

ЗАДАЧА З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

І.О. Бобик^а, М.М. Симолюк^б

^а Національний університет “Львівська політехніка”

вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

^б Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України

вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна

(Отримано 2 липня 2009 р.)

Встановлено умови існування єдиного розв’язку задачі з кратними вузлами для лінійного факторизованого рівняння із частинними похідними. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів факторизації.

Ключові слова: факторизоване рівняння, двоточкова задача, малі знаменники.

2000 MSC: 35G30

УДК: 511.2, 517.946

Вступ

Нехай Ω_p — p -вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $T > 0$, $Q_p^T = (0, T) \times \Omega_p$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_p$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$; $\text{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi_n = \{\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \dots < \lambda_n\}$; $A(D_x)$ — такий диференціальний вираз, що

$$(\exists N \in \mathbb{N}) (\exists a_1, a_2 > 0) (\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad (1)$$

$$a_1(1 + |k|^N) \leq |A(k)| \leq a_2(1 + |k|^N),$$

$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : \text{Re } A(k) \geq 0\}$, $K_2 = \mathbb{Z}^p \setminus K_1$, $W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A$, $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k e^{(ik, x)}$ за нормою

$$\|\varphi(x); W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A\| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1 + |k|)^{2\alpha} e^{2\chi(k) \text{Re } A(k)}},$$

де $\chi(k) = \beta_1$, якщо $k \in K_1$, $\chi(k) = \beta_2$, якщо $k \in K_2$, $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ — простір функцій $u(t, x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0, T]$ похідні $\partial^j u(t, x)/\partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до $W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0, T]$; норму в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ задаємо формулою

$$\|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)\| =$$

$$= \sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A \right\|.$$

В області Q_p^T розглянемо таку задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t, x) \equiv$$

$$\equiv \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j A(D_x) \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_p^T, \quad (2)$$

$$\begin{cases} V_j[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, r}, \\ V_{r+j}[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x), \quad j = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (3)$$

де $1 \leq r < n$, $l = n - r$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Pi_n$. Задачу (2), (3) називають задачею з двома кратними вузлами $t = 0$ і $t = T$, числа r і l називають кратностями вузлів $t = 0$ і $t = T$ відповідно.

Розв’язність двоточкових крайових задач з умовами вигляду (3) для рівнянь із частинними похідними досліджено у роботах [2, 3, 6, 8, 9]. Так, у праці [6] встановлено умови коректної розв’язності у соболевській шкалі просторів задачі з умовами (3) для випадку гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку. Ці умови полягають у виконанні степеневих оцінок знизу для послідовності певних характеристичних визначників, пов’язаних із задачею. Для дослідження питання про виконання таких оцінок у праці [6] використано метричний підхід і запропоновано методику доведення метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (3). За допомогою цієї методики у [6] встановлено результат про виконання степеневих оцінок знизу для визначників таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та значення T правого вузла інтерполяції. Із цитованого результату випливає розв’язність задач з умовами (3) для гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку, у соболевській шкалі просторів для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та число T . Інакше кажучи, для „переважної“ (в сенсі міри Лебега) більшості гіперболічних рівнянь задача з умовами (3) розв’язна у соболевській шкалі у „переважній“ більшості областей Q_p^T .

У працях [2, 3] запропоновану методику роботи [6] узагальнено на випадок крайових задач (3) для безтипних рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків. Із доведених у [2, 3] метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (3) для безтипних рівнянь випливає розв'язність цих задач у просторах періодичних функцій експоненційного типу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та числа T .

У роботах [8, 9] запропоновано новий, порівняно з методами в [2, 3, 6], метод доведення метричних теорем про оцінки знизу для визначників задач з умовами (3) для безтипних рівнянь із частинними похідними. На основі цього методу у [8, 9] встановлено розв'язність таких крайових задач для майже всіх чисел $T > 0$ для довільного безтипного рівняння у просторах періодичних функцій експоненційного типу. Інакше кажучи, для кожного безтипного рівняння задача з умовами (3) розв'язна у шкалі просторів експоненційного типу у „переважній“ більшості областей Q_p^T .

Ця робота розвиває і доповнює дослідження, проведені у [2, 3, 6, 8, 9]. Її основною особливістю є результат про те, що для факторизованого рівняння (2) вдається встановити метричні оцінки для послідовності характеристичних визначників задач з умовами (3) для будь-якого фіксованого $T > 0$ і для майже всіх векторів $\vec{\lambda}$. Враховуючи, що з таких оцінок випливає розв'язність задач (2), (3) у шкалі просторів $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$, з цього результату дістаємо твердження про розв'язність в кожній області Q_p^T задач з умовами (3) для „переважної“ більшості факторизованих рівнянь вигляду (2). Наведене твердження посилює (у плані розв'язності) результати робіт [2, 3, 6]. Крім того, твердження теореми 1. цієї роботи є сильнішим від метричних тверджень робіт [2, 3, 6].

Зауважимо, що для доведення метричних оцінок знизу характеристичних визначників використа-

но методику, відмінну від описаної у [2, 3, 6, 8, 9]. На решті відзначимо, що отримані у цій роботі результати для випадку дійснозначного вектора $\vec{\lambda}$ можна перенести на випадок, коли $\vec{\lambda} \in C^n$.

