

2. Величина стаціонарної амплітуди коливань із зростанням параметра ν зменшується, причому, амплітуда з часом спадає до стаціонарного значення у випадку $a_0 > a_{cm}$ і зростає у випадку $a_0 < a_{cm}$.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 2. Митропольский Ю.А. Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 3. Тарме М., Моут Л. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении: В кн. Тр. Американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – М.: Мир, 1969. – 36, № 1. – С. 87–98. 4. Моут М., Нэгюльсуорен Л. Теоретические и экспериментальные исследования вибраций ленточных пил: В кн. Тр. Американского общества инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. – М.: Мир, 1966. – 88, № 2. – С. 27–32. 5. Филимонов А.М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1976. – 12, № 11. – С. 2077–2084. 6. Сенник П.М. Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 1. – С. 23–26. 7. Сенник П.М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325–333. 8. Сокил Б.И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 6. – С. 803–805. 9. Сокил Б.И. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 55–58. 10. Ляшко І.І., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.

УДК 534.111

М.Б. Сокил

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩ І АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ЇХНЬОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

© Сокил М.Б., 2006

Досліджено вплив періодичних збурень на нелінійні коливання одновимірних середовищ, які характеризуються поздовжнім (обертальним) рухом. В основу досліджень покладено узагальнення методу Д'Аламбера для одного класу лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, які не допускають відокремлення змінних; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; асимптотичний метод КБМ. Розглянуто резонансний і нерезонансний випадки.

Explored influence of periodic indignations on the nonlinear vibrations of onedimensional environments which are characterized longitudinal (rotatory) motion. In basis of researches generalization of method of d'Alambert is fixed for one class of linear differential equalizations with equation in private derivative which shut out the separation of variables, principle of the unique vibrations in the nonlinear systems, asymptotyc method of KBM. Resonance and unresonance cases are examined.

Актуальність. Аналітичні методи дослідження коливних процесів, які існують в одно- чи багатовимірних лінійно і нелінійно пружних системах достатньо розроблені як у теоретичному, так і практичному відношенні (див., наприклад, [1–5]). Проблема значно ускладнюється, якщо система

додатково характеризується сталою чи змінною швидкістю руху (стрічки конвеєрних ліній, гнучкі пасові чи ремінні передачі, підвісні канатні дороги, установки при бурінні нафтових і газових свердловин тощо). Адаже для аналітичного дослідження навіть лінійних моделей вказаних систем не вдається застосувати такі класичні методи побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними, як метод Фур'є чи Д'Аламбера [6]. Тим не менше, нижче використовуючи основну ідею роботи [7], для нелінійних моделей наведених систем зроблено спробу узагальнити асимптотичний метод КБМ на випадок, коли вони піддаються дії зовнішнього періодичного збурення.

Рівняння руху і метод його дослідження. Математичною моделлю коливань одновимірного нелінійно пружного середовища, яке характеризується поздовжнім (обертальним) рухом, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2\beta u_{tx} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}, \theta), \theta = \mu t, \quad (1)$$

в якому $u(x, t)$ – переміщення перерізу середовища з координатою x у довільний момент часу t , β – лінійна (чи кутова) швидкість руху середовища (нижче для простоти будемо вважати, що вона є сталою), $f(u, u_t, u_x, u_{xx}, \theta)$ – відома аналітична 2π – періодична за θ функція, яка виражає апроксимацію нелінійних та періодичних сил середовища; α , μ і ε – сталі: α – виражається через фізико-механічні і кінематичні властивості середовища; μ – частота періодичного збурення; ε – малий параметр, який показує на малу величину нелінійних і періодичних сил середовища порівняно із лінійною складовою відновлюючих сил.

Для рівняння (1) розглядатимемо крайові умови вигляду

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$u_x(x, t)|_{x=0} = u_x(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

які узгоджуються з умовами відсутності переміщень середовища у двох фіксованих його точках (крайові умови (2)), чи відсутності зусилля у цих самих точках (крайові умови (3)).

