УДК 621.372.5

А.Ю. Воробкевич
Національний університет “Львівська політехніка”

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНИХ МАТРИЦЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМПОНЕНТНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Для розв'язування нелінійної системи компонентних рівнянь електричного кола із заданою структурою використано подібні матриці, які формуються за допомогою ортогональних матриць Хаусхолдера.

In order to solve nonlinear system of component equations of electrical circuit with given structure the similar matrices formed by Householder's orthogonal matrices are used.

Постановка проблеми в загальному вигляді. При синтезі лінійного пасивного багатополюсника із заданою структурою, що передбачає всередині нього наявність багатьох зворотних зв'язків, необхідно розв'язати систему нелінійних компонентних рівнянь, невідомими якої є параметри елементів багатополюсника. Система компонентних рівнянь формується на основі заданої операторної матриці схемних функцій багатополюсника. Розв'язання такої системи нелінійних рівнянь загальними числовими методами вимагає багато машинного часу і пов'язане з проблемами стійкості методів та наявності локальних мінімумів. Тому аналогічну задачу частіше розв'язують різноманітними методами реалізації багатополюсників [1–5]. Однак більшість з цих методів обмежує внутрішню структуру багатополюсника та приводить до появи надлишкової кількості елементів кола та внутрішніх вузлів. Тому актуальним є пошук способів зменшення кількості вузлів та усунення обмежень внутрішньої структури багатополюсника.

Аналіз останніх досліджень. Серед відомих методів метод [5] дає можливість для RC – кіл використовувати мінімальну кількість внутрішніх вузлів, зводить задачу синтезу до розв'язання n систем недоозначених лінійних рівнянь, де n – кількість небазисних полюсів багатополюсника, який не має електрично відокремлених частин. При цьому всі внутрішні вузли та базисний полюс з'єднані між собою резисторами, а кожний внутрішній вузол з'єднується з базисним полюсом конденсатором. При значній кількості внутрішніх вузлів за цим методом складно забезпечити додатні значення опорів резисторів між всіма внутрішніми вузлами та базисним полюсом.

Формулювання цілей статті. Метою цієї публікації є модифікація методу [5], яка забезпечує додатні значення опорів резисторів між всіма внутрішніми вузлами та базисним полюсом, та пристосування цього методу до розв'язання системи компонентних рівнянь багатополюсника із заданою структурою з'єднань між його внутрішніми вузлами та небазисними полюсами.

Виклад основного матеріалу дослідження. Система компонентних рівнянь підсхеми електричного кола як пасивного *RC*-багатополюсника з одним каналом складається за заданою реалізовною пасивними *RC*-елементами матрицею провідностей $\mathrm{Y(p)}$ з операторними дробово-раціональними елементами, які мають спільний поліноміальний знаменник,

$$\mathrm{Y(p) = A(p) / B(p)}, \tag{1}$$

причому

$$A_{ij}(p)=\sum_{k=0}^{q+1} a_{ijk}p^k; \qquad B(p)=\sum_{k=0}^{q} b_k p^k, \tag{2}$$

де $A_{ij}(p)$ – чисельники елементів $Y_{ij}(p)$ матриці $Y(p)$ розміром $n\times n$; $B(p)$ – спільний поліноміальний знаменник елементів $Y_{ij}(p)$, в якому $b_q=1$, $b_0\neq 0$; n – кількість небазисних полюсів багатополюсника, $n+1$-й полюс якого є базисним.

Будемо складати систему компонентних рівнянь для пасивного резистивно-ємнісного багатополюсника, для якого корені полінома $B(p)$ дійсні, від'ємні та прості. Для багатополюсника найменша кількість вузлів дорівнює $n+q+1$, з яких q вузлів – внутрішні. Провідності $Y_{st}=pC_{st}+G_{st}$ між будь-якими двома вузлами відповідають умові $C_{st}=C_{ts}\geq 0$, $G_{st}=G_{ts}\geq 0$.

