

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ НА ОСНОВІ ТЕРМОДИНАМІКИ НЕРІВНОВАЖНИХ ПРОЦЕСІВ

© Щур І.З., 2003

Математично описано лінійний електричний багатополіусник як термодинамічну систему, доповнено електричну математичну модель лінійним виразом дисипативної функції, яка дає можливість моделювати теплові потоки, що генеруються в багатополіуснику під час протікання нерівноважних процесів. Запропоновано використання низки універсальних аналітичних і графічних залежностей у відносних одиницях для енергетичної характеристики прохідних чотириполіусників.

A linear electric multi-pole device as thermodynamic system is described mathematically, the electric mathematic model is supplemented by the expression of dissipative function which allows to modeling hit fluxes which are generating in multi-pole device during of passing of irreversible processes. The row of universal analytical and graphic dependencies in relative units is proposed in order to characterize of passage four-pole devices.

Постановка проблеми, актуальність і доцільність досліджень. Теорія електричних кіл – сучасна сформована наука, яка сформувалась протягом ХХ ст. [1]. У цей самий час розвинулася інша наука – термодинаміка, яка завдяки феноменологічному підходу до макроскопічного опису систем є фундаментальною і дозволяє аналізувати енергетику явищ різної природи: фізичних, хімічних, біологічних, інформаційних, суспільних тощо [2]. Проте елементи електротехніки, зокрема електричні кола, не стали об’єктами дослідження термодинаміки, оскільки вони успішно описувалися рівняннями Кірхгофа, в той час як термодинаміку використовували для опису складніших систем, в яких накладаються процеси різної фізичної природи, наприклад: термоелектричних, термодифузних, електрокінетичних, оптико-акустичних тощо. До початку третього тисячоліття ці дві науки, які розвивалися різними шляхами, – теорія електричних кіл і термодинаміка нерівноважних процесів – у своїй лінійній частині можуть вважатися повністю сформованими. Тому доцільним є розгляд лінійних електричних кіл на основі лінійної термодинаміки нерівноважних процесів. Таке уявлення з погляду фундаментальної науки є завжди корисним, оскільки дає змогу побачити і краще зрозуміти загальні закономірності функціонування конкретних об’єктів і, можливо, виявити якісь нові їх аспекти.

Аналіз досліджень у цьому напрямку. Дослідження в напрямку термодинамічного аналізу електричних кіл нам не відомі. Проте близьким до цього був сформований ще наприкінці 60-х років професором Львівської політехніки Юрієм Величком напрям електрично-енергетичного математичного моделювання електричних кіл [3]. Проф. Величкові належить концепція “невидимої сторони” електричних кіл, враховуючи яку, він запропонував доповнювати математичну модель досліджуваного електричного кола новою

змінною – потужністю невидимої сторони, яка, як показали дослідження, лінійно залежить від величин вузлових напруг. Отримана таким чином електроенергетична математична модель будь-якого багатополюсника розкриває нові можливості для аналізу електричних кіл у напрямку їх енергетики, що було показано в роботі [4]. Проте запропонований новий підхід був сприйнятий науковими колами стримано, з нерозумінням деяких моментів і недооцінкою його важливості [5].

Метою досліджень є розгляд лінійних електричних кіл як нерівноважних термодинамічних систем. Зокрема в цій роботі поставлені такі **завдання**: аналіз сучасного математичного опису електричних багатополюсників з погляду лінійної термодинаміки нерівноважних процесів, термодинамічне пояснення концепції проф. Ю.Величка, розгляд можливостей термодинаміки для універсального опису енергетики прохідних чотириполюсників.

Виклад основного матеріалу. Електричне коло будь-якої складності можна розглядати в загальному випадку як активний багатополюсник і, заземливши один з вузлів, описати його вузловим V-рівнянням у матричній формі [4, 5]

$$\mathbf{I} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} \quad (1)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k1} & Y_{11} & Y_{12} & \vdots & Y_{1n} \\ I_{k2} & Y_{21} & Y_{22} & \vdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{kn} & Y_{n1} & Y_{n2} & \vdots & Y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де I_i , U_i – вузлові струми та напруги відносно точки заземлення, I_{ki} , Y_{ij} – коефіцієнти матриці, яка описує електричну схему багатополюсника, відповідно струм короткого замикання i -го вузла та взаємна провідність i -ї та j -ї гілок.

