

УДК 624.071.3

М.М. Шпак

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра БКМ

**ВПЛИВ УСАДКИ БЕТОНУ  
НА ВТРАТИ ПОПЕРЕДНЬОГО НАПРУЖЕННЯ  
В ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ  
ЗІ ЗМІШАНИМ АРМУВАННЯМ**

© Шпак М.М., 2002

**Наведено залежності з визначення величини втрат попереднього напруження в залізобетонних елементах зі змішаним армуванням. Порівняні зміни зусиль для елементів попереднього напруженого типу та зі змішаним армуванням.**

**Вступ**

Норми [1] встановлюють фіксовані значення величин втрат попереднього напруження арматури від усадки бетону в залізобетонних конструкціях. Зокрема для важкого бетону природного тужавіння класів В35 і нижче, В40 та В45 і вище втрати становлять, відповідно, 40, 50 та 60 МПа. Для важкого бетону, підданого тепловій обробці, а також для бетонів інших видів вводяться поправкові коефіцієнти.

Усадка, на відміну від повзучості бетону, проявляється без впливу зовнішнього навантаження, хоча під впливом зусилля обтиснення бетону в ранньому віці в попередньо напружених конструкціях в умовах формування гелевої складової цементного каменю цей вплив, очевидно, певним чином буде проявлятися.

Усадка бетону спричиняє втрати попереднього напруження в арматурі попередньо напружених залізобетонних конструкцій. Ці втрати зумовлені тим, що стискувальні напруження в арматурі, які спричинені усадкою підсумовують з розтягувальними напруженнями, які створюються в попередньо напруженій арматурі. Якщо в арматурі під впливом усадки виникають стискувальні напруження, то в бетоні – розтягувальні, які, накладаючись з напруженнями попереднього обтиснення бетону, призводять до зниження моменту (зусилля) утворення тріщин.

Теоретичні основи розрахунку втрат попереднього напруження від усадки бетону в елементах зі змішаним армуванням.

Правильне врахування усадки становить практичний інтерес, зокрема, в залізобетонних елементах зі змішаним армуванням. Необхідно відмітити, що співвідношення між кількістю попередньо напруженої і звичайної арматури характеризується коефіцієнтом часткового попереднього напруження

$$k_{pp} = \frac{N_{sp}z_{sp}}{N_{sp}z_{sp} + N_s z_s}, \quad (1)$$

де  $N_{sp}$ ,  $N_s$  – розрахункові зусилля відповідно в попередньо напруженій  $S_p$  та звичайній  $S_{np}$  арматурі за умови, що  $N_{sp}z_{sp} + N_s z_s = const$ ;  $z_{sp}$ ,  $z_s$  – плечі внутрішніх пар сил.

Отже, для звичайних залізобетонних елементів  $k_{pp} = 0$ , для “чисто” попередньо напружених –  $k_{pp} = 1$ .

Звичайна арматура, виступаючи внутрішньою перепоною усідання бетону, зменшує деформації усадки порівняно з неармованим або повністю попередньо напруженим елементом. Так в [2] значення деформацій усадки армованої балки рекомендується обчислювати за формулою

$$\varepsilon_{sh,r} = \varepsilon_{sh} e^{-n\mu_s}, \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{sh}$  – відносна деформація вільної усадки бетону;  $\mu_s$  – коефіцієнт армування ненапруженою арматурою.

В [3] вплив звичайної арматури на зменшення втрат попереднього напруження арматури в центральній обтиснутій частині типу колон зі змішаним армуванням рекомендується обчислювати за формулою

