

Врахувавши обмеження на функцію $q_j(x)$, знаходимо методом послідовних наближень розв'язок інтегрального рівняння (14). Підставивши його в (12), знайдемо розв'язок задачі (7), (8) для якого справедливі оцінки (9), (10). Оскільки

$$\left| f_m; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; 2, 2; \Pi \right|_{\alpha} \leq c \left| f; \bar{\gamma}, \bar{\beta}; \lambda_1, \lambda_2; \Pi \right|_{\alpha},$$

то за теоремами 2 і 3 одержуємо оцінку (11).

Права частина нерівності (11) не залежить від m_1, m_2 , а послідовність

$$\begin{aligned} V_{k_j}^{m_1, m_2} &= Z \left((|j| + 2k) \bar{\gamma} + |j| \bar{\beta} \right) D_x^j D_t^k v(t, x), (t, x) \in \Pi, 2k + |j| \leq 2, m_1 > 1, m_2 > 1 \\ &\quad Z(k \bar{\gamma}) \equiv d(k \gamma_1, x) \cdot d(k \gamma_2, t) \} \\ \{ V_{k_j}^{m_1, m_2} &= Z \left((|j| + 2k) \bar{\gamma} + |j| \bar{\beta} \right) D_x^j D_t^k v(t, x), (t, x) \in \Pi, 2k + |j| \leq 2, m_1 > 1, m_2 > 1 \\ &\quad Z(k \bar{\gamma}) \equiv d(k \gamma_1, x) \cdot d(k \gamma_2, t) \} \end{aligned}$$

рівномірно обмежених і рівностепенно неперервних функцій. За теоремою Арцела існують послідовності $\{V_{k_j}^{m_1(i), m_2(l)}\}$ рівномірно збіжні в Π до v_{k_j} . Переходячи до границі $m_1(i) \rightarrow \infty, m_2(l) \rightarrow \infty$ в задачі (6), (7), одержимо, що $u = v_0 e^{-\lambda t}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\gamma}, \bar{\beta}; 0, 0; \Pi)$ і правильна оцінка (4).

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 2. Пукальський І.Д. Нелокальна задача Неймана для параболического рівняння з виродженням. Укр. матем. журн., 1999. Т.51. № 9. С.1232–1244. 3. Пукальський І.Д. О функции Грина нелокальной краевой задачи с вырождениями. – Дифф. уравнения. 1998. Т.34. № 6. С.838–840.

УДК 517.956

Симотюк М. М.
ІППІМ НАН України

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

© Симотюк М. М., 2000

The correctness of nonlocal multipoint problem for the partial differential equations with the constant coefficients is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of a problem are described. The metric theorems of lower bound estimation of characteristic determinants of a problem are established.

Досліджено коректність нелокальної багатоточкової задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Отримано умови існування та єдиності розв'язку даної задачі. Встановлено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Задачі з нелокальними багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншими координатами для диференціальних рівнянь із частинними похідними загалом є, умовно коректні [2,3], а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників [1]. У даній роботі такі задачі розглядаються для рівнянь парного порядку з молодшими членами та ненульовою правою частиною.

1. Нехай $G_{\beta,\delta}$, $\beta > 0, \delta > 0$, позначає простір 2π -періодичних функцій

$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \exp(ikx)$, для яких є скінченною норма $\|\varphi\|_{\beta,\delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k| \exp(\delta|k|^\beta)$. Через

$C^n([0,T]; G_{\beta,\delta})$ позначимо простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$

похідні $\frac{\partial^{s_1+s_2} u(t,x)}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}}$, $0 \leq s_1 + s_2 \leq n$, належать простору $G_{\beta,\delta}$ і як елементи цього

простору є неперервними за t на $[0,T]$. Норма в $C^n([0,T]; G_{\beta,\delta})$ задається формулою

$$\|u\|_{n;\beta,\delta} = \sum_{0 \leq s_1+s_2 \leq n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^{s_1+s_2} u(t,x)}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} \right\|_{\beta,\delta}.$$

2. Розглядається рівняння вигляду

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = \sum_{0 \leq s_1+s_2 \leq 2n} a_{s_1,s_2} \frac{\partial^{s_1+s_2} u(t,x)}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} = F(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

де $a_{s_1,s_2} \in \mathbb{C}$, $0 \leq s_1 + s_2 \leq 2n$, $a_{2n,0} = 1$, Ω – коло одиничного радіуса $R/2\pi Z$. Потрібно знайти розв'язок $u(t,x)$ рівняння (1), який задовольняє умови

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=t_j} - \mu \left. \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=t_{j-1}} = \varphi_j(x), \quad j=1, \dots, 2n, \quad (2)$$