Рівняння (2) описує стаціонарний стан електричного кола як для постійного струму (всі параметри рівняння мають дійсні значення), так і для змінного (параметри описуються комплексними числами). Коефіцієнти матриці $\mathbf{V}$ можна знайти за дослідом короткого замикання та взаємовпливу між вузовими напругами і струмами.

З погляду термодинаміки багатополюсник слід розглядати як нерівноважну стаціонарну закриту систему, яка обмінюється із зовнішнім середовищем енергією. Для таких систем у станах, близьких до рівноваги, розроблена загальна теорія, яка базується на лінійних співвідношеннях між силами X_i , що діють на систему чи в системі, і потоками J_i , які спричиняються цими силами [2], наприклад, градієнт температури зумовлює тепловий потік. У рівновазі сили і відповідні потоки дорівнюють нулю. Для малого відхилення сил від нульового рівноважного значення припускається, що потоки є лінійними функціями сил. У випадку лінійних систем, до яких належить описаний рівнянням (2) багатополюсник, лінійність між силами і потоками забезпечується в усьому діапазоні зміни сил. У загальному випадку потоки і сили взаємозв'язані, тобто потік J_i лінійно залежить не лише від відповідної йому сили X_i , а й від інших сил, що діють у системі:

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j, \quad (3)$$

де L_{ij} – феноменологічні коефіцієнти, які також називають кінетичними коефіцієнтами чи узагальненими провідностями, оскільки вони дорівнюють складовим потоку за одиничної відповідної сили. Слід зазначити, що, відповідно до принципу Кюрі, взаємозв'язаними можуть бути необоротні процеси лише одного тензорного рангу (скаляри, вектори чи тензори вищого порядку).

Враховуючи рівняння (3), лінійна стаціонарна термодинамічна система, у якій діють n сил, буде описуватися таким матричним рівнянням:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}, \quad (4)$$

де $\mathbf{J}$, $\mathbf{X}$ – матриці-стовпці n потоків і сил; $\mathbf{L}$ – квадратна матриця феноменологічних коефіцієнтів.

Відповідно до розробленої Л.Онзагером теорії нерівноважних процесів, основаної на принципі детальної рівноваги, або мікроскопічної оборотності, кінетичні коефіцієнти, що характеризують перехресні ефекти, рівні, тобто $L_{jk} = L_{kj}$, що називається співвідношеннями взаємності Онзагера. Отже, матриця $\mathbf{L}$ є симетричною.

Для аналізу електричного багатополюсника як термодинамічної системи необхідно правильно вибрати його сили та потоки. Очевидно, що, згідно із законом Ома, потоками будуть струми, а силами, що їх спричиняють, – напруги, причому в стані термодинамічної рівноваги значення струмів у зовнішніх вузлах багатополюсника повинні дорівнювати нулю. Для знаходження вузлових напруг, які забезпечують стан зовнішньої рівноваги багатополюсника (позначимо матрицею-стовпцем $\mathbf{U}_0$), перетворимо матричне рівняння (1) так:

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_k = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}, \quad (5)$$

де $\mathbf{I}_k$ – матриця-стовпець вузлових струмів короткого замикання; $\mathbf{Y}$ – квадратна матриця провідностей, отримана з матриці $\mathbf{V}$ викреслюванням першого стовпця, і прирівняємо матрицю $\mathbf{I}$ до нуля. У результаті отримаємо матричне рівняння

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}_0. \quad (6)$$

З рівняння (6) після домноження зліва на обернену матрицю $\mathbf{Y}^{-1}$ отримуємо $\mathbf{U}_0 = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{I}_k$. Віднявши від рівняння (5) рівняння (6), остаточно одержимо

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0). \quad (7)$$

Матричне рівняння (7) описує електричний багатополюсник як нерівноважну термодинамічну систему, до кожного i -го вузла якої прикладена ззовні сила у вигляді різниці напруг $U_i - U_{i0}$, яка спричиняє потік струму I_i . Матриця провідностей $\mathbf{Y}$ відповідно до теореми взаємності електричних кіл – симетрична, що відповідає співвідношенням взаємності Онзагера. Отже, за відповідно вибраних сил і потоків матриця провідностей $\mathbf{Y}$ однозначно характеризує термодинамічну систему “електричний багатополюсник”. В окремому випадку пасивного багатополюсника потоки і сили будуть дорівнювати відповідним струмам і напругам його вузлів.