$$\sigma_{sh,r} = \varepsilon_{sh}(t) E_s B, \quad (3)$$

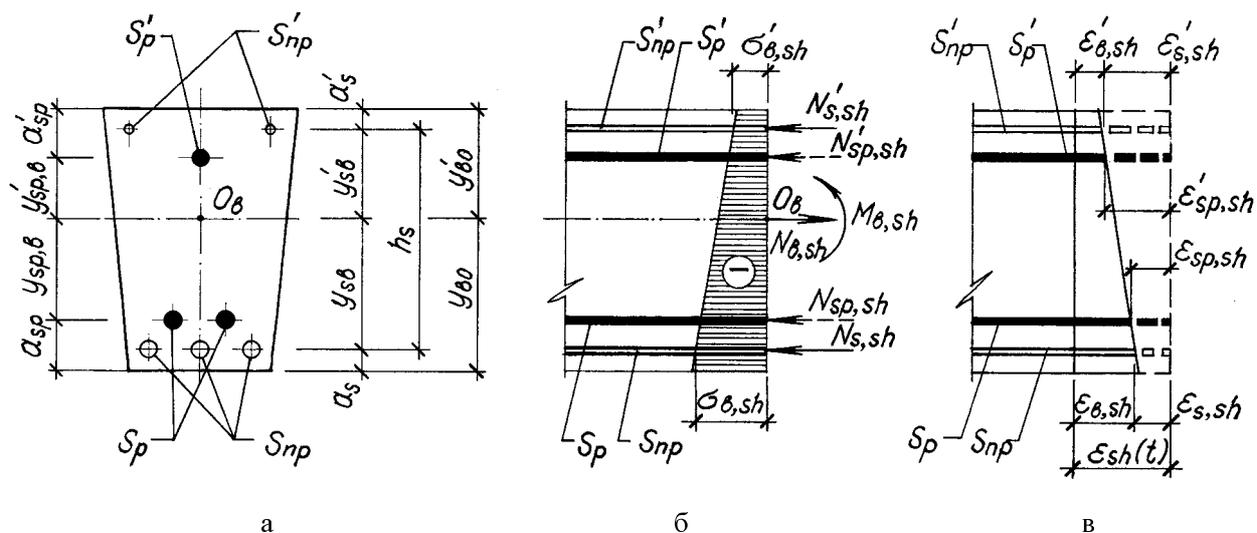
тут

$$B = \frac{1 + \alpha_s \mu_s}{1 + \alpha_s \mu_s \gamma}, \quad (4)$$

де  $\varepsilon_{sh}(t)$  – відносна деформація вільної усадки бетону на момент часу  $t$  визначення втрат попереднього напруження;  $\sigma_{sh,r}$  – втрати попереднього напруження від усадки армованого бетону;  $\gamma$  – функція лінійної повзучості бетону, що визначається залежно від характеристики повзучості  $\varphi_{cr}(t)$  та віку бетону  $\tau_1$ , який приймають за початок відліку часу її проявлення;  $\mu_s = (A_{sp} + A_s)/A_b$  – загальний коефіцієнт армування.

Із формул (3) та (4) випливає, що попередньо напружена арматура також стримує деформації усадки, хоча це не відповідає фізичній моделі напружено-деформованого стану елемента під впливом усадки бетону (див. рисунок).

Розглянемо несиметрично армований елемент довільного профілю з однією віссю симетрії та з подвійною як напруженою  $S_p$ ,  $S_p'$ , так і ненапруженою арматурою  $S_{np}$ ,  $S_{np}'$ , яка має зчеплення з бетоном (рисунок, а). Позначимо власні стискувальні напруження в звичайній арматурі  $S_{np}$  та  $S_{np}'$  від усадки бетону через  $\sigma_{s,sh}$  та  $\sigma'_{s,sh}$ , а власні розтягувальні напруження в бетоні на рівні звичайної арматури – відповідно через  $\sigma_{b,sh}$  та  $\sigma'_{b,sh}$ . Оскільки попередньо напружена арматура не бере участі у формуванні власного напружено-деформованого стану перерізу, спричиненого усадкою бетону, тому втрати зусиль попереднього напруження  $N_{sp}$  та  $N_{sp}'$  у відповідних арматурах  $S_p$  та  $S_p'$  на цьому етапі розрахунку не враховуємо.



Напружено-деформований стан перерізу елемента  
з подвійним змішаним армуванням, спричинений усадкою бетону:  
а – поперечний переріз; б – етюра напружень в бетоні і схема зусиль;  
в – схема вільних і зв'язаних деформацій бетону і арматури;  
 $O_b$  – центр ваги бетонного перерізу

Отже, в перерізі діють відповідні внутрішні зусилля: в бетоні  $M_{b,sh}$  і  $N_{b,sh}$ , а в арматурі  $S_{np}$  і  $S'_{np}$  відповідно  $N_{s,sh}$  і  $N'_{s,sh}$  (рисунок, б).