I. Умови єдиності розв'язку задачі

Розв'язок задачі (2), (3), який належить до простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x). \quad (4)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої двочислової задачі:

$$L(d/dt, k) u_k(t) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, & j = \overline{1, r}, \\ u_k^{(j-1)}(T) = \varphi_{r+j,k}, & j = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (6)$$

де $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, відповідно. Розв'язок задачі (5), (6) з класу $C^n[0, T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^n C_{k,q} \exp(\lambda_q A(k)t), \quad (7)$$

де сталі $C_{k,q}$, $q = \overline{1, n}$, визначаються із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^n C_{k,q} (\lambda_q A(k))^{j-1} = \varphi_{j,k}, & j = \overline{1, r}, \\ \sum_{q=1}^n C_{k,q} (\lambda_q A(k))^{j-1} e^{\lambda_q A(k)T} = \varphi_{r+j,k}, & j = \overline{1, l}. \end{cases} \quad (8)$$

Визначник лінійної системи (8) позначимо через $\Delta(k, \vec{\lambda})$, $k \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 A(k) & \dots & \lambda_n A(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1 A(k))^{r-1} & \dots & (\lambda_n A(k))^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \exp(\lambda_1 A(k)T) & \dots & \exp(\lambda_n A(k)T) \\ \lambda_1 A(k) \exp(\lambda_1 A(k)T) & \dots & \lambda_n A(k) \exp(\lambda_n A(k)T) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1 A(k))^{n-r-1} \exp(\lambda_1 A(k)T) & \dots & (\lambda_n A(k))^{n-r-1} \exp(\lambda_n A(k)T) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Для дослідження єдиності розв'язку задачі (2), (3) використовуватимемо однорідні умови

$$\begin{cases} \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = 0, & j = \overline{1, r}, \\ \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = 0, & j = \overline{1, l}. \end{cases} \quad (10)$$

Теорема 1. Для того, щоб розв'язок задачі (2), (3) був єдиним у просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0. \quad (11)$$

□ *Доведення. Необхідність.* Якщо $\Delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$, то при $k = k^0$ система (8) з нульовими правими частинами ($\varphi_{j,k^0} = 0, j = \overline{1, n}$) має нетривіальний розв'язок $\tilde{C}_{k^0, q}, q = \overline{1, n}$. Тоді функція

$$v(t, x) = \sum_{q=1}^n \tilde{C}_{k^0, q} \exp(\lambda_q A(k^0)t) \exp(ik^0, x)$$

належить до простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ і є ненульовим розв'язком однорідної задачі (2), (10). Отже, розв'язок задачі (2), (3), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (2), (3) має два різні розв'язки u_1, u_2 , які належать до простору $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$. Тоді функція $u = u_1 - u_2$ є нетривіальним розв'язком задачі (2), (10). Для коефіцієнтів Фур'є $u_k(t), k \in \mathbb{Z}^p$, функції u справедливі зображення (7), в яких слід прийняти, що сталі $C_{k, q}, q = \overline{1, n}$, є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь, визначник якої дорівнює $\Delta(k, \vec{\lambda})$. Оскільки, згідно з умовою теореми, $\Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то $C_{k, q} = 0, q = \overline{1, n}$, для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, а, отже, $u_k(t) \equiv 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Звідси отримуємо, що $u \equiv 0$, всупереч припущенню. ■

Наступні два твердження описують достатні умови нетривіальності розв'язності однорідної двоточної задачі (2), (10).

Теорема 2. *Якщо для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k, \vec{\lambda})$ перетворюється в нуль, тобто множина $K = \{k \in \mathbb{Z}^p : \Delta(k, \vec{\lambda}) = 0\}$ є нескінченною, то однорідна задача (2), (10) має нескінченну кількість лінійно незалежних розв'язків в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$.*

□ *Доведення.* Як і у разі доведення необхідності в попередній теоремі, легко показати, що, використовуючи умови теореми 2., задача (2), (10) має в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ нескінченну кількість розв'язків вигляду

$$v_k(t, x) = \sum_{q=1}^n \tilde{C}_{k, q} \exp(\lambda_q A(k)t + (ik, x)), \quad k \in K, \quad (12)$$

де для кожного $k \in K$ сталі $\tilde{C}_{k, q}, q = \overline{1, n}$, не можуть одночасно дорівнювати нулеві. Доведемо, що отримані розв'язки (12) є лінійно незалежними в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$. Припустимо, всупереч цьому, що для деякого $M \in \mathbb{N}$ існують такі $k_1, \dots, k_M \in K$ ($k_j \neq k_q, j \neq q$) та числа $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{C}$, які одночасно не дорівнюють нулеві, що

$$\lambda_1 v_{k_1}(t, x) + \dots + \lambda_M v_{k_M}(t, x) = 0.$$

З означення норми в $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ звідси випливає, що для довільного $j, j = \overline{1, M}$, функції

$$w_j(t) \equiv \sum_{q=1}^n \lambda_j \tilde{C}_{k_j, q} \exp(\lambda_q A(k_j)t)$$

тотожно дорівнюють нулеві в просторі $C^n[0, T]$. З незалежності функцій $\exp(\lambda_1 A(k_j)t), \dots, \exp(\lambda_n A(k_j)t)$ (оскільки $\lambda_j \neq \lambda_q, j \neq q$, і $A(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$) випливає, що $\lambda_j \tilde{C}_{k_j, q} = 0$ для всіх $q, q = \overline{1, n}$. Оскільки серед сталих $\tilde{C}_{k_j, q}, q = \overline{1, n}$, хоча б одна відмінна від нуля, то $\lambda_j = 0$. Внаслідок довільності j отримуємо, що $\lambda_1 = \dots = \lambda_M = 0$, тобто функції (12) є лінійно незалежними. ■

Теорема 3. *Якщо числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є такими, що для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$*

$$\{\lambda_1 A(k^0)T, \dots, \lambda_n A(k^0)T\} \subset i2\pi\mathbb{Z},$$

то задача (2), (10) має в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ нетривіальний розв'язок.

