

УДК 623.644

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ УСТАНОВИ СПЕЦІАЛЬНИМИ КАРТАМИ, ЩО ВИГОТОВЛЯЮТЬСЯ ЗАВЧАСНО

Р. Савчук

Національний університет оборони України

Ключові слова: математична модель, спеціальні карти, показники надійності, склади топографічних карт.

Постановка проблеми

Потреба підрозділів у постійному і об'єктивному визначенні та отриманні топогеодезичних даних для ефективнішого планування, застосування техніки, підвищення вимог до оперативності, точності та надійності визначення топогеодезичної інформації, які зумовлені високою динамікою сьогодення, розвитком високоточних комплексів і систем, змінами їхніх тактико-технічних характеристик і розширенням можливостей, упровадженням автоматизованих систем управління, потребою оперативного реагування на зміну обстановки визначають необхідність удосконалення системи забезпечення спеціальними картами.

Виконання завдань топогеодезичного забезпечення свідчить про необхідність підвищення ефективності функціонування наявної системи забезпечення спеціальними картами [1].

Виникає невідповідність між збільшенням обсягу і розширенням переліку специфічних завдань, які постають перед системою забезпечення спеціальними картами в нових умовах, та неповним використанням її можливостей. Необхідно розробити математичну модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно, для визначення надійності системи

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Аналіз літератури, останніх досліджень та публікацій з питань удосконалення системи забезпечення спеціальними картами в провідних країнах світу, завдань топогеодезичного забезпечення та вимог до топогеодезичного забезпечення показав, що сучасні принципи організації системи забезпечення спеціальними картами в нашій державі впроваджуються недостатньо ефективно [1, 2]. Не розроблена математична модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно.

Постановка завдання

Мета статті – розробити математичну модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно.

Виклад основного матеріалу проблеми

Побудова математичної моделі, тобто формалізація опису системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно, зводиться до опису її мовою математики. В загальному вигляді поліноміальна модель системи така:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2 + \Theta_3 x_3 + \Theta_4 x_1 x_2 + \Theta_5 x_1 x_3 + \Theta_6 x_2 x_3 + \Theta_7 x_1 x_2 x_3, \quad (1)$$

або

$$W(x_1, x_2, x_3) = -0,0253 + 0,0587x_1 + 0,0013x_2 + 0,0042x_3 - 0,0027x_1x_2 - 0,0098x_1x_3 - 0,0002x_2x_3 + 0,0338x_1x_2x_3, \quad (2)$$

де x_1 – обсяг одного поповнення спеціальними картами установи; x_2 – чисельність особового складу, причетного до набирання спеціальних карт; x_3 – кількість автомобілів, які виділені для доставки спеціальних карт у війська.

Критерій надійності системи

Оцінка ефективності будь-якої системи виконується за допомогою векторного критерію $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, який є показником якості роботи системи. Складовими вектора W можуть бути час доставки вантажів W_1 , вірогідність виконання задачі W_2 тощо.

Крім ефективності, система характеризується деякими показниками надійності, які поділяються на два типи.

Технічні показники надійності. Це показники, які пов'язані з параметрами системи, вони характеризують переходи системи з одного стану в інший і безпосередньо не стосуються кінцевих результатів роботи. Наприклад, такими показниками є інтенсивність відмов або інтенсивність відновлення елементів системи.

Оперативні показники надійності. Такими вважають показники, які характеризують вплив певного стану на кінцевий ефект, тобто на критерій системи. До них належать, наприклад, вірогідність безвідмовної роботи системи.

Будь-яка система характеризується вектором параметрів $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$, який належить деякій множині X і визначає стан системи. В простому випадку це параметри, які визначають наявність та працездатність елементів системи. Внаслідок виходу елементів зі строю або їх відновлення параметри змінюються у часі t , тобто відбувається випадковий процес зміни станів $X(t)$, який має назву траєкторії систем.

Множину станів позначимо:

$$\{g\} = G,$$

де g – траєкторії процесу зміни станів. Повний працездатності системи відповідає деяка траєкторія, яку позначимо g_0 .

