

## СЕКЦІОНУВАННЯ БАЗОВОЇ МАТРИЦІ ДИСКРЕТНОГО ГАРМОНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ДАНИХ

© Никифорчин Р.Б., Процько І.О., 2006

**Розглянуто програмну модель визначення еквівалентних циклічних секцій для матриці показників і матриці знаків дійсного базису дискретного гармонічного перетворення даних. Результати програмної моделі можуть застосовуватись для проектування розподілу завантаження ресурсів розподілених обчислювальних структур та створення ефективних алгоритмів виконання перетворень.**

**The program model of determination the equivalent sections of the matrix of arguments and signs of the real discrete harmonic transform basis is considered. The program can be used for scheduling design on the computing distributed structures and for implementation different efficient algorithms of discrete harmonic transform.**

### Вступ

Для сучасних комп'ютерних засобів здійснюють дослідження, моделювання, аналіз для підвищення ефективності виконання різноманітних прикладних задач. У термін "ефективність обчислювального процесу" включають оптимальну мінімізацію різноманітних як апаратних, так і програмних чинників. До них зараховують: міру складності та кількість арифметичних операцій в обчислювальному алгоритмі; необхідну ємність пам'яті і, відповідно, кількість операцій вводу-виводу для заданого обсягу задачі; продуктивність виконання інструкцій за одиницю часу та інші [1]. Для підвищення обчислювальної продуктивності та зменшення часової характеристики ефективного виконання прикладної задачі важливою є можливість декомпозиції алгоритму на незалежні частини та їхнє паралельне виконання на багатопроцесорних обчислювальних структурах. В цьому аспекті актуальним є розподіл обчислювального процесу прикладної задачі на істотно незалежні частини з мінімальною кількістю виконання операцій обміну між ними.

Тому є актуальним дослідження і розвиток гнучких та універсальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень послідовностей для виконання різноманітними обчислювальними системами відповідно до вимог прикладного застосування.

### Аналіз останніх досліджень

Більшість сучасних інформаційних технологій застосовують алгоритми, що ґрунтуються на основі одновимірного та багатовимірного матричного описання. Для ефективного обчислення сформовані матриці секціонуються, далі секції можуть ділитись на блоки, що можуть мати різні виміри та обсяги відповідних типів даних [2]. Одним з підходів в теорії синтезу ефективних алгоритмів дискретних перетворень є представлення базисної матриці у вигляді добутку скінченної кількості матриць із зручною для алгоритмізації структурою (задача факторизації) [3,4]. Однак здебільшого факторизація не відповідає конкретно достатній ефективності виконання обчислень.

### Постановка проблеми

Для обчислювального процесу задач цифрової обробки інформації найхарактернішим є процедурний рівень паралельного оброблення частин. Детальний аналіз та визначення характеристик дійсного базису дискретного гармонічного перетворення робить схему обчислювального алгоритму перетворень змінного обсягу ефективнішою, визначаючи незалежні частини алгоритму і скорочуючи кількість операцій для їхнього обчислення.

## Цілі статті

Аналіз дійсного базису дискретного гармонічного перетворення даних та визначення параметрів для формування секцій, що підвищують ефективність обчислювального процесу в багатопроекторних комп'ютерних середовищах.

## Основний матеріал

### 1. СЕКЦІОНУВАННЯ БАЗИСНОЇ КВАДРАТНОЇ МАТРИЦІ

Подання дискретного гармонічного перетворення у матричній формі має вигляд:

$$X = W^* x, \quad (1)$$

де  $W$  – базисна квадратна матриця ( $N \times N$ ) перетворення;  $X, x$  – матриці-стовпці вихідної послідовності  $X(n)$  та вхідної послідовності  $x(n)$  з  $n=0, \dots, N-1$ . Дискретне гармонічне перетворення з базисом  $W$  зводиться до обчислення вихідної послідовності  $X(n)$  обсягом  $N$ , що дорівнює цілій кількості з множини натуральних чисел. Для гармонічних перетворень ортонормований базис містить набір гармонік з кратними частотами, а саме, для дискретного перетворення Фур'є  $W = \exp(-j2\pi kn/N)$ , для дискретного перетворення Хартлі  $W = \cos(2\pi kr/N)$ , для дискретного косинусного перетворення  $W = \cos(\pi(2n+1)k/2N)$ , де  $n, k=0, \dots, N-1$ .