Кожний з коефіцієнтів a_{ijk} та b_k можна виразити через суми $d_{ijk}p^k$ і d_kp^k величин прадерев відповідно перетвореного мультиграфа провідностей багатополюсника [6]. Відповідно до того система компонентних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned} d_{ijk}&=a_{ijk}, \quad 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n,\\ d_k&=a_k, \end{aligned} \tag{3}$$

Якщо якийсь з коефіцієнтів $a_{ijk}=0$, то для нього компонентне рівняння не складається, бо в цьому випадку для пасивних RC-кіл відсутні відповідні прадерева.

Якщо матрицю $Y_B(p)$ багатополюсника, складену за методом вузлових напруг, розподілити на блоки

$$Y_B(p)=\begin{bmatrix} Y_{PP}(p) & Y_{PV}(p)\\ Y_{VP}(p) & Y_{VV}(p)\end{bmatrix}, \tag{4}$$

де рядки блоків Y_{PP} і Y_{PV} та стовпці блоків Y_{PP} і Y_{VP} відповідають n небазисним полюсам, а рядки блоків Y_{VP} і Y_{VV} та стовпці блоків Y_{PV} і Y_{VV} – q внутрішнім вузлам, то ця матриця буде зв'язана з матрицею $Y(p)$ залежністю.

$$Y(p)=Y_{PP}(p)-Y_{PV}(p)Y_{VV}^{-1}(p)Y_{VP}(p), \tag{5}$$

Згідно з [5] використаємо матрицю G_{VV}, подібну до матриці

$$Y_g=\mathrm{diag}(-p_1,\dots,-p_r,\dots,-p_q), \tag{6}$$

де p_r – корінь полінома $B(p)$, причому $|p_r|<|p_{r+1}|$.

Подібні матриці мають однакові детермінанти і взаємозв'язані співвідношенням [7]

$$G_{VV}=PY_gP^{-1} \tag{7}$$

Замість використаних у [5] як матриця P ортогональних матриць обертання H та похідних від них матриць, застосуємо симетричні ортогональні матриці відбиття Хаусхолдера H_h [7]. Тоді

$$G_{VV}=H_hY_gH_h. \tag{8}$$

Матриця H_h утворюється так:

$$H_h = E - 2WW_t, \tag{9}$$

де E – одинична матриця; W – довільний дійсний нормований вектор-стовпець.

Для забезпечення гіпердомінантності матриці G_{VV} формуємо транспонований вектор-стовпець W_t таким способом:

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{1}{-p_1 a}, \frac{1}{-p_2 a^2}, \cdots, \frac{1}{-p_r a^r}, \cdots, \frac{1}{-p_q a^q}\right), \tag{10}$$

де a – дійсний параметр, причому $a \geq 1$;

$$N = \frac{1}{p_1^2 a^2} + \frac{1}{p_2^2 a^4} + \cdots + \frac{1}{p_r^2 a^{2r}} + \cdots + \frac{1}{p_q^2 a^{2q}}. \tag{11}$$

Після алгебраїчних перетворень з урахуванням виразів (8)–(11) матриця G_{VV} набуває вигляду

$$G_{VV} = Y_g - M = \mathrm{diag}(-p_1, -p_2, \cdots, -p_q) -$$

$$-\frac{2}{N}\begin{Vmatrix} \frac{-2p_1 - 2D}{p_1^2 a^2} & \frac{-p_1 - p_2 - 2D}{p_1 p_2 a^3} & \cdots & \frac{-p_1 - p_q - 2D}{p_1 p_q a^{1+q}} \\ \frac{-p_1 - p_2 - 2D}{p_1 p_2 a^3} & \frac{-2p_2 - 2D}{p_2^2 a^4} & \cdots & \frac{-p_2 - p_q - 2D}{p_2 p_q a^{2+q}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-p_1 - p_q - 2D}{p_1 p_q a^{1+q}} & \frac{-p_2 - p_q - 2D}{p_2 p_q a^{2+q}} & \cdots & \frac{-2p_q - 2D}{p_q^2 a^{2q}} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

де

$$D = -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{p_1 a^2} + \frac{1}{p_2 a^4} + \cdots + \frac{1}{p_r a^{2r}} + \cdots + \frac{1}{p_q a^{2q}}\right). \tag{13}$$