□ *Доведення.* Для встановлення теореми досить перевірити, що $\Delta(k^0, \vec{\lambda}) = 0$. Якщо виконується умова теореми, то визначник $\Delta_1(k^0, \vec{\lambda})$ має два однакові рядки — перший та $(r+1)$ -й:

$$\text{col}(\underbrace{1, \dots, 1}_n) = \text{col}(e^{\lambda_1 A(k^0)T}, \dots, e^{\lambda_n A(k^0)T}),$$

а тому дорівнює нулеві. ■

Наступне твердження описує клас рівнянь (2), для яких виконується умова єдиності розв'язку задачі з умовами (3).

Теорема 4. *Якщо $A(k)$ є дійсним ненульовим числом для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, то для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ виконується умова (11).*

□ *Доведення.* Використаємо метод математичної індукції за n -кількістю координат вектора $\vec{\lambda}$. Щоб відобразити залежність визначника $\Delta(k, \vec{\lambda})$ від $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ та кратності r лівого вузла в умовах (3), використовуватимемо для $\Delta(k, \vec{\lambda})$ також позначення $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. При $n = 2$ кратність r лівого вузла може дорівнювати лише 1, адже $1 \leq r < n$. У цьому випадку

$$\Delta_1(k, \lambda_1, \lambda_2) = e^{\lambda_2 A(k)T} - e^{\lambda_1 A(k)T} \neq 0,$$

якщо $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\lambda_1 < \lambda_2$.

Припустимо, що для деякого $m \geq 2$

$$\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$$

для кожного r такого, що $1 \leq r < m$, якщо $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ і $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доведемо, що для довільних дійсних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ таких, що $\lambda_1 < \dots < \lambda_{m+1}$, нерівність

$$\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}) \neq 0$$

виконується для кожного $r, 1 \leq r < m+1$, якщо $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для фіксованих чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ таких, що $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ визначник $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda)$ як функція від λ на проміжку $[\lambda_1, +\infty)$ перетворюється в нуль в m різних точках $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Припустимо, що існує точка $\theta \in [\lambda_1, +\infty)$, відмінна від $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, така, що $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \theta) = 0$. Якщо

$1 \leq r < m$, то, згідно з припущенням індукції, $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$; якщо ж $r = m$, то

$$\Delta_m(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \prod_{m \geq j > q \geq 1} (\lambda_j - \lambda_q) \neq 0.$$

Тоді для всіх $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$ при $1 \leq r < m+1$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - A(k)T\right)^{m-r} \Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda) &= \\ &= (m-r)! T^r A^m(k) \times \\ &\times e^{\lambda A(k)T} \Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки визначник $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda)$ як функція змінної λ має на проміжку $[\lambda_1, +\infty)$ принаймні $(m+1)$ різних нулів $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \theta$, многочлен

$$R(\mu, k) \equiv \mu^r (\mu - A(k)T)^{m-r}$$

має степінь m , а його обидва нулі є дійсними, то за узагальненою теоремою Ролля (див. задачу 92 у [4, с. 63]) існує точка $\xi \in (\lambda_1, +\infty)$ така, що

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, k\right) \Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda)|_{\lambda=\xi} = 0,$$

що суперечить виконанню співвідношення (13). Отже, $\Delta_r(k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda)$ при фіксованих $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ як функція від λ на проміжку $(\lambda_m, +\infty)$ не перетворюється в нуль. ■

Зауважимо, що для випадків, коли $r = 1$ або $r = n-1$, твердження теореми 4. можна встановити іншими міркуваннями. Наведемо їх.

Розкриваючи визначник $\Delta_1(k, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ за елементами першого рядка, дістаємо, що

$$\begin{aligned} \Delta_1(k, \vec{\lambda}) &= A^{C_{n-1}^2}(k) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j - \lambda_q) \times \\ &\times \sum_{j=1}^n \frac{e^{\mu_j A(k)T}}{\prod_{q=1, q \neq j}^n (\mu_j - \mu_q)}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\mu_j = \lambda_1 + \dots + \lambda_n - \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$. Згідно із задачею 97 у [4, с. 64], існує точка ξ , яка лежить всередині найменшого інтервалу, що містить точки $\mu_1, \dots, \mu_n$, така, що

$$\sum_{j=1}^n \frac{e^{\mu_j A(k)T}}{\prod_{q=1, q \neq j}^n (\mu_j - \mu_q)} = \frac{(A(k)T)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\xi A(k)T}.$$

Звідси та з формули (14) випливає твердження теореми 4. для випадку $r = 1$.

Якщо ж $r = n-1$, то твердження теореми 4. отримуємо аналогічно, використовуючи розвинення

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(k, \vec{\lambda}) &= A^{C_{n-1}^2}(k) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j - \lambda_q) \times \\ &\times \sum_{j=1}^n \frac{e^{\lambda_j A(k)T}}{\prod_{q=1, q \neq j}^n (\lambda_j - \lambda_q)} \end{aligned}$$

та твердження задачі 97 у [4, с. 64].

