.21e-2	0.56e-2	0.3e-1
0.58	0.34e-2	0.1e-1	0.7e-1
0.82	0.94e-2	0.36e-1	0.25
0.9	0.77e-2	0.32e-1	0.36

Таблиця 2

Порівняння похибок

$F = tanh(x)$			
ξ	dQ	dT	dff
0.10	0.6e-2	0.12e-1	0.33e-3
0.3	0.68e-2	0.12e-1	0.87e-2
0.45	0.2e-2	0.3e-2	0.3e-1
0.58	0.3e-2	0.43e-2	0.6e-1
0.82	0.64e-2	0.83e-2	0.145
0.9	0.47e-2	0.59e-2	0.184

Таблиця 3

Порівняння похибок

$F = sin(x)$			
ξ	dQ	dT	dff
0.1	0.3e-2	0.81e-2	0.2e-3
0.3	0.3e-2	0.9e-2	0.5e-2
0.45	0.76e-3	0.26e-2	0.015
0.58	0.1e-2	0.4e-2	0.32
0.82	0.15e-2	0.93e-2	0.09
0.9	0.88e-3	0.7e-2	0.12

Таблиця 4

Порівняння похибок

$F = sinh(x)$			
ξ	dQ	dT	dff
0.1	0.3e-2	0.5e-2	0.2e-3
0.3	0.4e-2	0.54e-2	0.5e-2
0.45	0.13e-2	0.16e-2	0.015
0.58	0.0022	0.0026	0.033
0.82	0.0065	0.0063	0.095
0.9	0.0053	0.0048	0.13

Таблиця 5

Порівняння похибок

$F = 1 + cos(t)/(sin(t) - cos(t)/(sin(t) - cos(t)))$			
ξ	dQ	dT	dff
0.10	0.0455	0.0577	0.0036
0.3	0.055	0.07	0.077
0.45	0.018	0.023	0.226
0.58	0.034	0.041	0.43
0.82	0.1404	0.1617	1.093

Таблиця 6

Порівняння похибок

$F = 1 + sin(t)/(1 + tan(t) + sin(t)^2)$			
ξ	dQ	dT	dff
0.10	0.031	0.345	0.8e-4
0.3	0.025	0.077	0.0016
0.45	0.46e-2	0.13e-1	0.13e-1
0.58	0.4e-2	0.14e-1	0.37e-1
0.82	0.6e-3	0.2e-1	0.133
0.9	0.9e-3	0.14e-1	0.183
0.95	0.9e-3	0.8e-2	0.218

Висновки

На основі тестових прикладів можна відзначити, що досліджуваний інтерполяційний ланцюговий дріб (4)–(5) другого порядку наближає функції не гірше ніж інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле другого порядку та ряд Тейлора.

Література

[1] *Михальчук Б. Р.* Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів / Б. Р. Михальчук // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. № 3. – С. 364–375.

[2] *Макаров В. Л.* Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів / В. Л. Макаров, І. І. Демків // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 17–23.

[3] *Демків І. І.* Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, що не вимагають правила підстановки / І. І. Демків // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 4. – С. 125–132.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

Демкив И. И.

Национальный университет "Львивська политэхника"
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина

На тестовых примерах сравниваются приближения функции одной переменной с помощью полученных интерполяционных дробей, интерполяционных дробей Тиле и рядом Тейлора.

Ключевые слова: узлы интерполяции, континуальное множество узлов, функциональные дроби.

2000 MSC: 65D05, 65D15

УДК: 519.65

INTERPOLATION OF FUNCTIONS BY MEANS OF INTEGRAL CHAIN FRACTIONS

Demkiv I. I.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

Approximation of one variable functions with the help of the obtained interpolation fractions, Thiele interpolation fractions and Taylor series is compared. The test examples are provided.

Key words: interpolation knots, the set of continual knots, functional fractions.

2000 MSC: 65D05, 65D15

UDK: 519.65