Крім параметрів, пов'язаних з надійністю системи, існують параметри $y \in Y$ зовнішніх факторів: характеристики погодних умов, місцевості, особливості району виконання завдань тощо. Вони також можуть змінюватися у часі, утворюючи подібні траєкторії $y(t)$, які належать множині $Y (y \in Y)$.

Так, у загальному вигляді ефективність системи залежить від параметрів системи, а також від інших зовнішніх факторів, тобто

$$W(t) = W(x(t), y(t)). \quad (3)$$

За деяких нежорстких обмежень функцію $W(x(t), y(t))$ можливо подати у вигляді множини, виділивши як помножувач номінальну ефективність системи W_0 , тобто узагальнену ефективність системи за її повної працездатності.

Номінальна ефективність системи W_0 не залежить від надійності, тому що вона визначена для стану «абсолютної надійності» (повної працездатності системи):

$$W(x, y) = R(x, y)W_0(y), \quad (4)$$

$$\text{або} \quad R(x, y) = \frac{W(x, y)}{W_0(y)} = K_{ef}, \quad (5)$$

де K_{ef} – коефіцієнт збереження ефективності.

У теорії надійності цей коефіцієнт розглядається як показник оперативної надійності системи. Він має чіткий фізичний сенс – показує, яка частина номінальної ефективності системи зберігається у разі виходу з ладу якихось її елементів, що характеризують працездатність. Оскільки найбільша ефективність системи спостерігається, якщо $W = W_0$, то вочевидь, що $0 \leq K_{ef} \leq 1$.

Якщо ефективність системи оцінюється за вірогідністю виконання нею визначеної задачі, то K_{ef} набуває сенсу вірогідності того, що виконання завдання не буде зірваним через відмови. Оцінюючи систему забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно, її надійність визначають як вірогідність забезпечення своєчасного передавання до установи спеціальних карт.

Доведемо, що прийнятий у теорії надійності коефіцієнт збереження ефективності відповідає наведеному визначенню.

Так, B – множина задач, які виконує система; якщо її працездатність максимальна, тобто реалізована траєкторія g_0 ; тоді буде виконано B_0 задач $b \in B_0$. Ефективність такої системи можна визначити як вірогідність того, що деяка задача b належить множині B , тобто $W = p\{b \in B\}$; аналогічно $W_0 = p\{b \in B_0\}$.

Оскільки B цілком належить B_0 , відповідно, вірогідність належності задачі одночасно B та B_0 дорівнює $p\{b \in B\}$:

$$P\{b \in B, b \in B_0\} = P\{b \in B_0\}P\{b \in B|b \in B_0\}. \quad (6)$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_{ef} &= \frac{W}{W_0} = \frac{P\{b \in B\}}{P\{b \in B_0\}} = \\ &= \frac{P\{b \in B, b \in B_0\}}{P\{b \in B_0\}} = P\{b \in B|b \in B_0\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Цей вираз визначає вірогідність того, що задача, яка виконується за відсутності в системі порушень, буде виконана й за їх наявності, тобто точно відповідає визначенню надійності системи топогеодезичного забезпечення. Отже,

$$K_{ef} = W_2. \quad (8)$$

Враховуючи цей факт, надалі під надійністю системи топогеодезичного забезпечення розумітимемо її коефіцієнт збереження ефективності. Найзагальнішим методом розрахунку надійності системи можна вважати метод усереднення за траєкторіями. Суть його

в тому, що існує відношення ефективності системи, що пройшла деяку усереднену траєкторію, до системи з максимальними можливостями. Так, $W(g)$ – ефективність деякої системи, для якої реалізована деяка траєкторія $g \in G$. $W(g)$ визначається усередненням значень вихідного ефекту $\omega(y, g)$ для всіх можливих на цій траєкторії реалізацій зовнішніх факторів y :

$$W_g = \int_{Y_g} \omega(y, g) dQ(y, g), \quad (9)$$

де Y_g – множина реалізацій зовнішніх факторів $\omega(y, g)$; $dQ(y, g)$ – елемент вірогідності визначеної реалізації факторів.