II. Достатні умови існування єдиного розв'язку задачі

Припустимо тепер, що умова єдиності (11) виконується. Застосовуючи правило Крамера для знаходження невідомих системи (8), на підставі (4), (7) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (2), (3) у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \exp(ik, x) \times \\ &\times \sum_{j, q=1}^n \frac{\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})}{\Delta(k, \vec{\lambda})} \exp(\lambda_q A(k)t) \varphi_{j, k}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})$ — алгебричне доповнення елемента $V_j[\exp(\lambda_q A(k)t)]$, $j, q = \overline{1, n}$, у визначнику $\Delta(k, \vec{\lambda})$. Збіжність ряду (15) у просторах $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки визначник $|\Delta(k, \vec{\lambda})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, про що свідчать приклади, наведені в розділі 3 роботи [10].

Встановимо достатні умови існування розв'язку задачі (2), (3). Позначимо:

$$\theta_j = (n+1-r(n-r)-j)N, \quad j = \overline{1, r},$$

$$\theta_j = (n+1-r(n-r-1)-j)N, \quad j = \overline{r+1, n},$$

$$\delta_1(\vec{\lambda}) = \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n, \quad \delta_2(\vec{\lambda}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r},$$

$$\beta_{1, j} = \max\{0, \lambda_n\}T, \quad \beta_{2, j} = \min\{0, \lambda_1\}T, \quad j = \overline{1, r},$$

$$\beta_{1, j} = -\lambda_{r+1}T + \max\{0, \lambda_n\}T, \quad j = \overline{r+1, n},$$

$$\beta_{2, j} = -\lambda_{n-r}T + \min\{0, \lambda_1\}T, \quad j = \overline{r+1, n}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (1), (11) та існує така стала $\eta \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується нерівність*

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq \begin{cases} |k|^{-\eta} \exp(\delta_1(\vec{\lambda})T \operatorname{Re} A(k)), & k \in K_1, \\ |k|^{-\eta} \exp(\delta_2(\vec{\lambda})T \operatorname{Re} A(k)), & k \in K_2. \end{cases} \quad (16)$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\theta_j + \alpha + \eta, \beta_{1, j} + \beta_{1, j} + \beta_{2, j} + \beta_{2, j}}^A$, $j = \overline{1, n}$, то в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ існує єдиний розв'язок задачі (2), (3), який зображається рядом (15) і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$.

□ *Доведення.* теорему проводиться аналогічно до доведення теореми 3.1.5 роботи [10]. ■

Якщо всі амплітуди $A(k) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, диференціального виразу $A(D_x)$ є дійсними, можна вказати таке значення $\eta \in \mathbb{R}$, для якого нерівність (16) виконуватиметься для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$.

Теорема 2. Нехай виконується умова (1). Якщо $A(k) \in \mathbb{R}$ і $A(k) > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ нерівність (16) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\eta > -N(C_r^2 + C_l^2)$.

□ *Доведення.* Через $C(n, m)$, $1 \leq m \leq n$, позначимо множину наборів $\omega = (i_1, \dots, i_m)$, складених з m натуральних чисел $i_1, \dots, i_m$ таких, що $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. Для набору $\omega = (i_1, \dots, i_m)$ приймемо:

$$\text{set } \omega = \{i_1, \dots, i_m\}, \quad \Lambda_\omega = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_m},$$

$$H_\omega = \prod_{m \geq j > q \geq 1} (\lambda_{i_j} - \lambda_{i_q}).$$

Розкриваючи визначник $\Delta(k, \vec{\lambda})$ за правилом Лапласа за мінорами перших r рядків, одержимо, що

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = A^{C_r^2 + C_l^2}(k) \times \sum_{\omega \in C(n, r)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{\Lambda_{\sigma(\omega)} A(k)T}, \quad (17)$$

де $s_\omega = C_{r+1}^2 + i_1 + \dots + i_r$, а набір $\sigma(\omega) \in C(n, l)$ однозначно визначається за набором $\omega = (i_1, \dots, i_r) \in C(n, r)$ умовою $\text{set } \sigma(\omega) \cap \text{set } \omega = \emptyset$.

Оскільки $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$, то

$$\forall \omega \in C(n, r) \quad \forall \sigma \in C(n, l) \quad H_\omega H_\sigma \neq 0, \quad (18)$$

а з оцінок (1) випливає, що

$$\forall \sigma \in C(n, l) \setminus \sigma_0 \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} e^{(\Lambda_\sigma - \Lambda_{\sigma_0}) A(k)T} = 0, \quad (19)$$

де $\sigma_0 \equiv (r+1, \dots, n) \in C(n, l)$. Зі співвідношень (18), (19) випливає, що знайдеться $N_1 > 0$ таке, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > N_1$, виконується оцінка

$$\left| \sum_{\omega \in C(n, r) \setminus \sigma_0} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{(\Lambda_{\sigma(\omega)} - \Lambda_{\sigma_0}) A(k)T} \right| \leq \frac{1}{2} |H_{\omega_0} H_{\sigma_0}|,$$