Але завдання термодинаміки полягає, передусім, в математичному описі закономірностей перетворення енергії в системах. Рівняння (7), за яким можна визначити вхідні потужності у вузлах багатополюсника, не повністю описує енергетику багатополюсника. Адже, крім вхідних потужностей, в активних багатополюсниках є ще й внутрішні джерела потужності, а робота

системи при відхиленні її від рівноваги характеризується необоротними процесами передачі енергії, внаслідок яких спостерігається перетворення частини енергії в теплоту (Джоуля). Крім цього, багатополісник може мати ще й інші, неелектричні вузли (наприклад: електромагнітні, оптичні, акустичні тощо), якими підводиться чи відводиться енергія, що супроводжується дисипацією корисного енергопотоків. Тому для повної енергетичної характеристики багатополісника слід скласти рівняння балансів енергії і ентропії. За умови відсутності процесів акумулювання енергії доцільно перейти до відповідних балансів енергетичних показників інтенсивності:

– потужностей на всіх n електричних входах, m внутрішніх джерелах та l неелектричних вузлах

$$\sum_{i=1}^{n+m+l} P_i = 0 ; \quad (8)$$

– швидкості зміни ентропії в системі

$$\frac{dS}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s + \frac{dS_e}{dt} , \quad (9)$$

де $\mathbf{J}_s$ – вектор зовнішніх потоків ентропії в систему, пов'язаний з відповідними потоками енергії; dS_e/dt – швидкість генерації ентропії в системі внаслідок протікання нерівноважних процесів у ній.

Саме рівнянням балансу потужностей (8) запропонував доповнити математичну модель багатополісника (2) проф. Ю.Величко [5]:

$$\begin{pmatrix} P_t \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{kt} & I_{t1} & I_{t2} & \vdots & I_{tn} \\ I_{k1} & Y_{11} & Y_{12} & \vdots & Y_{1n} \\ I_{k2} & Y_{21} & Y_{22} & \vdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{kn} & Y_{n1} & Y_{n2} & \vdots & Y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} , \quad (10)$$

де P_t названо потужністю невидимої сторони електричного кола; P_{kt} , I_{ti} – коефіцієнти.

З рівняння (10) видно, що потужність невидимої сторони дорівнює різниці між сумарною потужністю P_{kt} , що споживається багатополісником в режимі короткого замикання всіх його вузлів, і потужностями вузлів, які пропорційні їх напругам (коефіцієнти I_{ti} мають знак, протилежний до знака напруг U_i):

$$P_t = P_{kt} + \sum_i I_{ti} U_i . \quad (11)$$

Саме лінійність залежності $P_t(U_i)$ була на той час незрозумілою в концепції проф. Величка. Складність становить також визначення коефіцієнтів моделі P_{kt} , I_{ti} .

Проте потужність невидимої сторони в її загальному вигляді не становить особливої цікавості, коли ми знаємо сумарну потужність P_{kt} . Важливішою є інформація про потужність теплової енергії (сумарний тепловий потік), що генерується в системі внаслідок її роботи. Вона виражається дисипативною функцією (втраченою корисною енергією) $\sigma = T \frac{dS_e}{dt}$, де T – абсолютна температура навколишнього середовища. У лінійній термодинаміці нерівноважних процесів доказывается, що дисипативна функція має білінійну форму стосовно сил і потоків, що

діють у системі [2]:

$$\sigma = \sum_i X_i J_i. \quad (12)$$

Рівняння (12) стосовно електричного багатополіусника буде мати такий вигляд:

$$P_t' = P_0 + \sum_i (U_i - U_0) I_i = P_0 + \mathbf{I}^T \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0), \quad (13)$$

де P_t' – сумарна потужність теплоти, що генерується в багатополіуснику; P_0 – потужність теплоти, що генерується в багатополіуснику внаслідок протікання внутрішніх необоротних процесів, коли стосовно зовнішніх вузлів багатополіусник знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, $\mathbf{I}^T$ – транспонована матриця вузлових струмів багатополіусника $\mathbf{I}$.