Незважаючи на те, що для інтегрування незбуреного ($\varepsilon = 0$) рівняння, яке відповідає (1), не можна застосувати ні метод відокремлення змінних, ні метод Д'Аламбера, у [6] отримано його одночастотні розв'язки, які відповідають крайовим умовам (2) чи (3) у вигляді

$$u_0(x, t) = \frac{a}{2} (\cos(\kappa x + \psi) - \cos(\chi x - \psi)), \quad (4)$$

$$u_0(x, t) = \frac{a}{2} \left(\cos(\kappa x + \psi) - \frac{\kappa}{\chi} \cos(\chi x - \psi) \right) \quad (5)$$

де $\psi = \omega t + \varphi$; χ, κ, ω – сталі: a – амплітудний параметр; φ – фаза; $\kappa = \frac{k\pi}{2l} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)$,

$$\chi = \frac{k\pi}{2l} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right), \quad \omega = \frac{k\pi}{2l} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Сталі χ, κ мають назву хвильових чисел прямої і зворотної (відбитої) хвиль, ω – їх частотою. Отже, стала швидкість руху середовища приводить до спадання частоти власних коливань лінійної моделі середовища. Для визначення впливу нелінійних і періодичних сил на колильний процес знайдемо розв'язок збуреного рівняння. Використовуючи загальну ідею методу КБМ, розв'язок вказаного рівняння за крайових умов (2) чи (3) у формі, близькій до головної ($k = 1$) форми незбуреної системи, шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x, t) = u_0(x, \psi) + \varepsilon U_1(a, x, \psi, \theta) + \varepsilon^2 U_2(a, x, \psi, \theta) + \dots, \quad (6)$$

де $U_i(a, x, \psi, \theta)$ – невідомі періодичні за ψ і θ функціями, що задовольняють умови, які випливають із (2) чи (3), тобто відповідно

$$U_i(a, x, \psi, \theta)|_{x=0} = U_i(a, x, \psi, \theta)|_{x=l} = 0, \quad (7)$$

або

$$U_{ix}(a, x, \psi, \theta)|_{x=0} = U_{ix}(a, x, \psi, \theta)|_{x=l} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Крім цього, наявність нелінійних та періодичних сил у системі приводить до того, що амплітуда та період коливань змінюються з часом. Отже, параметри a і ψ у асимптотичному представленні (6) є невідомими функціями часу, причому закони їх зміни суттєво залежать від співвідношення між частотою власних коливань (ω) і змущувальної (μ) сили. У зв'язку із вказаним для системи, яка описується рівнянням (1), розглядатимемо два випадки: *нерезонансний* ($m\omega \neq n\mu$, m, n – взаємно прості числа) і *резонансний* ($m\omega = n\mu$). У нерезонансному випадку амплітуда та фаза коливань зв'язані диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots; \end{aligned} \quad (9)$$

у випадку ж головного резонансу ($n = m = 1$), який нижче розглядатимемо

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a, \gamma) + \varepsilon^2 A_2(a, \gamma) + \dots, \\ \dot{\gamma} &= \omega - \mu + \varepsilon B_1(a, \gamma) + \varepsilon^2 B_2(a, \gamma) + \dots, \quad \gamma = \psi - \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Праві частини диференціальних рівнянь (9), (10) визначаються так, щоб асимптотичне представлення (6) задовольняло з необхідним ступенем точності вихідне рівняння (1), якщо у нього на місце a і ψ підставити функції часу визначені наведеними вище співвідношеннями. Перейдемо до визначення цих функцій, а також функцій, які визначаються самим асимптотичним представленням (6), тобто $U_i(a, x, \psi, \theta)$. Для цього диференціюючи за часом і лінійною змінною залежність (6), з врахуванням (9) чи (10), із рівняння (1) отримуємо диференціальні залежності, які зв'язують шукані функції у вигляді:

$$L(U_i) = f_i(a, x, \psi, \theta) + \rho(x, \psi)A_i(a) + ah(x, \psi)B_i(a) \quad (11)$$