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{2n} \leq T, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad \mu \neq 1, \quad \mu \neq 0, \quad x \in \Omega.$$

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx). \quad (3)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in Z$ є розв'язком нелокальної багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$u_k^{(2n)}(t) + \sum_{0 \leq s_1+s_2 \leq 2n, s_1 < 2n} a_{s_1,s_2} (ik)^{s_2} u_k^{(s_1)} = F_k(t), \quad (4)$$

$$u_k^{(j-1)}(t_j) - \mu u_k^{(j-1)}(t_{j-1}) = \varphi_{jk}, \quad j=1, \dots, 2n, \quad (5)$$

де $F_k(t)$, φ_{jk} , $k \in Z$, – коефіцієнти Фур'є функцій $F(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j=1, \dots, 2n$ відповідно.

Для простоти аналітичних викладень припустимо, що всі корені $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{2n}(k)$ характеристичного рівняння $L(\lambda, ik) = 0$ є простими. Тоді загальний розв'язок рівняння (4)

можна зобразити формулою $u_k(t) = \sum_{q=1}^{2n} C_{kq} f_{kq}(t) + \int_0^t H_k(t, \tau) F_k(\tau) d\tau$,

де $f_{0q}(t) = t^{q-1}$, $f_{kq}(t) = \exp(\lambda_q(k)t)$, $k \neq 0$, $q=1, \dots, 2n$,

$$H_k(t, \tau) = \begin{cases} (t-\tau)^{2n-1}/(2n-1)!, & k=0, \\ \sum_{q=1}^{2n} \exp(\lambda_q(k)(t-\tau)) \prod_{\substack{r=1, \\ r \neq q}}^{2n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))^{-1}, & k \neq 0. \end{cases}$$

З умов (5) для сталих C_{kq} , $q=1, \dots, 2n$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{2n} C_{kq} \left[f_{kq}^{(j-1)}(t_j) - \mu f_{kq}^{(j-1)}(t_{j-1}) \right] = \varphi_{jk} - l_{jk} H_k(t, \tau), \quad j=1, \dots, 2n, \quad (6)$$

де $l_{jk} H_k(t, \tau) \equiv \int_0^{t_j} \frac{\partial^{j-1} H_k(t_j, \tau)}{\partial t^{j-1}} F_k(\tau) d\tau - \mu \int_0^{t_{j-1}} \frac{\partial^{j-1} H_k(t_{j-1}, \tau)}{\partial t^{j-1}} F_k(\tau) d\tau$. Позначимо

через $\Delta(k) = \det \left\| f_{kq}^{(j-1)}(t_j) - \mu f_{kq}^{(j-1)}(t_{j-1}) \right\|_{q,j=1}^{2n}$ – визначник системи (6). Зауважимо, що

$$\Delta(0) = (1-\mu)^{2n} 2! \dots (2n-1)! \neq 0.$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^{2n}([0, T]; G_{\beta, \delta})$ необхідно і досить, щоби виконувались умови

$$\Delta(k) \neq 0, \quad k \in Z \setminus \{0\}. \quad (7)$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 3.1 з розд. 2 [1].

4. Припустимо, що умови (7) виконуються. Тоді

$$u_k(t) = \sum_{j,q=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \left[\varphi_{jk} - l_{jk} H_k(t, \tau) \right] f_{kq}(t) + \int_0^t H_k(t, \tau) F_k(\tau) d\tau, \quad (8)$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебраїчне доповнення елемента $f_{kq}^{(j-1)}(t_j) - \mu f_{kq}^{(j-1)}(t_{j-1})$ у визначнику $\Delta(k)$. Підставляючи вираз (8) у формулу (3), отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \left\{ \sum_{j,q=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} f_{kq}(t) + \int_0^t H_k(t, \tau) F_k(\tau) d\tau - \sum_{j,q=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \left[\int_0^{t_j} \frac{\partial^{j-1} H_k(t_j, \tau)}{\partial t^{j-1}} F_k(\tau) d\tau - \mu \int_0^{t_{j-1}} \frac{\partial^{j-1} H_k(t_{j-1}, \tau)}{\partial t^{j-1}} F_k(\tau) d\tau \right] f_{kq}(t) \right\}. \quad (9)$$

Ряд (9) може розбігатися, бо модулі виразів $\Delta(k)$, $(\lambda_q(k) - \lambda_r(k))^{-1}$, $1 \leq r < q \leq 2n$, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих k . Якщо $\varphi_j(x) = \sum_{k=-N}^N \varphi_{jk} \exp(ikx)$ і $F(t, x) = \sum_{k=-N}^N F_k(t) \exp(ikx)$, то при виконанні умов (7) завжди існує розв'язок даної задачі, бо в цьому випадку (9) є скінченною сумою. Загалом справедливе твердження.