Доповнення матричного рівняння (7) рівнянням (13) дозволяє отримати електроенергетичну математичну модель електричного багатополіусника. Аналогічно можна скласти математичну модель мережі будь-якої природи, подавши її у вигляді лінійного багатополіусника. У випадках нелінійних залежностей між параметрами елементів багатополіусника в околах робочих точок можна провести лінеаризацію характеристик відомими способами. Отже, лінійна термодинаміка нерівноважних процесів може бути теоретичною основою теорії мереж, про доцільність розробки якої вказував проф. Величко в передмові редактора до XII тому журналу "Известия вузов СССР – Радиоэлектроника" ще в 1969 р.

Важливе значення може мати застосування вже розробленого в термодинаміці нерівноважних процесів математичного апарата до енергетичного аналізу прохідних чотириполіусників, якими можна моделювати передавачі чи перетворювачі енергії [6,7].

Будь-який прохідний чотириполіусник можна описати лінійними рівняннями

$$\begin{cases} J_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 \\ J_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 \end{cases},$$

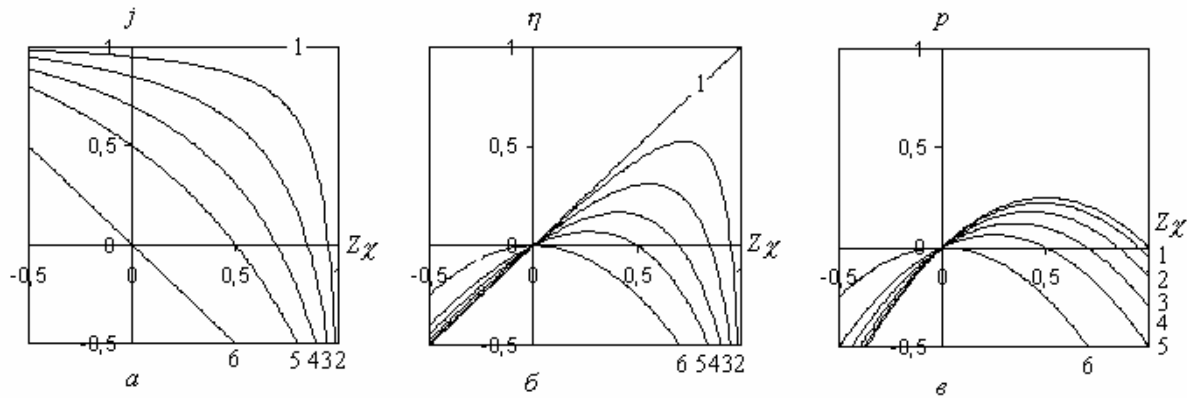
де J_1, J_2 – відповідно вхідний і вихідний потоки; X_1, X_2 – вхідна і вихідна сили; L_{jk} – “феноменологічні” коефіцієнти.

За визначенням X_1, X_2 та J_1 додатні, а J_2 – від’ємний, що означає поглинання енергії на вході і утворення її на виході, тому L_{11}, L_{22} та L_{12} повинні бути додатними. Для універсального подання результатів у теорії термодинамічної ефективності перетворювачів енергії [7] використовуються нормовані величини. Для цього вводяться такі параметри:

ступінь спряження $q = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$; феноменологічна стехіометрія $Z = \sqrt{L_{22}/L_{11}}$; відношення

сил $\chi = X_2/X_1$.

Використовуючи введені позначення, перетворення чи передачу енергії зі входу на вихід чотириполіусника можна оцінювати за різними показниками. На рисунку для ряду ступенів спряження q показані універсальні залежності від приведенного відношення сил $Z\chi$ важливих для характеристики енергетики чотириполіусника показників, математичні вирази яких наведені в таблиці.



Залежності нормованого відношення потоків (а),
термодинамічної ефективності (б) і нормованої вихідної потужності (в)
від нормованого відношення сил при різних ступенях спряження q :
 $1 - q = -1,0$; $2 - q = -0,95$; $3 - q = -0,85$; $4 - q = -0,7$; $5 - q = -0,5$; $6 - q = 0$

Універсальні показники для енергетичної характеристики прохідних чотириполіусників

Нормоване відношення вихідного потоку до вхідного	Термодинамічна ефективність передачі вільної енергії	Нормована вихідна потужність
$j = -\frac{J_2}{ZJ_1} = -\frac{(Z\chi) + q}{q(Z\chi) + 1}$	$\eta = -\frac{J_2 X_2}{J_1 X_1} = -(Z\chi) \frac{(Z\chi) + q}{q(Z\chi) + 1}$	$p = -\frac{J_2 X_2}{L_{11} X_1^2} = -[(Z\chi) + q](Z\chi)$