для нерезонансного випадку і

$$\begin{aligned} L(U_i) &= f_i(a, x, \psi, \theta) + \rho(x, \psi)A_i(a, \varphi) + ah(x, \psi)B_i(a, \varphi) + \\ &+ \left[\wp(x, \psi) \frac{\partial A_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} + ah(x, \psi) \frac{\partial B_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} \right] (\omega - \mu) \end{aligned} \quad (12)$$

для резонансного випадку, де

$$\begin{aligned} L(U_i) &= \omega^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta^2} \mu^2 + 2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta \partial \psi} \mu \omega + 2\beta \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi \partial x} \omega + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta \partial x} \mu \right) - \alpha^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}, \\ f_1(a, x, \psi) &= f\langle u_0, \theta \rangle = f(u_0(x, \psi), u_{0t}(x, \psi), u_{0x}(x, \psi), u_{0xx}(x, \psi), \theta), \\ f_2(a, x, \psi) &= f'_u \langle u_0, \theta \rangle U_1(a, x, \psi, \theta) + f'_{u_t} \langle u_0, \theta \rangle \left[\frac{\partial U_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \mu \right] + f'_{u_x} \langle u_0, \theta \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x} + f'_{u_{xx}} \langle u_0, \theta \rangle \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \rho(x, \psi) &= 2[(\omega + \kappa\beta)\sin(\kappa x + \psi) + (\omega - \chi\beta)\sin(\chi x - \psi)], \\ h(x, \psi) &= 2[(\omega + \kappa\beta)\cos(\kappa x + \psi) - (\beta\chi - \omega)\cos(\chi x - \psi)], \\ \wp(x, \psi) &= -[\cos(\kappa x + \psi) + \cos(\chi x - \psi)], \quad \tilde{h}(x, \psi) = \sin(\kappa x + \psi) - \sin(\chi x - \psi) \end{aligned}$$

для крайових умов (2) і

$$\rho(x, \psi) = 2(\omega + \kappa\beta)\sin(\kappa x + \psi) + 2\kappa \left(\beta - \frac{\omega}{\chi} \right) \sin(\chi x - \psi),$$

$$h(x, \psi) = 2(\omega + \kappa\beta)\cos(\kappa x + \psi) - 2\kappa\left(V - \frac{\omega}{\chi}\right)\cos(\chi x - \psi),$$

$$\wp(x, \psi) = -\left[\cos(\kappa x + \psi) + \frac{\kappa}{\chi}\cos(\chi x - \psi)\right], \quad \tilde{h}(x, \psi) = \sin(\kappa x + \psi) - \frac{\kappa}{\chi}\sin(\chi x - \psi) -$$

для крайових умов (3).

Для однозначного визначення правих частин диференціальних рівнянь (9) чи (10), тобто функцій, які визначають закони зміни амплітуди і частоти коливань середовища, накладемо на функції $U_i(a, x, \psi, \theta)$ додаткові умови – умови відсутності у їх розкладах доданків пропорційних $u_0(x, \psi)$ і $u_{0t}(x, \psi)$. Це дає змогу отримати у *нерезонансному випадку* систему алгебраїчних рівнянь, які визначають закони зміни амплітудного параметру a і фази коливань ψ динамічного процесу у формі близькій до головної форми незбуреної системи у вигляді

$$\bar{\rho}A_i(a) + a\bar{h}B_i(a) = -\frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \psi, \theta) u_0(a, \psi) d\psi d\theta dx,$$

$$\tilde{\rho}A_i(a) + a\tilde{h}B_i(a) = -\frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \psi, \theta) u_{0t}(a, \psi) d\psi d\theta dx, \quad (13)$$

де

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho(x, \psi) u_0(a, \psi) d\psi dx, \quad \bar{h} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l h(x, \psi) u_0(a, \psi) d\psi dx,$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho(x, \psi) u_{0t}(a, \psi) d\psi dx, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l h(x, \psi) u_{0t}(a, \psi) d\psi dx. \quad (14)$$