Теорема 2. Нехай існують сталі $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконуються нерівності

$$|\lambda_q(k)| \leq \gamma_1 |k|^{2n}, \quad \prod_{r=1, r \neq q}^{2n} |\lambda_q(k) - \lambda_r(k)| > |k|^{\gamma_2}, \quad q = 1, \dots, 2n, \quad (10)$$

$$|\Delta(k)| > \exp(-\delta_1 |k|^{2n}). \quad (11)$$

Якщо $F(t, x) \in C([0, T]; G_{2n, \delta_2})$, $\delta_2 > \delta_1 + 2n\gamma_1 T$, $\varphi_j(x) \in G_{2n, \delta_3}$, $\delta_3 > \delta_1 + (2n+1)\gamma_1 T$, $j = 1, \dots, 2n$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^{2n}([0, T]; G_{2n, \delta})$, $\delta < \min\{\delta_2 - \delta_1 - 2n\gamma_1 T, \delta_3 - \delta_1 - (2n+1)\gamma_1 T\}$, який зображається рядом (9) і неперервно залежить від функцій $F(t, x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, 2n$.

Доведення. З нерівностей (10) при $k \neq 0$ випливають оцінки

$$\max_{t \in [0, T]} |f_{kq}^{(r)}(t)| \leq C_1 |k|^{2nr} \exp(\gamma_1 T |k|^{2n}), \quad C_1 > 0, \quad r = 0, \dots, 2n, \quad (12)$$

$$\max_{t, \tau \in [0, T]} \left| \frac{\partial^r H_k(t, \tau)}{\partial t^r} \right| \leq C_2 |k|^{2nr + \gamma_2} \exp(\gamma_1 T |k|^{2n}), \quad C_2 > 0, \quad r = 0, \dots, 2n, \quad (13)$$

$$|\Delta_{j,q}(k)| \leq C_3 |k|^{2n^2(2n-1)} \exp((2n-1)\gamma_1 T |k|^{2n}), \quad C_3 > 0, \quad j, q = 1, \dots, 2n. \quad (14)$$

Нехай $\xi_k = |k|^{2n^2(2n+1)} \exp((2n\gamma_1 T + \delta_1) |k|^{2n})$, $\eta_k = |k|^{4n^2 + \gamma_2} \exp(\gamma_1 T |k|^{2n}) \xi_k$.

Тоді із формули (8) та нерівностей (11) – (14) маємо

$$\max_{t \in [0, T]} |u_k^{(r)}(t)| \leq C_4 \left(\sum_{j=1}^{2n} |\varphi_{jk}| \xi_k + \max_{t \in [0, T]} |F_k(t)| \eta_k \right), \quad C_4 > 0, \quad r = 0, \dots, 2n.$$

Тому при $\delta < \min\{\delta_2 - \delta_1 - 2n\gamma_1 T, \delta_3 - \delta_1 - (2n+1)\gamma_1 T\}$

$$\|u\|_{2n; 2n, \delta} \leq C_5 \left(\sum_{j=1}^{2n} \|\varphi_j(x)\|_{2n, \delta_3} + \|F(t, x)\|_{0; 2n, \delta_2} \right), \quad C_5 > 0.$$

З останньої нерівності випливає доведення теореми.

5. З'ясуємо питання про можливість виконання оцінок (10) – (11). Перша із нерівностей у формулі (10) виконується при $\gamma_1 = \max_{s_1 + s_2 \leq 2n, s_1 < 2n} |a_{s_1, s_2}|$.

Лема 1. Нехай $f(z) = \alpha(z - z_1) \dots (z - z_n)$ – многочлен степеня n . Позначимо:
 $G(f, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq \varepsilon\}$, $\text{mes } A$ – міра Лебега на площині множини A .

$$\text{Тоді } \text{mes } G(f, \varepsilon) \leq \pi n \sqrt[n]{\varepsilon^2 / |\alpha|^2}.$$

Доведення. Якщо точка $z \in \mathbb{D}$ така, що $|z - z_j| > \sqrt[n]{\varepsilon / |\alpha|}$ для кожного $j, j = 1, \dots, n$, то $|f(z)| > \varepsilon$. Значить, $G(f, \varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^n \{z \in \mathbb{D} : |z - z_j| \leq \sqrt[n]{\varepsilon / |\alpha|}\}$, і тоді
 $\text{mes } G(f, \varepsilon) \leq \sum_{j=1}^n \text{mes} \left\{z \in \mathbb{D} : |z - z_j| \leq \sqrt[n]{\varepsilon / |\alpha|}\right\} \leq \pi n \sqrt[n]{\varepsilon^2 / |\alpha|^2}.$

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега на площині) чисел $a_{0,2n} \in \mathbb{C}$ і для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k друга нерівність у формулі (10) виконується при $\gamma_2 > -\frac{12n-1}{4} + 2n^2(2n-1)$.