Усереднивши отримані інтеграли по всіх можливих траєкторіях, розрахуємо ефективність системи:

$$W = \int_G \int_{Y_g} \omega(y, g) dQ(y, g) dP(g), \quad (10)$$

де $dP(g)$ – елемент вірогідності реалізації траєкторії g .

Тоді надійність системи

$$W_2 = \frac{W}{W_{(g_0)}} = \int_G \frac{W_g}{W_{g_0}} dP(g) = \int_G E(g) dP(g). \quad (11)$$

Значення $E(a) = \frac{W(g)}{W_{(g_0)}}$ – відносна ефективність g -ї

траєкторії. Частіше її називають ваговим коефіцієнтом. Для обчислення надійності за формулою (11) це значення повинно бути задане як функціонал форми траєкторії.

Формула (11) є найзагальнішим методом розрахунку надійності, але використовують її не дуже часто, оскільки важко створити та розрахувати функціонали $W(g)$ та інтеграл (11).

Для систем топогеодезичного забезпечення найприйнятнішим можна вважати метод усереднення [4]. Цей метод застосовується для систем масового обслуговування, до яких належить дуже широкий клас завдань, пов'язаних з опрацюванням деякого потоку вимог. Систему топогеодезичного забезпечення також можливо розглядати як систему масового обслуговування, в якій елементарними вимогами буде виконання єдиного завдання [5]. Ефективністю цієї системи є її надійність, тобто вірогідність виконання цієї задачі; в загальному випадку вона виражається формулою

$$W_2 = \bar{P} = M[n]/n_{ex}, \quad (12)$$

де $\bar{P}$ – середня вірогідність обслуговування вимог; n – кількість вимог, які реально задовольнила система; n_{ex} – загальна кількість вимог, які потрапили на вхід до системи.

Оскільки n та n_{ex} є випадковими, то оцінюється їх математичне очікування. Так, n_0 – кількість вимог, які обслуговує повністю справна система. Запишемо визначення надійності:

$$W = \frac{M[n]}{M[n_0]}. \quad (13)$$

Розподілимо потік вимог на групи, об'єднавши в одну групу вимоги з однаковою вірогідністю обслуговування. Це вимоги, які обслуговуються однотипними

компонентами системи за однаковий час (наприклад, для системи забезпечення спеціальними картами такою ви-
могою може бути норма установи). За такого розподілу

$$n_{ex} = \sum_j n_{exj}; n_0 = \sum_j n_{0j}; n = \sum_j n_j;$$

$$n_{exj} \geq n_{0j} \geq n_j; n_{ex} \geq 1,$$

де індексом j відмічені значення для j -ї групи.

Позначимо $M[n_0] = N_0$, тоді

$$W_2 = \frac{M[n]}{N_0} = \frac{M\left[\sum_j n_j\right]}{N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_j M[n_j]. \quad (14)$$

Своєю чергою,

$$M[n_j] = n_{exj} P_j,$$

де P_j – вірогідність обслуговування вимог j -ї групи повністю справною системою. Позначивши відно-

шення $\frac{P_j}{P_{0j}} = K_j$, можливо записати:

$$W_2 = \sum_j \frac{n_{exj} P_{0j} K_j}{N_0} = \sum_j \frac{n_{0j}}{N_0} K_j. \quad (15)$$

Відношення $\frac{n_{0j}}{N_0}$ означає частку вимог j -ї групи в

загальній кількості вимог, яку обслуговує повністю справна система, воно також не залежить від надійності. Відповідно, воно визначиться як вірогідність K_j , усереднена за всіма вимогами.

Приклад. Розрахуємо надійність системи забезпечення спеціальними картами, що виготовляються завчасно, визначивши надійність як коефіцієнт збереження ефективності.

Так, система доставки спеціальних карт описується трьома параметрами:

- x_1 – кількість карт на складі;
- x_2 – особовий склад, який залучається до набору;
- x_3 – кількість одиниць автомобільної техніки.