Вираз D при збільшенні параметра a до нескінченності з урахуванням виразів (11) та (13) прямує до величини (- p_1). Тому можна завжди добитися, збільшуючи параметр a, додатного значення елемента m_{12} матриці M при будь-яких значеннях різних від'ємних коренів p_1 і p_2, враховуючи, що $|p_1| \leq |p_2|$ згідно з умовою виразу (6). З виразу (12) випливає, що відповідно до цієї ж умови всі недіагональні елементи матриці M будуть при цьому більші за елемент m_{12}, тобто додатні. Відповідно до цього всі недіагональні елементи матриці G_{VV} будуть від'ємні.

Аналіз сум усіх елементів кожного рядка матриці M показує, що при збільшенні параметра a до нескінченності ці суми прямують до нуля. А для забезпечення гіпердомінантності матриці G_{VV} необхідно, щоб для r-го рядка така сума була б менша за $(-p_r)$. Отже, збільшенням параметра a завжди можна забезпечити обидві умови гіпердомінантності матриці G_{VV}.

Оскільки матриця $Y_{VV}(p)$ зв'язана з матрицею G_{VV} залежністю

$$Y_{VV}(p) = pE + G_{VV}, \tag{14}$$

де для обох матричних доданків виконуються умови гіпердомінантності, то матриця $Y_{VV}(p)$ буде реалізовною пасивними *RC*-елементами. На її основі визначаються невідомі значення опорів, що з'єднують між собою внутрішні вузли багатополюсника [4], які є частиною невідомих системи рівнянь (3).

Згідно з [5] елементи матриць з виразу (5)

$$Y_{PV}(p) = (Y_{VP}(p))_t = pC_{PV} + G_{PV} \tag{15}$$

для пасивного кола можна визначити з такої системи лінійних рівнянь:

$$-\left(p_r C_{PV} + G_{PV}\right) H_h S_{Dr} = S_r, \quad r = 1,\dots,q; \tag{16}$$

де H_h – ортогональна матриця Хаусхолдера; S_{Dr} – матриця-стовпець, що містить r-й елемент, який дорівнює 1 або -1, а інші її елементи – нулі; S_r – матриця-стовпець дійсних чисел як результат розкладу на множники симетричної матриці K_r рангу 1, що є матрицею лишків заданої матриці $Y(p)$ для r-го кореня полінома $B(p)$.

Система лінійних рівнянь (16) містить nq рівнянь і розпадається на n незалежних систем лінійних рівнянь, що складаються з q рівнянь з невідомими ємностями та провідностями. Якщо загальна кількість елементів (резисторів і конденсаторів) n_s, що з'єднують внутрішні вузли кола з s-м небазисним полюсом дорівнює q, то така незалежна система рівнянь s-го небазисного полюса є звичайною системою лінійних рівнянь. Якщо ж $q \le n_s \le 2q$, то така система є недоозначеною системою лінійних рівнянь, яку можна перетворити у систему лінійних нерівностей з вимогами позитивності значень невідомих ємностей і провідностей і, розв'язавши її, отримати фізично реалізовний багатолюсник. Елементи матриці $Y_{PP}(p)$ з виразу (4) визначаються за алгоритмом [4]. Отже, так визначаються всі невідомі системи нелінійних компонентних рівнянь (3).

Слід зауважити, що для матриці $Y(p)$, яка відповідає загальним умовам реалізовності пасивними RC-елементами, не завжди при заданій структурі багатополюсника можна отримати додатні значення невідомих системи (3), що відповідають елементам, які з'єднують внутрішні вузли з полюсами. У цьому випадку можна змінити значення параметра a або структуру багатополюсника.