Запропоновано підхід [5], пов'язаний з декомпозицією структури базисної матриці на порівняно незалежні частини. В основу секціонування покладено використання твірних одновимірних масиву, що визначається на підставі підстановки як елементів двох рядків базисної квадратної матриці аргументів базисних функцій перетворення. Приклади твірних масивів для косинусної частини перетворення Хартлі для обсягів:

$N=13, P(n) = P_1(n) = (1, 2, 4, 5, 3, 6);$

$N=17, P(n) = P_1(n_1) P_2(n_2) = (1, 2, 4, 8) (3, 6, 5, 7);$

$N=30, P(n) = P_1(n_1) P_2(n_2) P_3(n_3) = (1, 2, 4, 7) (3, 6) (5);$

$N=44, P(n) = P_1(n_1) P_2(n_2) = (1, 3, 9, 5, 7) (2, 4, 8, 6, 10);$

$N=64, P(n) = P_1(n_1) P_2(n_2) P_3(n_3) P_4(n_4) = (1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8).$

Твірний одновимірний масив  $P(n)$ , як видно з наведених прикладів, може складатись як з однієї підматриці  $P_1(n)$ , так і з декількох  $P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_k(n_k)$ . Розмірність  $n = (n_1+n_2+\dots+n_k)$  твірних масиву  $P(n)$  залежить від обсягу та базисної функції дискретного гармонічного перетворення.

Формування матриці аргументів за твірним масивом задає структуру секцій і блоків матриць аргументів і матриць знаків, які в сукупності становлять цілісність базису дискретного гармонічного перетворення. Еквівалентна структура секцій і блоків матриць аргументів і матриць знаків відповідає однаковій розмірності і властивостям їхніх матриць і секцій, в яких можна виділити однакові блоки з різними елементами.

Твірний масив:  $(1, 3, 9, 5, 15, 13, 7, 11) (2, 6, 14, 10) (4, 12) (8)$

|   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |   |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|---|---|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 2  | 6  | 2 | 6 | 4  | 4  | 8  | + | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - | + | - | 0 |   |
| 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 6 | 1 | 6  | 2  | 6 | 2 | 4  | 4  | 8  | + | - | + | - | - | + | - | + | + | + | - | - | + | - | + | 0 |
| 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 2  | 6  | 2 | 6 | 4  | 4  | 8  | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - | + | + | + | - | 0 |   |
| 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 6  | 2  | 6 | 2 | 4  | 4  | 8  | + | - | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | - | + | 0 |   |
| 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 2  | 6  | 2 | 6 | 4  | 4  | 8  | - | - | + | - | + | + | - | + | + | + | - | - | + | - | 0 |   |
| 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 6  | 2  | 6 | 2 | 4  | 4  | 8  | - | + | - | + | + | - | + | - | + | + | - | - | + | - | 0 |   |
| 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 2  | 6  | 2 | 6 | 4  | 4  | 8  | + | - | + | + | - | + | - | - | - | - | + | + | + | - | 0 |   |
| 5 | 1 | 3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 7 | 6  | 2  | 6 | 2 | 4  | 4  | 8  | - | + | + | - | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | 0 |   |
| 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 4  | 4  | 4 | 4 | 8  | 8  | 16 | + | + | - | - | + | + | - | - | + | - | + | - | 0 | 0 | - |   |
| 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 4  | 4  | 4 | 4 | 8  | 8  | 16 | + | - | - | + | + | - | - | + | - | + | - | + | 0 | 0 | - |   |
| 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 4  | 4  | 4 | 4 | 8  | 8  | 16 | - | - | + | + | - | - | + | + | + | - | + | - | 0 | 0 | - |   |
| 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 4  | 4  | 4 | 4 | 8  | 8  | 16 | - | + | + | - | - | + | + | - | - | + | - | + | 0 | 0 | - |   |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8  | 8  | 8 | 8 | 16 | 16 | 0  | + | - | + | - | + | - | + | - | 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | + |   |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8  | 8  | 8 | 8 | 16 | 16 | 0  | - | + | - | + | - | + | - | + | 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | + |   |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 16 | 16 | 0 | 0 | 16 | 16 | 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | + | + |   |

Рис.1. Еквівалентно-структурні матриці аргументів та знаків для косинусної частини дискретного перетворення Хартлі обсягом  $N=32$

Для обсягів перетворення  $N=2^n$  узагальнена кількість секцій -s для косинусної частини в базисній матриці на основі цього підходу подана у вигляді табл. 1, де для кожного N перелічено і показано розмірність кожної секції.