Універсальність наведених залежностей полягає в тому, що, якщо лінійну систему будь-якої природи зобразити як прохідний чотириполіусник, то передача енергії з його входу на вихід буде описуватися у відносних одиницях однією з кривих, показаних на рис. 1, а–в, з відповідним ступенем спряження між виходом і входом q . В абсолютно спряженій системі ($q = -1$) залежно від навантаження виходу чотириполіусника, яке описується нормованим відношенням сил $Z\chi = 0 \dots 1$, термодинамічна (енергетична) ефективність η перетворення чи передачі енергії з входу на вихід буде лінійно змінюватися від нуля (режим короткого замикання) до 1 (режим неробочого ходу), нормоване відношення потоків буде незмінно дорівнювати одиниці, а нормована вихідна потужність буде максимальною і дорівнюватиме $p = 0,25$ за середнього навантаження $Z\chi = 0,5$. У випадку неповного спряження ($|q| < 1$), наприклад, для активного чотириполіусника, нормоване відношення сил буде зменшуватися зі зменшенням навантаження і почне дорівнювати нулю в точці неробочого ходу, для якої $Z\chi = |q|$, термодинамічна ефективність буде мати максимальне значення, що дорівнює $\eta_{\max} = (Z\chi)_{\text{opt},\eta}^2$ за $(Z\chi)_{\text{opt},\eta} = -q / \left(1 + \sqrt{1 - q^2}\right)$, а нормована вихідна потужність буде максимальною і $p_{\max} = q^2 / 4$ за $(Z\chi)_{\text{opt},p} = -q / 2$.

Практика використання вказаних у таблиці універсальних показників і зображених на рисунку залежностей показала їх інформативність і ефективність з одночасною простотою.

Приклади їх застосування до енергетичного аналізу електроприводів постійного струму можна побачити в роботах автора [8, 9].

Висновки. 1. Математична модель електричного багатополюсника як термодинамічної системи є дуже близькою до відомої в електротехніці його Y-моделі (опис матрицею вузлових провідностей). Особливість термодинамічної моделі полягає в тому, щоб початок відліку сил (вузлових напруг) проводити від стану рівноваги – нульових значень сил (вузлових струмів).

2. Доповнення електричної математичної моделі рівнянням для дисипативної функції (12) дає можливість моделювати теплові потоки, що генеруються в багатополюснику внаслідок протікання нерівноважних процесів. За допомогою отриманої електроенергетичної математичної моделі можна на стадії електричного проектування досліджувати (оптимізувати) енергетичні показники електричних кіл. Математичним виразом дисипативної функції легко доводиться правильність концепції проф. Ю. Величка про невидиму сторону електричного кола.

3. Математичний апарат теорії термодинамічної ефективності перетворювачів енергії доцільно застосувати для універсальної енергетичної характеристики прохідних чотириполіусників.

1. *Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов.* – М., 1989. – 528 с. 2. *Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур: Пер. с англ.* – М., 2002. 461 с. 3. *Величко Ю.Т. Анализ напряжений, токов и мощностей в линейном многополюснике // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника.* – 1969. – Т. XII, № 8. – С. 767–786. 4. *Бардила Т.И., Полевой Е.А. Учет мощностей видимых и невидимых сторон многополюсника при анализе и синтезе электрических цепей // Изв. вузов СССР – Радиоэлектроника.* – 1974. – Т. XVII, № 2. – С. 33–39. 5. *Бардила Т. “Невидима сторона” електричних кіл у науковій концепції професора Юрія Величка // Вісник фонду Олександра Смакули.* – 2000. – № 1(5). – С. 23–28. 6. *Эткин В.А. Термодинамика неравновесных процессов переноса и преобразования энергии.* – Саратов, 1991. – 156 с. 7. *Вестерхоф Х., ван Дам К. Термодинамика и регуляция превращений свободной энергии в биосистемах: Пер. с англ.* – М., 1992. – 686 с. 8. *Щур І.З. Моделювання електроприводів постійного струму методами лінійної термодинаміки нерівноважних процесів // Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика.* – Харків, 2002. – № 12, т. 2. – С. 413–416. 9. *Щур І.З. Електропривод з двигуном постійного струму послідовного збудження як термодинамічний перетворювач енергії // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 2002. – № 449. – С. 204–212.