Для визначення невідомої функції $U_i(a, x, \psi, \theta)$ подамо її, а також відомі функції $f_i(a, x, \psi, \theta)$ у вигляді рядів

$$U_i(a, x, \psi, \theta) = \sum_{\substack{k \\ k \neq 1}} \sum_{\substack{m \\ m \neq 1}} \sum_n U_{ikmn}(a) X_k(x) \exp(im\psi) \exp(in\theta),$$

$$f_i(a, x, \psi, \theta) = \sum_{\substack{k \\ k \neq 1}} \sum_{\substack{m \\ m \neq 1}} \sum_n f_{ikmn}(a) X_k(x) \exp(im\psi) \exp(in\theta), \quad (15)$$

де $U_{ikmn}(a)$ – шукані коефіцієнти розкладу функції $U_i(a, x, \psi, \theta)$, $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x$ – для крайових умов (7) і $X_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l} x$ – для крайових умов (8), а відомі коефіцієнти $f_{ikmn}(a)$ визначаються співвідношеннями

$$f_{ikmn}(a) = \frac{1}{\pi^2 l} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(a, x, \psi, \theta) X_k(x) \exp(-in\theta) \exp(-im\psi) dx d\psi d\theta. \quad (16)$$

Підставляючи (15), (16) в (11), з врахуванням умов накладених на функції $U_i(a, x, \psi, \theta)$, отримуємо коефіцієнти її розкладу у вигляді

$$U_{ikmn}(a) = \frac{f_{ikmn}(a)}{2\beta k i(m\omega + n\mu) - m^2 \omega^2 - n^2 \mu^2}. \quad (17)$$

Що стосується резонансного випадку, то із врахуванням умов накладених на функції $U_i(a, x, \psi, \theta)$, а також того, що у випадку головного резонансу $\psi = \theta + \gamma$, із (12) отримуємо залежності, які визначають закони зміни амплітуди і різниці фаз у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\rho} A_i(a, \varphi) + a \bar{h} B_i(a, \varphi) + \left[\frac{\bar{\rho}}{\varphi} \frac{\partial A_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} + a \bar{h} \frac{\partial B_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} \right] (\omega - \mu) = \\ = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \gamma + \theta, \theta) u_0(a, \gamma + \theta) d\theta dx, \\ \tilde{\rho} A_i(a, \varphi) + a \tilde{h} B_i(a, \varphi) + \left[\frac{\tilde{\rho}}{\varphi} \frac{\partial A_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} + a \tilde{h} \frac{\partial B_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} \right] (\omega - \mu) = \\ = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \gamma + \theta, \theta) u_{0t}(a, \gamma + \theta) d\theta dx, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\rho} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho(x, \psi) u_0(a, \psi) d\psi dx, \quad \bar{h} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l h(x, \psi) u_0(a, \psi) d\psi dx, \\ \tilde{\rho} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho(x, \psi) u_{0t}(a, \psi) d\psi dx, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^l h(x, \psi) u_{0t}(a, \psi) d\psi dx. \end{aligned}$$

Висновки. Викладена у статті методика дозволяє досліджувати коливні процеси широкого спектра рухомих одновимірних систем, які характеризуються позовжнім (обертальним) рухом. Вона показує, що навіть стала швидкість руху лінійно пружного середовища приводить до: а) зміни довжини відбитої хвилі порівняно із її прямим аналогом; б) до зменшення частоти власних коливань системи. Останнє особливо актуальне у разі дослідження резонансних явищ як в лінійно, так і в нелінійно пружних системах. Достовірність отриманих результатів підтверджується граничним переходом $\beta \rightarrow 0$, за якого основні розрахункові формули збігаються із результатами, що стосуються коливань одновимірних нелінійно пружних середовищ [5].

1. Гацук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 2. Горошко О.А., Савин Г.Н. Ведение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – К.: Наукова думка, 1972. – 224 с. 3. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С. 18–24. 4. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с. 5. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с. 7. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'аламбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. пр. – Львів, 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67.