Складемо рівняння рівноваги внутрішніх зусиль, зумовлених усадкою бетону (знаки зусиль прийнято з урахуванням того, що розтягувальним напруженням присвоюється знак мінус, а стискувальним – знак плюс):

$$N_{b,sh} + N_{s,sh} + N'_{s,sh} = 0; \quad (5)$$

$$M_{b,sh} - N_{s,sh}y_{sb} + N'_{s,sh}y'_{sb} = 0. \quad (6)$$

Оскільки рівнянь два, а невідомих чотири, необхідно скласти два додаткових рівняння сумісності деформацій бетону і арматури. Із рисунка, в випливає, що в будь-який момент часу  $t$  відносна деформація  $\epsilon_{s,sh}$  ненапруженої арматури від усадки бетону повинна дорівнювати відносній деформації вільної усадки бетону  $\epsilon_{sh}(t)$  за вирахуванням відносної деформації розтягання бетону  $\epsilon_{b,sh}$  на рівні центра ваги арматури  $S_{np}$ . Отже, для нижньої ненапруженої арматури  $S_{np}$  запишемо

$$\epsilon_{s,sh} = \epsilon_{sh}(t) - \epsilon_{b,sh}, \quad (7)$$

для верхньої ненапруженої арматури  $S'_{np}$

$$\epsilon'_{s,sh} = \epsilon_{sh}(t) - \epsilon'_{b,sh}. \quad (8)$$

Записуючи формули (7), (8) через напруження і розглядаючи усадку як тривалий процес, який описується математичними залежностями технічного варіанта феноменологічної теорії повзучості (модернізована теорія старіння) [3, 4], запишемо

$$\frac{\sigma_{s,sh}}{E_s} = \epsilon_{sh}(t) + \frac{\sigma_{b,sh}}{E_b} \gamma, \quad (9)$$

$$\frac{\sigma'_{s,sh}}{E_s} = \varepsilon_{sh}(t) + \frac{\sigma'_{b,sh}}{E_b} \gamma. \quad (10)$$

Другі члени формул (9) і (10) – деформації видовження бетону за період часу ( $\tau_1-t$ ) від усадки бетону, зумовлені гальмівним впливом звичайної арматури.

Виразимо внутрішні зусилля (рисунок, б) через напруження в бетоні

$$N_{b,sh} = \frac{(\sigma_{b,sh} y'_{sb} + \sigma'_{b,sh} y_{sb}) A_b}{h_s}, \quad (11)$$

$$M_{b,sh} = \frac{(\sigma'_{b,sh} - \sigma_{b,sh}) I_b}{h_s} \quad (12)$$

та в арматурі  $S_{np}$  і відповідно  $S'_{np}$ :

$$N_{s,sh} = \sigma_{s,sh} A_s, \quad (13)$$

$$N'_{s,sh} = \sigma'_{s,sh} A'_s. \quad (14)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (5), (6), (9), (10) з урахуванням (11)–(14), одержимо напруження від усадки бетону в ненапруженій нижній  $S_{np}$  та верхній  $S'_{np}$  арматурах. У вказаних формулах

$$\sigma_{s,sh} = \varepsilon_{sh}(t) E_s (D_1 - D_2), \quad (15)$$

$$\sigma'_{s,sh} = \varepsilon_{sh}(t) E_s (D_3 - D_4), \quad (16)$$

тут  $D_1 = A_1/A_5$ ,  $D_2 = A_2/A_5$ ,  $D_3 = A_3/A_5$ ,  $D_4 = A_4/A_5$  – коефіцієнти,

$$A_1 = i_b^2 + \alpha_s \mu'_s \gamma (i_b^2 + y_{sb}'^2), \quad (17)$$

$$A_2 = \alpha_s \mu'_s \gamma (i_b^2 - y_{sb} y'_{sb}), \quad (18)$$

$$A_3 = i_b^2 + \alpha_s \mu_s \gamma (i_b^2 + y_{sb}^2), \quad (19)$$

$$A_4 = \alpha_s \mu_s \gamma (i_b^2 - y_{sb} y'_{sb}), \quad (20)$$

$$A_5 = i_b^2 [1 + \alpha_s (\mu_s + \mu'_s) \gamma] + \alpha_s (\mu_s y_{sb}^2 + \mu'_s y_{sb}'^2 + \alpha_s \mu_s \mu'_s \gamma^2) \gamma, \quad (21)$$

$$\mu_s = \frac{A_s}{A_b}, \quad \mu'_s = \frac{A'_s}{A_b}, \quad i_b^2 = \frac{I_b}{A_b}, \quad \alpha_s = \frac{E_s}{E_b}, \quad (22)$$

де  $A_b$ ,  $I_b$  – площа і момент інерції бетонного перерізу;  $A_s$ ,  $A'_s$  – площа нижньої  $S_{np}$  і верхньої  $S'_{np}$  ненапруженої арматури;  $y_{sb}$ ,  $y'_{sb}$  – віддаль від центра ваги бетонного перерізу до центра ваги ненапруженої арматури  $S_{np}$  і  $S'_{np}$  відповідно;  $h_s = y_{sb} + y'_{sb}$  – віддаль між центрами ваги арматур  $S_{np}$  і  $S'_{np}$ ;  $E_s$ ,  $E_b$  – модулі пружності звичайної арматури і бетону.