Таблиця 1

| N | 8 | 16       | 32                | 64                            | 128                                          | ... $2^n$                                                               |
|---|---|----------|-------------------|-------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| s | 1 | 4,1<br>1 | 8,4,1<br>4,1<br>1 | 16,8,4,1<br>8,4,1<br>4,1<br>1 | 32,16,8,4,1<br>16,8,4,1<br>8,4,1<br>4,1<br>1 | $2^{n-2}, 2^{n-1}, \dots, 2^0$<br>$2^{n-1}, \dots, 2^0$<br>...<br>$2^0$ |

Структура розміщення секцій у базисній матриці аргументів і відповідній матриці знаків задає процес обчислення дискретного перетворення послідовностей довільного обсягу. Так, аналіз розміщення секцій та можливих в ній блоків показує, що секція або блок формується на основі твірної масиви  $P(n)$  або підмасиви  $P_k(n_k)$ , циклічним зсувом ліворуч. Кожен наступний рядок секції або блока одержаний на основі попереднього за твірним підмасивом, циклічно зсунутим ліворуч. Отже, секції є двовимірно лівоциркулянтними або циклічні ліворуч матриці та повністю визначаються за твірним підмасивом.

## 2. ПАРАМЕТРИ ЗАДАННЯ СТРУКТУР БАЗИСНОЇ МАТРИЦІ

Побудова і аналіз структур базисної матриці — трудомісткий процес, особливо для значних обсягів перетворення. Тому програмна модель структури базисної матриці перетворення за певними параметрами визначає двовимірні масиви матриць аргументів базису і відповідних еквівалентно-структурних матриць знаків. Розмірність  $n$  твірної масиви  $P(n)$  залежить від обсягу  $N$  та базисної функції дискретного гармонічного перетворення.

У програмній моделі для конкретних обсягів  $N$  визначаються параметри твірної масиви  $P(n) = P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_k(n_k)$  :

- кількість підматриць –  $k$ ;
- кількість елементів у кожній  $P_i(n_i)$  підматриці  $(t_1), (t_2), \dots, (t_k)$  ;
- значення першого елемента кожної підматриці  $(p_1), (p_2), \dots, (p_k)$ .

Наступним етапом у програмній моделі є визначення кількості секцій та кількості горизонтально і вертикально однотипних секцій і блоків, що входять в структуру базисної матриці перетворення. А також, враховуючи специфічність секцій і блоків структури (рис. 1, 2), обчислюють значення першого елемента секцій і блоків.

Наприклад, для обсягу перетворення  $N=51$  (на рис.2 подано структуру), що має в твірному масиві  $P(n) = P_1(n_1)P_2(n_2)P_3(n_3)P_4(n_4) = (1, 2, 4, 8, 16, 19, 13, 25) (3, 6, 12, 24) (5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23) (9, 18, 15, 21)$  такі параметри:  $k=4$ , з  $(t_1=8, t_2=4, t_3=8, t_4=4)$ ,  $(p_1=1, p_2=3, p_3=5, p_4=9)$ , кількість секцій рівна 24. Серед однакових секцій по горизонталі є по дві типу 2, `4 в одному рядку та по вертикалі 4, “2 в другому рядку та по вертикалі відповідні типи 2, `4 та 4, “2. Типи секцій порівнюють і визначають за значенням першого елемента  $(v_1) (v_2) \dots (v_{24})$  кожної з 24 .

Секція 3 може бути сформована циклічним зсувом ліворуч кожного наступного рядка за твірною підматрицею  $P_3(n_3) = (5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23)$  інші секції подано:

Отримані значення кількості секцій з відповідними параметрами та кількості вертикально однотипних секцій або блоків, що входять в структуру базисної матриці перетворення, визначають схему та складність організації та виконання обчислень гармонічних перетворень конкретного обсягу  $N$ . Для кількості визначених секцій виконують ефективні згортки над двома послідовностями. Одна послідовність циклічної згортки обсягом  $t_j$  формується, за першим елементом  $p_i$  з твірної підматриці  $P_i(n_i)$ .