де $\omega_0 \equiv (1, \dots, r) \in C(n, r)$. Звідси дістаємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > N_1$,

$$\left| \sum_{\omega \in C(n, r)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{\Lambda_{\sigma(\omega)} A(k)T} \right| \geq \frac{1}{2} |H_{\omega_0} H_{\sigma_0}| e^{\Lambda_{\sigma_0} A(k)T}. \quad (20)$$

Оскільки $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $\vec{\lambda} \in \Pi_n$, то, згідно з теоремою 4., $\Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи нерівності (1), (20), звідси дістаємо, що існує стала $C_1 > 0$ така, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується оцінка

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq C_1 |k|^{N(C_r^2 + C_l^2)} e^{\Lambda_{\sigma_0} A(k)T}.$$

З отриманої оцінки випливає твердження теореми. ■

III. Оцінки лебегових мір “виняткових” множин квазімногочленів

Щоб дати відповідь на питання про можливість виконання нерівності (16) у випадку, коли амплітуди диференціального виразу $A(D_x)$ можуть набувати комплексних значень (випадку, який не охоплюється теоремою 6), встановимо деякі допоміжні твердження про оцінки зверху для лебегових мір “ε-виняткових” множин $E(f, \varepsilon, [a, b])$ гладких функцій $f(t)$. Нагадаємо, що для заданої на відрізку $[a, b]$ функції $f(t)$ символом $E(f, \varepsilon, [a, b])$, $\varepsilon > 0$, позначатимемо множину $\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\}$, яку й називатимемо “ε-винятковою” множиною для функції $f(t)$ на відрізку $[a, b]$.

Лема 1. [1, 7] Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^n[a, b]$ і для всіх $t \in [a, b]$ виконується нерівність

$$|f^{(n)}(t)| > \delta, \quad \delta > 0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a, b]) \leq 2n(n!/\delta)^{1/n}.$$

Нехай $R(\lambda)$ — поліном степеня n вигляду

$$R(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{j=1}^n a_j \lambda^{n-j}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

Для полінома $R(\lambda)$ приймемо:

$$A_R = 1 + \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|^{1/j}.$$

Нижче розглядатимемо квазімногочлени вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} p_j(t), \quad \mu_j \neq \mu_q, \quad j \neq q, \quad (22)$$

де $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{C}$, а $p_1(t), \dots, p_n(t)$ — многочлени степенів $n_1 - 1, \dots, n_m - 1$ відповідно ($n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$). Для квазімногочлена $Q(t)$ позначимо:

$$M_Q = 1 + \max_{1 \leq j \leq m} |\mu_j|.$$

Лема 2. Нехай $R(\lambda)$, $Q(t)$ — многочлен і квазімногочлен, визначені рівностями (21), (22) відповідно. Якщо для всіх $t \in [a, b]$ виконується умова

$$|R(d/dt)Q(t)| \geq \delta > 0,$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ справджується оцінка

$$\text{mes}_{\mathbb{R}} E(Q, \varepsilon, [a, b]) \leq C_2 M_Q (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $C_2 = C_2(n, n_0, b - a)$, $n_0 \equiv n_1 + \dots + n_m$.

□ *Доведення.* З умови леми випливає, що в кожній точці $t \in [a, b]$ виконується нерівність

$$\max_{0 \leq j \leq n} \{A_R^{n-j} |\operatorname{Re} Q^{(j)}(t)|, A_R^{n-j} |\operatorname{Im} Q^{(j)}(t)|\} \geq \delta/(2n+2). \quad (23)$$

Як і при доведенні теореми 2.5.6 у [10], можна встановити, що існує розбиття відрізка $[a, b]$ на відрізки J_q , $q = \overline{1, K}$, кількість K відрізків якого не перевищує $C_3 M_Q$, $C_3 = C_3(n, n_0, b-a)$, що має таку властивість: на кожному відрізку J_q цього розбиття деяка функція серед $(2n+2)$ функцій

$$A_R^{n-j} |\operatorname{Re} Q^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$A_R^{n-j} |\operatorname{Im} Q^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

є максимальною. Тоді з (23) випливає, що для довільного q ($1 \leq q \leq K$) існує $j(q)$ ($0 \leq j(q) \leq n$) таке, що в кожній точці $t \in J_q$ виконується нерівність

$$A_R^{n-j(q)} |\operatorname{Re} Q^{(j(q))}(t)| \geq \delta/(2n+2) \quad (24)$$

або нерівність

$$A_R^{n-j(q)} |\operatorname{Im} Q^{(j(q))}(t)| \geq \delta/(2n+2). \quad (25)$$

З нерівностей (24), (25) випливає, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ відрізок J_q не містить точок множини $E(Q, \varepsilon, [a, b])$, якщо $j(q) = 0$. Якщо ж $j(q) \neq 0$, то з оцінок

$$(\varepsilon/(\delta A_R^{n-j}))^{1/j} \leq (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad j = \overline{1, n},$$