Вважатимемо також, що ця система належить до систем масового обслуговування, надійність яких розраховується за формулою (15). Елементарною вимогою вважатимемо норму спеціальних карт установи, яку необхідно доставити установі [5].

Стосовно системи, що розглядається, K_j в (15) означатиме вірогідність доведення однієї норми установи, за якого повністю однаково здійснюється обробка тільки таких норм, які оброблялися в суміжні проміжки часу. Позначимо цей інтервал dt , частка dt в загальній кількості

$$\frac{dt}{t_p}, \quad (16)$$

де t_p – загальний час виконання задачі.

Тепер роль K_j виконуватиме безперервна функція $K(t)$ (t – дійсний час), потрібно її визначити.

Оскільки кожна норма спеціальних карт послідовно проходить всі етапи обробки (зберігання, доставку, набір), відповідно, контур обслуговування містить всі ці компоненти та

$$K_t = P(\omega_{xp}) P(\omega_n / \omega_{xp}) P(\omega_d / \omega_{xp} \omega_n), \quad (17)$$

де ω_{xp} – подія, пов'язана з невлученням у склад спеціальних карт; $P(\omega_{xp})$ – вірогідність неуразнення складу спеціальних карт; ω_n – безпомилковий набір спеціальних карт; $P(\omega_n / \omega_{xp})$ – вірогідність набору за умови збереження складу; ω_d – успішна доставка норми спеціальних карт; $P(\omega_d / \omega_{xp} \omega_n)$ – вірогідність доставки за умови збереження складу та безпомилкового набору.

Вважатимемо, що знищення складів, вихід із ладу дорожньої мережі, а також поразка особового складу взаємно не пов'язані, що дає змогу вважати ці події незалежними, тоді формула (17) набуде вигляду:

$$K(t) = P(\omega_{xp}) P(\omega_n) P(\omega_d). \quad (18)$$

Оцінка вірогідності неуразнення складів карт та вірогідність своєчасного відновлення (поповнення) запасів карт на складах розглянута у роботі [4], наведемо лише загальну формулу:

$$P(\omega_{xp}) = 1 - (R_0 R_1)^k (1 - R_2), \quad (19)$$

де R_0 – вірогідність потрапляння складу топографічних карт у зону ураження зброєю; R_1 – умовна вірогідність ураження; R_2 – вірогідність своєчасного відновлення запасу карт на складах; k – кількість відділень складу.

У процесі набору беруть участь x_2 осіб, які працюють паралельно. Якщо вважати, що вірогідність безпомилкової роботи i набиральника.

$$R_i = e^{-\int_0^t c(t) dt}, \quad (20)$$

де $c(t)$ – частота появи помилок, то вірогідність безпомилкової роботи всього колективу становитиме

$$R_n = 1 - \prod_{i=1}^{x_2} (1 - R_i). \quad (21)$$

Тоді

$$P(\omega_n) = E_n R_n = E_n \left(1 - \prod_{i=1}^{x_2} (1 - R_i) \right), \quad (22)$$

де E_n – ваговий коефіцієнт, який відповідає відносній ефективності роботи набиральників. Приблизно його можна вважати таким, що зменшується пропорційно до виведення зі строю особового складу:

$$E_n = \frac{x_2}{x_{2\max}}. \quad (23)$$

Якщо вважати, що набиральники схильні до помилок однаковою мірою, тобто частота виникнення помилок у всіх набиральників однакова та, крім цього, незалежна від часу, то вірогідність безпомилкового набору карт

$$P(\omega_n) = \frac{x_2}{x_{2\max}} \left(1 - (1 - e^{-ct})^{x_2} \right). \quad (24)$$

Доставка карт здійснюється x_3 автомобілями, які працюють одночасно, формула для оцінювання вірогідності їх безвідмовної роботи подібна до (24), але замість c у неї входить інтенсивність відмов автомобіля $-\lambda$. Вважатимемо її однаковою для всіх автомобілів та незмінною у часі, тоді

$$P(\omega_d) = \frac{x_3}{x_{3\max}} \left(1 - (1 - e^{-\lambda t})^{x_3} \right). \quad (25)$$

Помножувач $\frac{x_3}{x_{3\max}}$ тут також виконує роль вагового коефіцієнта та відображає зниження пропускної здатності автомобільної техніки у разі виходу окремих одиниць з ладу.