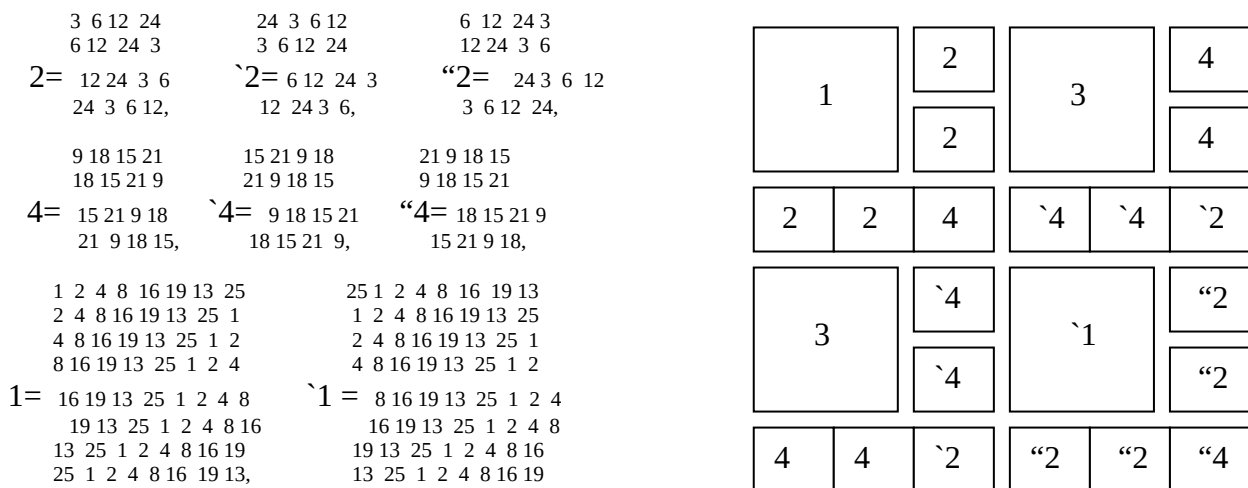


Рис. 2. Структура матриці аргументів косинусної частини перетворення Фур'є для обсягу  $N=51$

Друга послідовність визначається з переставлених за  $P(n)$  вхідних даних обсягом  $n$  та координатами стовпця, у якому розміщено перший елемент  $v_1$  цієї підматриці. Загальний обсяг об'єднаних вхідних даних дорівнює сумі кількості елементів у всіх циклах  $n = (t_1) + (t_2) + \dots + (t_s)$ .

### 3. БЛОК СХЕМА АЛГОРИТМУ СЕКЦІОНУВАННЯ БАЗИСНОЇ МАТРИЦІ

Блок-схема алгоритму послідовності формування вихідних даних секціонування в програмній моделі подана на рис.3. Формування значень твірного масиву розглянуто в [7], який визначається на підставі підстановки за двома рядками базисної матриці аргументів дискретного гармонічного перетворення.



Рис.3. Блок-схема алгоритму послідовності формування вихідних даних секціонування

Наступними етапами в алгоритмі програмної моделі є створення відповідних масивів даних для секціонування та, відповідно, формування вихідної інформації про еквівалентно циклічні секції матриць показників і знаків дійсного базису перетворення. У табл. 2 подано основні члени класу **Sectioner** об'єктно-орієнтованої програми виконання секціонування.

Таблиця 2

```
/**
 * Base class that implements all calculation functions */
class Sectioner
{
protected:

TDataType m_iSize; /**Size of input data*/
TDataType m_iBaseSize; /**Number used to calculate matrix*/
TDataType m_iWorkLine; /**index of row with first '1'*/
TDataType* m_pMovesArray; /**pointer to moves array*/
TDataType m_iMovesCyclesCount; /**count of cycles of moves array*/
TDataType* m_pMovesCyclesArray; /**pointer to array with sizes of
each moves cycle*/
TDataType* m_pSubMatrixLine; /**pointer to array with first line of
current submatrix*/
bool *m_pSignesLine; /**pointer to array with signes of current
submatrix*/
TDataType* m_pRowHeights; /**pointer to result of submatrixes of
current column */

// used for optimization
TDataType m_iNumCalculatedRows; /**count or calculated submatrixes in
current column*/
TDataType* m_pFirstElements; /**first elemnts of calculated
submatrixes in current column, used for searching similar rows*/
TFloatDataType* m_pTempResult; /**pointer to current Temp result */
TFloatDataType* m_pCurrentTempResult; /**pointer to current result */
/***/

virtual void CreateMovesCylcle(const TDataType iFirstElem,
TDataType* pDataArray, TDataType& iLineSize) = 0; /** creates cycle
```

## Висновки

Розглянуто секціонування дійсного базису дискретного гармонічного перетворення даних. Використання твірного масиву  $P(n)$  і його параметрів приводить до однотипного підходу до виконання секціонування. Результати розробленої програмної моделі можуть застосовуватись для створення ефективних алгоритмів виконання перетворень, організації обчислення ДПХ для проектування обчислювальних засобів послідовностей довільного обсягу. Окреме обчислення секцій базису дає змогу розпаралелювати процес обчислення та проектувати розподіл завантаження ресурсів паралельних структур, підвищуючи швидкодію опрацювання інформації.

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М., 1979. 2. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Под ред. Т.С.Хуанга. – М., 1984. 3. Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. – М.,1990. 4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М., 1989. 5. Процько І.О. Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі // Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2004. – №522. – С.85–89. 6. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.– М., 1983. 7. Никифорчин Р.Б., Процько І.О. Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних // Вісник НУ “Львівська політехніка”. – №530. – 2005. – С.175–180.