(які випливають з того, що $\varepsilon/\delta \in (0, 1)$) та з нерівностей (24), (25) на підставі леми 1. одержуємо, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ виконується хоча б одна з таких оцінок:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(\operatorname{Re} Q, \varepsilon, J_q) \leq C_4 \left(\frac{\varepsilon}{\delta A_R^{n-j(q)}} \right)^{\frac{1}{j(q)}} \leq$$

$$\leq C_4 (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_4 = C_4(n),$$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(\operatorname{Im} Q, \varepsilon, J_q) \leq C_5 \left(\frac{\varepsilon}{\delta A_R^{n-j(q)}} \right)^{\frac{1}{j(q)}} \leq$$

$$\leq C_5 (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_5 = C_5(n).$$

З отриманих оцінок на підставі очевидних включень

$$E(Q, \varepsilon, J_q) \subset E(\operatorname{Re} Q, \varepsilon, J_q),$$

$$E(Q, \varepsilon, J_q) \subset E(\operatorname{Im} Q, \varepsilon, J_q),$$

одержуємо, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(Q, \varepsilon, [a, b]) &= \sum_{q=1}^K \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(Q, \varepsilon, J_q) \leq \\ &\leq C_6 M_Q (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_6 = C_6(n, n_0, b-a). \end{aligned}$$

Лему доведено. ■

Лема 3. Нехай $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду (22), а $R(\lambda)$ — многочлен степеня n . Якщо виконується умова

$$\forall t \in [a, b] \quad |R(d/dt)Q(t)| \geq \delta e^{\mu t} > 0, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n(\mu)}\right]$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in [a, b] : |Q(t)| \leq \varepsilon e^{\mu t}\} \leq C_7 (M_Q + |\mu|) (\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}},$$

$$C_7 = C_7(n, n_0, b-a),$$

$$\text{де } A_R(\mu) \equiv 1 + \max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \frac{R^{(j)}(\mu)}{j!} \right|^{1/(n-j)}.$$

□ *Доведення.* Очевидно, що в кожній точці t відрізка $[a, b]$ виконується нерівність

$$|S(d/dt)G(t)| \geq \delta,$$

де $S(\lambda) \equiv R(\lambda + \mu)$, а $G(t) = Q(t)e^{-\mu t}$. Оскільки $S(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n$, де

$$b_j = R^{(n-j)}(\mu)/(n-j)!, \quad j = \overline{1, n},$$

то $A_S \equiv 1 + \max_{1 \leq j \leq n} |b_j|^{1/j} = A_R(\mu)$. Застосовуючи до многочлена $S(\lambda)$ та квазімногочлена $G(t)$ лему 2., одержимо, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_S^n}\right]$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(G, \varepsilon, [a, b]) \leq C_2 M_G (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $M_G \equiv 1 + \max_{1 \leq j \leq n} |\mu_j - \mu|$. Для завершення доведення залишається врахувати нерівність

$$M_G \leq M_Q + |\mu|$$

і те, що $E(G, \varepsilon, [a, b]) = \{t \in [a, b] : |Q(t)| \leq \varepsilon e^{\mu t}\}$.

Лему доведено. ■

IV. Метричні оцінки знизу малих знаменників

Тепер з'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (16) для випадку довільного диференціального виразу $A(D_x)$, який справджує умову (1).

Теорема 1. Якщо для виразу $A(D_x)$ виконується умова (1), то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ нерівність (16) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = p(n-r)(n+r-1)/2 - NC_r^2$.

□ *Доведення.* Нехай $P_n = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ — довільний паралелепіпед такий, що $P_n \subset \Pi_n$. Для кожного $k \in K_1 \cup K_2$ запровадимо такі множини:

$$E_\eta(k) = \left\{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| < |k|^{-\eta} e^{\delta_1(\vec{\lambda}) T \operatorname{Re} A(k)} \right\},$$

якщо $k \in K_1$,

$$E_\eta(k) = \left\{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| < |k|^{-\eta} e^{\delta_2(\vec{\lambda})T \operatorname{Re} A(k)} \right\},$$

якщо $k \in K_2$.

Нехай E_η — множина тих векторів $\vec{\lambda}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\eta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми 1. досить перевірити, що для довільного паралелепіпеда $P_n \subset \Pi_n$ $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta = 0$, якщо $\eta > \eta_0$, де $\eta_0 = p(n-r)(n+r-1)/2 - NC_r^2$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі [5, с. 13], для цього досить встановити збіжність ряду $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k)$. Доведемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k) \leq C_8 |k|^{-p-\varepsilon}, \quad (26)$$

де додатні сталі ε , C_8 не залежать від k . З оцінки (26), очевидно, випливає збіжність ряду $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k)$.

Встановимо оцінку (26) для випадку, коли $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$. Через $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = \overline{1, n}$, позначимо визначник, який одержується з визначника $\Delta(k, \vec{\lambda})$ шляхом викреслювання останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців. Для кожного $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ розглянемо множини:

$$\begin{aligned} F_\eta(k) &= \{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_n(k, \vec{\lambda})| < \nu_n(k, \vec{\lambda}) \}, \\ F_\eta(j, k) &= \{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_j(k, \vec{\lambda})| < \nu_j(k, \vec{\lambda}) \}, \\ |\Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda})| &\geq \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda}) \}, \quad j = \overline{r+1, n}, \end{aligned}$$