В (15) входить помножувач $\frac{n_{0j}}{N_0}$, який визначає частку вимог j -ї групи в загальному потоці вимог. У прикладі, який розглядається, N_0 означає повну

$$W = \frac{x_1}{x_{1\max}} \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \left[(1 - R_0 R_1)^k (1 - R_2) \right] \frac{x_2}{x_{2\max}} \left(1 - (1 - e^{-ct})^{x_2} \right) \frac{x_3}{x_{3\max}} \left(1 - (1 - e^{-\lambda t})^{x_3} \right) dt. \quad (27)$$

Як видно з формули (27), $K_{\text{эф}}$ системи змінюватиметься від 0 до 1. Надійність дорівнює 100 %, якщо система повністю укомплектована особовим складом і технікою, якщо на складах топографічних карт зберігається повний запас спеціальних карт, що виготовляються завчасно, помилки набиральників та поломки автотранспорту відсутні, а також унеможливлене ураження складів.

Висновки

Розроблено математичну модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно, надійність визначено як коефіцієнт збереження ефективності.

Розглянуті теоретичні положення будуть покладені в основу подальших досліджень з питань удосконалення системи забезпечення установи спеціальними картами та фотодокументами про місцевість.

Література

1. Чорнокнижний О. А. Аналіз забезпечення збройних сил провідних країн світу спеціальними картами та фотодокументами про місцевість у локальних війнах і збройних конфліктах останніх років / Чорнокнижний О. А., Савчук Р. Г. // Науково-технічний журнал ЦНДІ ОВТ ЗСУ. – Київ: ЦНДІ ОВТ, 2015. – № 2 (6). – С. 43–47.
2. Обґрунтування показників ефективності системи забезпечення оперативного командування спеціальними картами та фотодокументами про місцевість в обороні / Чорнокнижний О. А., Савчук Р. Г., Корольов В. М., Засць Я. Г. // Військово-технічний збірник. – Львів: НАСВ ім. П. Сагайдачного. – № 13/2015. – С. 65–69.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. Астахов А. Д. Пути создания модели оценки эффективности системы топогеодезического обеспечения войск / А. Д. Астахов. – М.: РИО ВТС, 1984. – 185 с.
5. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Саати Т. Л. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.

норму замовлення карт, n_{0j} – це реально наявні на складі карти; підсумування повинно проводитися за кількістю норм установ (таку норму ми вважаємо одиничною), й оскільки вірогідність обробки кожної норми збігається, а

$$\sum_j n_{0j} = x_1; \quad N_0 = x_{1\max}, \quad (26)$$

то в кінцевому варіанті формула для оцінювання надійності системи забезпечення спеціальними картами, що виготовляються завчасно, набуде вигляду:

Математична модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно Р. Савчук

Розроблено математичну модель системи забезпечення установи спеціальними картами, що виготовляються завчасно, методом усереднення за траєкторіями, що дає змогу врахувати реальний стан системи формальною мовою зміни подій або станів, визначаючи надійність як коефіцієнт збереження ефективності.

Математическая модель системы обеспечения учреждения специальными картами, которые изготавливаются заблаговременно Р. Савчук

Разработана математическая модель системы обеспечения учреждения специальными картами, которые изготавливаются заблаговременно, методом усреднения по траекториям, что позволяет учесть реальное состояние системы на формальном языке смены событий или состояний, определяя надежность как коэффициент сохранения эффективности.

A mathematical model of the system to ensure the establishment of special cards, which are made in advance R. Savchuk

Tasks Surveying software, indicates the need to improve the efficiency of the existing system of special cards.

In the article the mathematical model of the system to ensure the establishment of special cards, which are made in advance by averaging along trajectories, which allows to take into account the real state of the system in a formal language change events or conditions, determine the reliability of the coefficient of efficiency saving.