Приклад розв'язування системи нелінійних компонентних рівнянь. Нехай задана структура пасивного *RC*-триполюсника з небазисними полюсами 1,2, базисним полюсом 6 та трьома внутрішніми вузлами 3, 4, 5. та його нормалізована матриця $Y(p)$. Усі вітки триполюсника містять або один резистор, або один конденсатор. Згідно з заданою структурою ненульові значення мають ємності конденсаторів $C_{12}, C_{13}, C_{16}, C_{23}, C_{25}, C_{26}, C_{36}$, C_{46}, C_{56} та провідності резисторів $G_{12}, G_{13}, G_{15}, G_{16}, G_{24}, G_{25}, G_{26}, G_{34}, G_{35}, G_{36}, G_{45}$, G_{46}, G_{56}. Така структура відповідає її обмеженням, вказаним у [5] та в поясненнях до виразу (16). Задана матриця $Y(p)$ має вигляд

$$Y(p) = A(p)/B(p) = 1/(p^3 + 102{,}1p^2 + 211{,}1p + 110)\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} 0,3213930567p^4+44,90719761p^3+ & -(0,1296317616p^4+18,32166457p^3 \\ +1202,191289p^2+2376,697378p+ & +352,4941468p^2+679,8389587p+ \\ +1219,035234 & +345,7351369) \\ -(0,1296317616p^4+18,32166457p^3+ & 0,6550426818p^4+89,02781112p^3+ \\ +352,4941468p^2+679,8389587p+ & +2023,454056p^2+3921,314868p+ \\ +345,7351369) & +1985,539826 \end{Vmatrix}. \quad (17)$$

Корені полінома $B(p)$ мають значення

$$p_1=-1;\ p_2=-1,1;\ p_3=-100. \quad (18)$$

Система компонентних рівнянь (3) для цього прикладу складається з 19 рівнянь і має 22 наведених вище невідомих C_{st} та G_{st}. Наприклад, рівняння, відповідне коефіцієнту a_{114} матриці $A(p)$, має вигляд

$$C_{46}(C_{26}+C_{56})(C_{13}(C_{23}+C_{36})+(C_{12}+C_{16})(C_{13}+C_{23}+C_{36}))=0,3213930567. \quad (19)$$

Матриці-стовпці S_r з виразу (16), зв'язані з матрицями лишків K_r матриці $Y(p)$ залежністю $K_r=-S_r(S_r)_t$, мають такий вигляд:

$$S_1=(0,07566494166,\quad 0,2647133182)_t;\quad S_2=(0,04339912976,\quad -0,5448481617)_t;$$
$$S_3=(-10,01693856,\qquad 19,38464742\ )_t; \quad (20)$$

Сформуємо ортогональну матрицю H_h згідно з виразами (9)-(11), використавши у виразі (10) параметр $a=2$,

$$H=\begin{Vmatrix} -0,657525658 & -0,753420753 & -0,00414381413 \\ -0,753420753 & 0,657536021 & -0,00188355187 \\ -0,00414381413 & -0,00188355187 & 0,9999896404646 \end{Vmatrix}. \quad (21)$$

Матриця $Y_{VV}(p)$ матиме згідно з виразами (12)–(14) вигляд

$$Y_{VV}(p)=\begin{Vmatrix} p+1,05846423178 & -0,04876742468 & -0,4100914405 \\ -0,04876742468 & p+1,04358659083 & -0,1865935554 \\ -0,4100914405 & -0,1865935554 & p+99,997949177396 \end{Vmatrix}. \quad (22)$$

З виразу (22) визначаються значення невідомих G_{34}, G_{35}, G_{45} з системи рівнянь (3)

$$G_{34}=-Y_{VV12}=0,04876742468;\quad G_{35}=-Y_{VV13}=0,4100914405; \quad (23)$$
$$G_{45}=-Y_{VV23}=0,1865935554.$$

Якщо прийняти значення параметра а=1, то елемент Y_{VV12} буде додатним і відповідно значення G_{34} від'ємним.