Напруження в бетоні від усадки на будь-якій віддалі  $y_{bi}$  від центра ваги бетонного перерізу можна обчислити за формулою

$$\sigma_{b,sh,i} = -\mu_s \sigma_{s,sh} \left( 1 \pm \frac{y_{sb} y_{bi}}{i_b^2} \right) - \mu'_s \sigma'_{s,sh} \left( 1 \mp \frac{y'_{sb} y_{bi}}{i_b^2} \right), \quad (23)$$

тут верхні знаки приймають для бетонного волокна, розташованого знизу від центра ваги бетонного перерізу, нижні знаки – для волокна, розташованого відповідно зверху.

Напруження в арматурі  $S_i$  і  $S_i'$  довільного  $i$ -го рівня від усадки бетону визначають за формулою

$$\sigma_{sh,i} = \frac{E_{si}}{E_s h_s} [\sigma_{s,sh}(y'_{sb} \pm y_{sb,i}) + \sigma'_{s,sh}(y_{sb} \mp y_{sb,i})], \quad (24)$$

тут  $E_{si}$  – модуль пружності  $i$ -го ряду арматури; верхні знаки приймають для  $i$ -го ряду арматури  $S_i$ , розташованої знизу від центра ваги бетонного перерізу, нижні знаки – для  $i$ -го ряду арматури  $S_i'$ , розташованої зверху.

Для елементів зі змішаним подвійним армуванням втрати в попередньо напруженій арматурі від усадки бетону визначатимуться деформаціями вкорочення звичайної арматури на тому ж рівні, тобто, будуть дорівнювати напруженням у звичайній арматурі, які можна обчислити за формулою

$$\sigma_{sp,sh,i} = \frac{E_{sp}}{E_s h_s} [\sigma_{s,sh}(y'_{sb} \pm y_{sp,bi}) + \sigma'_{s,sh}(y_{sb} \mp y_{sp,bi})], \quad (25)$$

де  $E_{sp}$  – модуль пружності попередньо напруженої арматури.

Так, при симетричній звичайній арматурі попередньо напружених колон зі змішаним армуванням втрати попереднього напруження від усадки бетону можна обчислити, прийнявши у формулах (14)–(22), (25)  $\mu_s = \mu'_s$  та  $y_{sb} = y'_{sb}$ , за такою спрощеною формулою:

$$\sigma_{sp,sh} = \frac{\varepsilon_{sh}(t) E_{sp}}{1 + 2\alpha_s \mu_s \gamma}. \quad (26)$$

Для елемента з подвійною звичайною арматурою  $S_{np}$  і  $S_{np}'$  та поодиначним армуванням попередньо напруженою арматурою  $S_p$ , розташованою на віддалі  $y_{sp,b}$  від центра ваги бетонного перерізу, втрати попереднього напруження від усадки бетону можна обчислити за формулою

$$\sigma_{sp,sh} = \frac{E_{sp}}{E_s h_s} [\sigma_{s,sh}(y'_{sb} + y_{sp,b}) + \sigma'_{s,sh}(y_{sb} - y_{sp,b})]. \quad (27)$$

Приклад визначення втрат попереднього напруження від усадки бетону та аналіз результатів

З метою дослідження впливу звичайної арматури  $S_{np}$  на значення втрат попереднього напруження арматури  $S_p$ ,  $S_p'$  в балках зі змішаним армуванням розроблено відповідну програму комп'ютерного розрахунку. В основу програми покладено фізичну модель, показану на рисунку і використано методику [3, 4] з урахуванням вищевикладеного. Для аналізу вибрано конструкції балок перерізом 120×240 мм, які подібні до досліджених експериментально [5], з однаковим початковим зусиллям обтиснення бетону. Попередньо напруженою арматурою  $S_p$ ,  $S_p'$  прийнято канати класу К-7, ненапруженою арматурою  $S_{np}$ ,  $S_{np}'$  – звичайна арматура класу А-III. Початкове значення попереднього напруження арматури  $S_p$  та  $S_p'$  з урахуванням перших втрат

прийнято таке, що дорівнює  $\sigma_{sp,1} = \sigma'_{sp,1} = 800$  МПа. Для порівняння розглянуто повністю попередньо напружені балки типу ПН, які армовані тільки канатами ( $a_{sp} = a'_{sp} = 5,5$  см), балки зі змішаним армуванням, тобто частково попередньо напружені типу ЧПН і ненапружені балки типу НП армовані звичайною арматурою ( $a_s = a'_s = 2,5$  см). Для балок ЧПН коефіцієнт  $k_{pp}$  змінюється в діапазоні від нуля до одиниці, і визначається за формулою (1). Коефіцієнт армування прийнятий близьким до граничного.