де числа $\nu_j(k, \vec{\lambda})$, $k \in K_1$, $j = \overline{r, n}$, визначаються таким способом:

$$\begin{aligned} \nu_r(k, \vec{\lambda}) &= |A(k)|^{C_r^2} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q|, \\ \nu_j(k, \vec{\lambda}) &= \nu_r(k, \vec{\lambda}) \xi_j(k) \prod_{q=r+1}^j e^{\lambda_q \operatorname{Re} A(k) T}, \quad j > r, \\ \xi_j(k) &= \frac{\xi_{j-1}(k)}{|k|^{p(j-1)+\varepsilon_j}}, \quad j > r, \quad \xi_r(k) = 1, \end{aligned}$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_0/2^{n-j+1}$, $r+1 \leq j \leq n$, $\varepsilon_0 = \eta - \eta_0$. Зауважимо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ множина $F_\eta(k)$ міститься в об'єднанні множин $\bigcup_{j=r+1}^n F_\eta(j, k)$. Дійсно, нехай $\vec{\lambda} \in F_\eta(k)$. Якщо $\vec{\lambda} \notin F_\eta(j, k)$ для всіх $j \in \{r+1, \dots, n\}$, то, згідно з вибором множин $F_\eta(j, k)$, $r+1 \leq j \leq n$, виконується суперечлива нерівність

$$\nu_r(k, \vec{\lambda}) \equiv |\Delta_r(k, \vec{\lambda})| < \nu_r(k, \vec{\lambda}).$$

Тому $\vec{\lambda} \in F_\eta(j_0, k)$ для деякого номера $j_0 \in \{r+1, \dots, n\}$, а, отже, потрібне включення встановлено. Отже,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq \sum_{j=r+1}^n \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k). \quad (27)$$

Для кожної з множин $F_\eta(j, k)$, $r+1 \leq j \leq n$, за теоремою Фубіні маємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k) = \int_{\bar{P}_j} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) d\vec{\lambda}_j, \quad (28)$$

$$\text{де } \bar{P}_j = \prod_{q=1, q \neq j}^n [a_q, b_q],$$

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n),$$

$$F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) = \{ \lambda_j \in [a_j, b_j] :$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in F_\eta(j, k) \}.$$

Застосуємо лему 3., щоб оцінити зверху лебегові міри множин $F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j)$, $r+1 \leq j \leq n$. Для цього запровадимо такі многочлени:

$$R_j(\mu, k) = \mu^r (\mu - A(k)T)^{j-r-1}, \quad r+1 \leq j \leq n.$$

Визначник $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = \overline{r+1, n}$, розвинемо за елементами його останнього стовпця, а до одержаного розвинення застосуємо диференціальний вираз $R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right)$. У результаті дістанемо співвідношення

$$\begin{aligned} R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) &= (j-r-1)! A^{j-1}(k) \times \\ &\times e^{\lambda_j A(k)T} T^r \Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda}), \quad r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (29)$$

Зазначимо, що для фіксованих λ_q , $q \neq j$, визначник $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$ при $j = r+1, \dots, n$, є квазімногочленом змінної λ_j , модулі показників експонент якого не перевищують $|A(k)|T$. Якщо $\vec{\lambda} \in F_\eta(j, k)$, то з формул (29) та означення множини $F_\eta(j, k)$ випливає, що

$$\begin{aligned} \left| R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) \right| &\geq |A(k)|^{j-1} T^r \times \\ &\times e^{\lambda_j \operatorname{Re} A(k)T} \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda}), \quad r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (30)$$

Степінь многочлена $R_j(\mu, k)$, $j = r+1, \dots, n$, за змінною μ дорівнює $(j-1)$, а

$$\begin{aligned} |\partial^s R_j(A(k)T, k) / \partial \mu^s| &\leq C_9 |A(k)|^s, \\ 0 \leq s &\leq j-1, \quad C_9 > 0, \end{aligned}$$

де стала C_9 не залежить від k . Тому з оцінок (30) на підставі леми 3 отримуємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) &\leq C_{10} |A(k)| \times \\ &\times \left(\frac{\xi_j(k)}{|A(k)|^{j-1} \xi_{j-1}(k)} \right)^{1/(j-1)} \leq C_{11} |k|^{-p-\tilde{\varepsilon}_j}, \quad (31) \\ j &= r+1, \dots, n, \end{aligned}$$

де $\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_0/((j-1)2^{n-j+2})$, а стала $C_{11} > 0$ не залежить від вибору значень $\lambda_q \in [a_q, b_q]$, $q = 1, \dots, n$, $q \neq j$. Інтегруючи оцінки (31), з рівностей (28) отримаємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k) \leq C_{12} |k|^{-p-\tilde{\varepsilon}}, \quad r+1 \leq j \leq n, \quad (32)$$

де $\tilde{\varepsilon} = \min_{r+1 \leq j \leq n} \tilde{\varepsilon}_j$. Тоді з оцінок (32) на підставі нерівностей (27) дістаємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\text{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq (n-r)C_{12}|k|^{-p-\tilde{\varepsilon}}. \quad (33)$$

Враховуючи, що для всіх $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P_n$

$$\prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \geq \prod_{r \geq j > q \geq 1} |a_j - b_q|,$$

і те, що $\varepsilon_{r+1} + \dots + \varepsilon_n < \varepsilon_0$, а

$$\nu_n(k, \vec{\lambda}) = e^{(\lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n) \text{Re} A(k) T} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \times$$

$$\times \frac{|A(k)| C_r^2}{|k|^{p(r+\dots+n-1)+\varepsilon_{r+1}+\dots+\varepsilon_n}}, \quad k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\},$$

з оцінок (1) одержуємо, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконується включення $E_\eta(k) \subset F_\eta(k)$, якщо $\eta > \eta_0$. Тому з оцінки (33) випливає істинність оцінки (26) для $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$.