Добутки H_hS_{Dr} у виразі (19) є стовпцями матриці H_h. Система з $q=3$ рівнянь з 3 невідомими ємностями та провідностями, що з’єднують внутрішні вузли з полюсом 1, виділена з системи рівнянь (16), має вигляд

$$\begin{aligned} -0,657525658\,C_{13}+0,657525658\,G_{13}+0,00414381413\,G_{15}&=0,07566494166 \\ -0,8287628283\,C_{13}+0,753420753\,G_{13}+0,00188355187\,G_{15}&=0,04339912976 \\ -0,414381413\,C_{13}+0,00414381413\,G_{13}-0,9999896404646\,G_{15}&=-10,01693856. \end{aligned} \quad (24)$$

Розв'язками цієї системи рівнянь є значення невідомих системи рівнянь (3)

$$C_{13} = 0,196927; \quad G_{13} = 0,2493813; \quad G_{15} = 9,936472. \tag{25}$$

Система з $q = 3$ рівнянь з 4 невідомими ємностями та провідностями, що з'єднують внутрішні вузли з полюсом 2, виділена з системи рівнянь (16), має вигляд

$$\begin{gathered}
-0,657525658\,C_{23} + 0,753420753\,G_{24} - \\
-0,00414381413\,C_{25} + 0,00414381413\,G_{25} = 0,2647133182 \\
-0,8287628283\,C_{23} - 0,657536021\,G_{24} - \\
-0,002071907057\,C_{25} + 0,00188355187\,G_{25} = -0,5448481617 \\
-0,414381413\,C_{23} + 0,00188355187\,G_{24} + \\
+99,99896404646\,C_{25} - 0,9999896404646\,G_{25} = 19,38464742.
\end{gathered} \tag{26}$$

Ця система задовольняється при значеннях невідомих

$$C_{23} = 0,3012263; \quad G_{24} = 0,5054816; \quad C_{25} = 0,3967884; \quad G_{25} = 20,17012. \tag{27}$$

Решта невідомих системи компонентних рівнянь (3) визначаються за методикою [4] за допомогою нескладних формул і мають значення

$$\begin{array}{llll}
C_{12} = 0,07031217; & C_{16} = 0,09293413; & C_{26} = 0,13489413; & C_{36} = 0,5018467; \\
C_{46} = 1,0; & C_{56} = 0,6032116; & G_{12} = 1,099222; & G_{16} = 0,8650547; \\
G_{26} = 0,6378564; & G_{36} = 0,3502241; & G_{46} = 0,302744; & G_{56} = 69,2946722.
\end{array} \tag{28}$$

Висновки. Використання для розв'язання системи компонентних рівнянь подібних матриць і ортогональних матриць Хаусхолдера дозволяє за допомогою нескладного алгоритму забезпечити гіпердомінантність поліноміальної матриці $Y_{VV}(p)$ для будь-якої кількості внутрішніх вузлів та полюсів RC-багатополюсника, а, отже, для його структур з безпосередніми резистивними сполученнями між усіма внутрішніми вузлами гарантує додатні значення опорів таких резисторів. Застосування ортогональних матриць Хаусхолдера також спрощує етап формування поліноміальної матриці $Y_{VV}(p)$, усуває етапи її обертання та знаходження матриць лишків оберненої поліноміальної матриці Y_{VV}^{-1}.

1. Newcomb R. Linearis multiport synthesis. – N.Y., 1966. – 397 p. 2. Остапенко А.Г. Анализ и синтез линейных радиоэлектронных цепей с помощью графов. – М., 1985. – 280 с. 3. Ионкин П.А., Максимович Н.Г., Миронов В.Г. и др. Синтез линейных электрических и электронных цепей. – Львов, 1982. – 226 с. 4. Воробкевич А.Ю. Реалізація макромоделі багатополюсника резистивно-ємнісною схемою з мінімальною кількістю вузлів // Теоретична електротехніка. – 1996. – Вип. 53. – С. 23–29. 5. Воробкевич А. Використання подібних матриць для реалізації резистивно-ємнісних макромоделей багатополюсників // Доп. спільної українсько-польської школи семінару "Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика". – Алушта, 2001. – С. 109–112. 6. Блажкевич Б.И., Воробкевич А.Ю. Применение булевой алгебры для синтеза трехполюсника по четырем независимым параметрам // Отбор и передача информации. – 1976. – Вып. 49. – С. 27–34. 7. Воеводин В.В., Кузнецов А.Ю. Матрицы и вычисления. – М., 1984. – 320 с.