Бетон важкий класу В40 природного тужавіння складу Ц:П:Щ = 1:0,78:1,94 з витратою води  $W = 208$  л/м<sup>3</sup> бетону. Передавальна міцність бетону  $R_{bp} = 28$  МПа у віці  $\tau_1 = 14$  діб. Модуль пружності бетону з моменту обтиснення і висихання дорівнює  $E_b = 0,32 \times 10^5$  МПа. У разі наявності даних про дозування складових бетонної суміші без пластифікаторів нормативне значення міри повзучості визначено за формулою

$$C_n(t) = 15,5 \cdot 10^{-5} \frac{W}{B + \Delta R}, \quad (28)$$

де  $\Delta R$  – збільшення міцності бетону після його обтиснення, прийняте таким, що дорівнює 4 МПа.

Отже,  $C_n(t) = 15,5 \cdot 10^{-5} \cdot 208 / (40 + 4) = 7,33 \cdot 10^{-5}$  МПа<sup>-1</sup>.

Нормативне значення усадки бетону обчислено за формулою (2.33) [3]

$$\varepsilon_{sh,n} = \varphi W^{2/3}, \quad (29)$$

де  $\varphi$  – безрозмірний коефіцієнт, який приймають для важкого бетону  $0,14 \cdot 10^{-6}$ . Отже,  $\varepsilon_{sh,n} = 0,14 \cdot 10^{-6} \cdot 208^{2/3} = 49 \cdot 10^{-5}$ .

Кінцеві значення параметрів повзучості і усадки в момент часу  $t$  визначено за формулами (2.30) і (2.31) [3]

$$\varphi_{cr}(t) = C_n(t) E_b \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_t, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{sh}(t) = \varepsilon_{sh,n} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_t, \quad (31)$$

де  $\xi_i, \zeta_i$  – коефіцієнти, які враховують відхилення фактичних умов роботи елемента від прийнятих середніх;  $\xi_t, \zeta_t$  – коефіцієнти, які враховують проміжкові значення  $\varphi_{cr}(t), \varepsilon_{sh}(t)$  в частках від граничних, визначених при  $t = \infty$ .

Так, за умов, що  $\tau_1 = 14$  діб, питома вологість середовища – 70 %, питома поверхня балок –  $0,25$  см<sup>-1</sup>, за табл. 2.12 [3] коефіцієнти  $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0,85, \xi_3 = 0,87, \xi_t = 1$ , а характеристика повзучості за формулою (30) –  $\varphi_{cr}(t) = 1,73$ . Тоді коефіцієнт  $\gamma = 2,25$  ([3], табл. 2.10).

За тих самих умов коефіцієнти  $\zeta_1 = 0,98, \zeta_2 = 0,93, \zeta_3 = 0,91, \zeta_t = 1$ , а кінцеве значення усадки за формулою (31) –  $\varepsilon_{sh}(t) = 40 \cdot 10^{-5}$ .

Втрати попереднього напруження в арматурі  $S_p, S'_p$  та напруження стискання в арматурі  $S_{np}$  від усадки бетону визначені за формулами (15), (16) та (25). Рівнодійне зусилля  $\Delta P$  всіх втрат для балки повністю попередньо напруженої типу ПН і відповідно для балок зі змішаним армуванням типу ЧПН обчислено за формулами

$$\Delta P_p = \sigma_{sp,sh} A_{sp} + \sigma'_{sp,sh} A'_{sp}, \quad (32)$$

$$\Delta P_{pp} = \Delta P_p + \sigma_{s,sh} A_s + \sigma'_{s,sh} A'_s \quad (33)$$

Результати обчислень наведені в таблиці.