Доведення проводиться із використанням леми 1 аналогічно до доведення теореми 4.5 з розділу 2 в [1].

Лема 2. Для майже всіх (стосовно міри Лебега на площині) чисел $a_{0,2n} \in \mathbb{C}$ і для всіх (крім скінченної кількості) цілих k виконується нерівність

$$|\lambda_1(k) \dots \lambda_{2n}(k)| > |k|^{-((4n-1)/2 + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (15)$$

Доведення базується на формулі $\lambda_1(k) \dots \lambda_{2n}(k) = \sum_{s_2=0}^{2n} a_{0,s_2} (ik)^{s_2}$ та леми 1.

Теорема 4. Для майже всіх чисел (стосовно міри Лебега на площині) $a_{0,2n} \in \mathbb{C}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n+1}$) векторів $(t_0, t_1, \dots, t_{2n}) \in [0, T]^{2n+1}$ нерівність (11) виконується при $\delta > (4n^2 - 2)\gamma_1 T$ для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k .

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3 в [4]; при цьому модуль визначника $\Delta(k)$ оцінюється знизу на основі нерівностей (10), (15) та оцінок, побудованих за цим визначником функцій $g_j(k), j = 1, \dots, n(2n-1)$, із використанням леми 2 із [5] та леми Бореля-Кантеллі [1].

У випадку, коли справджуються співвідношення

$$t_j = jh/(2n), \quad 0 < h \leq T, \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (16)$$

визначник $\Delta(k), k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{2n} (\exp(\lambda_j(k)t_1 - \mu)) \cdot \prod_{2n \geq q > r \geq 1} (\lambda_q(k) \exp(\lambda_q(k)t_1) - \lambda_r(k) \exp(\lambda_r(k)t_1)). \quad (17)$$

Теорема 5. Для майже всіх (стосовно міри Лебега на площині) чисел $a_{0,2n} \in \mathbb{C}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in (0, T/(2n)]$ для визначника (17) задачі (1), (2), (16) нерівність (11) виконується при $\delta > (3n - 1/2)\gamma_1 T$ для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k .

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 2. Ильків В.С. Многоточечная нелокальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат-лы IX-ой конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР, ч. II, Львов, 1983. С.64–72. 3. Ильків В.С. Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1998. 41. № 4. С.78–82. 4. Штабалуєк П.І., Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1992. 35. С. 210–215. 5. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1977. 13, № 4. С. 637–645.

УДК 621.007.52

Сопронюк Ф.О., Гайдайчук І.В., Гайдайчук Т.І., Тимофієва Є.М.
Чернівецький державний університет імені Ю. Федьковича

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ МЕХАТРОННОЮ СИСТЕМОЮ ЗА ЗАДАНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ

© Сопронюк Ф.О., Гайдайчук І.В., Гайдайчук Т.І., Тимофієва Є.М., 2000

One method for optimal control synthesis for moving robot capture on the given trajectory is proposed. It is based on the special choose of quality functional and leading optimal control synthesis problem to the variation one. The methods of variation theory allows to write in the evident form the system of differential equations for optimal control calculation. That is why the problem of optimal control synthesis can be solved as Cauchy problem.

Пропонується один із методів синтезу оптимального керування для забезпечення руху захвату робота наперед заданою траєкторією. Він базується на спеціальному виборі функціонала якості і зведенні задачі синтезу до варіаційної задачі. Методи варіаційного числення дозволяють виписати в явному вигляді систему диференціальних рівнянь для знаходження оптимального керування. Певним чином вибрані заміни змінних перетворюють одержану систему разом із початковими умовами до задачі Коші.

Відомо [1,3,4], що математична модель геометричного стану простого робота може бути записана у такому вигляді:

$$\begin{aligned} O_j(t) &= O_{j-1}(t) + K_{j-1}(t)[b_{j-1} + (1 - \alpha_j)c_{j-1}^1 \theta_j(t)], \\ K_j(t) &= K_{j-1}(t)C_{j-1}[\alpha_j A_1^T(\theta_j(t)) + (1 - \alpha_j)E], \\ O_0(t) &= 0, \quad K_0(t) = E, \quad j = 1, 2, \dots, m+1, \end{aligned} \quad (1)$$