Для випадку, коли $k \in K_2 \setminus \{\vec{0}\}$, оцінку (26) можна встановити аналогічними міркуваннями.

Теорему доведено. ■

Зауваження 1. Відзначимо, що в теоремі 1. формулювання „для майже всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ “, взагалі кажучи, не можна замінити на формулювання „для всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ “, про що свідчить такий приклад.¹

Приклад. Для задачі

$$\prod_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} - j\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) = 0, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$u|_{t=0} = \varphi_1, \quad u_t|_{t=0} = \varphi_2, \quad u|_{t=2} = \varphi_3,$$

де $(t, x) \in Q_1^2$, безпосереднім підрахунком отримуємо, що при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| = 4|\alpha k| \sin^2(k\alpha) = 4|\alpha k| \sin^2(k\alpha - m\pi) \leq 4|k| |\sin(k\alpha - m\pi)| \leq 4\pi k^2 \left| \frac{\alpha}{\pi} - \frac{m}{k} \right|,$$

де m — довільне ціле число. За теоремою про існування ірраціональних чисел, які як завгодно добре наближаються раціональними [11, с. 48], для довільної додатної функції $\psi(k)$ знайдеться таке ірраціональне число $\alpha/\pi \in (0, \pi^{-1})$, для якого нерівність

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} - \frac{m}{k} \right| < \frac{\psi(k)}{4\pi k^2}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k, m, k \neq 0$. Для вибраного у такий спосіб числа α/π нерівність

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \leq \psi(k)$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k . Це означає, що в загальному випадку у теоремі 1. формулювання „для майже всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ “ не можна замінити на формулювання „для всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ “.

Зауваження 2. Відзначимо, що теореми 2., 1. є точними стосовно експоненційного множника у нерівності (16) в сенсі твердження.

Теорема 2. Для довільного $T > 0$ та довільної додатної функції $\psi : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ такої, що

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \psi(k) / \ln |k| = \infty, \quad (34)$$

нерівність

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq \begin{cases} |k|^{-\eta} e^{\psi(k) + \delta_1(\vec{\lambda}) T \text{Re} A(k)}, & k \in K_1, \\ |k|^{-\eta} e^{\psi(k) + \delta_2(\vec{\lambda}) T \text{Re} A(k)}, & k \in K_2, \end{cases} \quad (35)$$

не може виконуватися для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при жодних $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ та $\eta \in \mathbb{R}$.

□ **Доведення.** Припустимо, що існує вектор $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ такий, що для деякого $\eta \in \mathbb{R}$ нерівність (35) виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$. Легко перевірити, що при виконанні умови (1) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p, k \neq \{0\}$ справджується оцінка

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \leq \begin{cases} C_{13} |k|^\xi e^{\delta_1(\vec{\lambda}) T \text{Re} A(k)}, & k \in K_1, \\ C_{13} |k|^\xi e^{\delta_2(\vec{\lambda}) T \text{Re} A(k)}, & k \in K_2, \end{cases} \quad (36)$$

де $C_{13} > 0, \xi = N(C_r^2 + C_l^2)$. З оцінок (35), (36) випливає, що для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $C_{13} |k|^\xi e^{\eta} \geq e^{\psi(k)}$, а, отже, й нерівність

$$\ln C_{13} + (\xi + \eta) \ln |k| \geq \psi(k), \quad (37)$$

яка суперечить умові (34). З отриманої суперечності випливає твердження теореми. ■

Робота підтримана ДФФД України (проект № 25.1/080).

Література

- [1] Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения, 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
- [2] Бобик І.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для гіперболических рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн., 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
- [3] Бобик І.О. Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 130 с.

¹Таке уточнення теореми 1. можна здійснити в окремих випадках, один з яких описаний у теоремі 2..

- [4] Поля Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
- [5] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
- [6] Пташник Б.И., Штабальок П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения, 1986. – 22, № 4. – С. 669–678.
- [7] Симолюк М.М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999. – 42, № 4. – С. 90–95.
- [8] Симолюк М.М. Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту, 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
- [9] Симолюк М.М. Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ, 2005. – Т. 2. – С. 199–212.
- [10] Симолюк М.М. Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2005. – 193 с.
- [11] Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

ЗАДАЧА С ДВУМЯ КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

И.Е. Бобык^a, М.М. Симолюк^b

^a *Национальный университет “Львівська політехніка”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

^b *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3-б, Львов, 79060, Украина*

Установлены условия существования единственного решения задачи с двумя кратными узлами для линейного факторизованного уравнения с частными производными. Доказано, что такие условия выполняются для почти всех векторов, составленных из коэффициентов факторизации.

Ключевые слова: факторизованное уравнение, двухточечная задача, малые знаменатели.

2000 MSC: 35G30

УДК: 511.2, 517.946

PROBLEM WITH TWO MULTIPLE POINTS OF INTERPOLATION FOR LINEAR FACTORIZED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.O. Bobyk^a, M.M. Symotyuk^b

^a *National University “Lvivska Politechnika”
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

^b *Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine*

In this paper we established the conditions of existing of the unique solution to the problem with two multiple points of interpolation for linear factorized partial differential equations in the spaces of exponential type. We proved that this conditions are satisfied for almost all (respect to Lebesgue measure) values of coefficients of factorization.

Keywords: factorized equation, two-point problem, small denominators.

2000 MSC: 35G30

УДК: 511.2, 517.946