### Характеристики досліджених параметрів

Тип балок	$k_{pp}$	$A_s$ см <sup>2</sup>	$A_{sp}$ см <sup>2</sup>	$\sigma_{b,sh}$ МПа	$\sigma_{s,sh}$ МПа	$\sigma_{sp,sh}$ МПа	$\Delta P_i$ кН	$\frac{\sigma_{sp,sh,i}}{\sigma_{sp,sh,ПН}}$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta P_p}$
ПН	1	0,001	2,838	0	79,99	72,0	20,46	1	1
ЧПН	0,82	1,425	2,365	-1,16	67,60	63,1	24,58	0,88	1,20
ЧПН	0,70	2,850	1,892	-2,03	58,35	56,5	27,33	0,78	1,33
ЧПН	0,50	4,273	1,419	-2,7	51,18	51,4	29,18	0,71	1,42
ЧПН	0,34	5,697	0,946	-3,24	45,46	47,3	30,39	0,66	1,48
ЧПН	0,17	7,121	0,473	-3,68	40,79	44,0	31,14	0,61	1,52
НП	0	8,545	0,001	-4,04	36,90	41,2	31,55	0,57	1,54

З аналізу даних таблиці випливає, що усадка бетону балок типу ЧПН зі змішаним армуванням зменшується в 2,17 раза в міру зменшення коефіцієнта часткового попереднього напруження  $k_{pp}$ . Одночасно під впливом усадки зменшуються напруження в звичайній арматурі  $S_{np}$  та втрати попереднього напруження в арматурі  $S_p$ . Зменшення усадки призводить до зменшення втрат попереднього напруження ЧПН-балок. Так, в разі  $k_{pp} = 0,17$  втрати  $\sigma_{sp,sh}$  становлять 0,61 від втрат ПН-балок. Зі зменшенням кількості звичайної арматури, або те ж саме, що і зі зростанням  $k_{pp}$ , в ній збільшуються стискувальні напруження, що пов'язане зі зростанням деформацій усадки. Деформація усадки ПН-балок дорівнює відносній деформації вільної усадки бетону  $\epsilon_{sh}(\infty) = 41 \cdot 10^{-5}$ , а НП-балок –  $\epsilon_{sh}(\infty) = 18,5 \cdot 10^{-5}$ , тобто в 2,17 раза меншою.

Однак особливу увагу треба звернути на рівнодійне зусилля втрат попереднього обтиснення бетону, яке для ПН-балок ( $k_{pp} = 1$ ) становило 20,46 кН, а для НП-балок ( $k_{pp} = 0$ ) – 31,6 кН, що в 1,54 раза більше. З цієї причини вигіднішим є застосування якомога міцніших сталей, що призводить до зменшення коефіцієнта армування перерізу. Крім того, надмірне насичення перерізу звичайною арматурою з часом може призвести до появи тріщин, про що свідчать високі напруження розтягання бетону  $\sigma_{b,sh}$  для ЧПН-балок і НП-балок у діапазоні зміни  $k_{pp}$  від 0,34 до 0.

### Висновки

В елементах зі змішаним армуванням звичайна арматура стримує деформації вільної усадки бетону, що зумовлює зменшення втрат попереднього напруження. Усадка армованого бетону порівняно з неармованим може бути меншою більше ніж у два рази. Усадкові деформації і пов'язані з ними напруження в арматурі  $S_{np}$  і  $S_p$  призводять до втрат рівнодійного зусилля обтиснення бетону, яке зростає в міру насичення перерізу арматурою. Як і в нормах проектування [1], під час обчислення рівнодійного зусилля обтиснення бетону напруження в звичайній арматурі потрібно приймати такими, що дорівнюють

втратам попереднього напруження від усадки, але значення цих втрат залежить від кількості звичайної арматури.

1. СНиП 2.03.01-84\*. *Бетонные и железобетонные конструкции. Госстрой СССР.* – М., 1989, – 80 с. 2. *Бабич Є.М., Борисюк О.П., Коцебчук П.П. Залізобетонні балки і плити зі змішаним армуванням.* – Рівне, 1997. – 134 с. 3. *Гольшев А.Б. и др. Проектирование железобетонной конструкции: Справочное пособие / А.Б.Гольшев, В.Я.Бачинский и др.; Под ред. А.Б.Гольшева.* – 2-е изд., перераб. и доп. – К., 1984. – 128 с. 4. *Гольшев А.Б., Полицук В.П., Руденко И.В. Расчет железобетонных стержневых систем с учетом фактора времени.* – К., 1984. – 128 с. 5. *Шпак М.М., Стасюк М.І. Аналіз тріщиностійкості залізобетонних балок зі змішаним армуванням під впливом повзучості обтиснутого бетону // Будівельні конструкції: Міжвідом. наук.-техн. зб.* – К., 1999. – Вип. 50. – С. 292–298.