ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.718 № 718, (2011) с. 46–53

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.718 No 718, (2011) 46–53

РОЗВ’ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗСУВАМИ АРГУМЕНТІВ

В.С. Ільків

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 2 грудня 2011 р.)

Встановлено умови існування та єдиності розв’язку задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною t з одним параметром для безтипної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною, яка містить значення шуканого розв’язку у точках, зсунутих на сталі величини ξ_j за просторовою змінною $x=(x_1,\ldots,x_p)$. Розв’язок шукається у класі просторів Соболєва вектор-функцій. Задача є некоректною і пов’язаною з проблемою малих знаменників, для оцінювання яких використано методику метричного підходу. Доведено однозначну розв’язність задачі з ймовірністю одиниця на множині зсувів ξ_j, встановлено рівномірні оцінки розв’язку, які виконуються з ймовірністю близькою до одиниці.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, нелокальні умови, простори Соболєва, малі знаменники.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946+511.37

I. Постановка задачі

В області $\mathcal{D}^p=[0,T]\times\Omega_{2\pi}^p$ — декартовому добутку відрізка $[0,T]$ довжини $T>0$ часової змінної t та p-вимірного тора $\Omega_{2\pi}^p$ вектора $x=(x_1,\ldots,x_p)$ просторових змінних $x_1,\ldots,x_p$, де $p>1$, розглядається задача з нелокальною умовою за часом для анізотропної системи рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною зі зсувами просторового аргументу, а саме:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A_1(D)u_{\xi_1}+\cdots+A_Q(D)u_{\xi_Q}+f, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}-\mu u|_{t=T}=\varphi. \tag{2}$$

Тут $u=\mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)$ та $f=\mathrm{col}(f_1,\ldots,f_m)$ — відповідно шукана та відома вектор-функції в області $\mathcal{D}^p$, $\varphi=\mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ — відома вектор-функція в області $\Omega_{2\pi}^p$; функція u_ξ позначає функцію u зі зсунутим на вектор $\xi\in\Omega_{2\pi}^p$ аргументом x,

$$A_j(D)=A\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-i\frac{\partial}{\partial x_p}\Big)\ -$$

диференціальні за просторовими змінними вирази зі сталими матричними коефіцієнтами, число μ належить до множини $\mathcal{O}_M$, що є замкнутим кругом радіуса M з центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$.

Цю задачу вивчали у роботі [1] для фіксованих векторних зсувів $\xi_1,\ldots,\xi_Q$ і фіксованих матричних коефіцієнтів у системі (1). Для довільного ε встановлено умови розв’язності з ймовірністю на множині $\mathcal{O}_M$ не меншою, ніж $(1-\varepsilon)$, задачі (1), (2) та знайдено оцінку норми розв’язку u, яка є рівномірною за параметром μ на множині $\mathcal{O}_M$.

У роботі досліджується задача при фіксованому значенні параметра $\mu\in\mathcal{O}_M\setminus\{0,1\}$ та фіксованих матричних коефіцієнтах системи рівнянь з частинними похідними (1). Змінними параметрами будуть векторні зсуви $\xi_1,\ldots,\xi_Q$.

Будемо використовувати деякі позначення з роботи [1], зокрема введене там поняття розв’язності з ймовірністю на множині.

II. Позначення та означення

Нехай $\mathcal{T}$ — лінійний простір тригонометричних 2π-періодичних многочленів, залежних від p змінних $x_1,\ldots,x_p$, а $\mathcal{T}'$ позначає спряжений з $\mathcal{T}$ простір — простір узагальнених 2π-періодичних функцій, або простір формальних тригонометричних рядів [2].

Якщо вектор-функція φ належить простору $(\mathcal{T}')^m$, де $(\mathcal{T}')^m$ — степінь (декартовий добуток) просторів $\mathcal{T}'$, то

$$\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)},\quad \langle^x\varphi,\psi\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi_k^*\varphi_k,$$

$$\langle^x\psi,\psi\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi_k^*\psi_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\|\psi_k\|^2,$$

причому φ_k та ψ_k — вектор-стовпці із простору $\mathbb{C}^m$, $\langle^x\varphi,\psi\rangle$ означає дію узагальненої вектор-функції φ на многочленну вектор-функцію $\psi=\sum_k\psi_k e^{i(k,x)}\in\mathcal{T}^m$, ψ_k^* — ермітово спряжений з вектором ψ_k вектор, $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{C}^m$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^p$, $k\in\mathbb{Z}^p$, $x\in\Omega_{2\pi}^p$. Звідси випливає формула $\varphi_k=\operatorname{col}\bigl(\langle^x\varphi_1,e^{i(k,x)}\rangle,\ldots,\langle^x\varphi_m,e^{i(k,x)}\rangle\bigr)$ для обчислення коефіцієнта Фур'є φ_k вектор-функції $\varphi=\operatorname{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$.

Систему рівнянь (1) на проміжку $[0,T]$ та умови (2) розуміємо як рівності вектор-функцій у просторі $(\mathcal{T}')^m$. Відомо [2], що 2π-періодичні узагальнені функції є рівними, якщо збігаються їх коефіцієнти Фур'є і навпаки, із рівності коефіцієнтів Фур'є випливає рівність функцій.

Якщо $u=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(k,x)}$ належить $(\mathcal{T}')^m$ для всіх $t\in[0,T]$ і $u_k\in\mathbb{C}^1[0,T]$, то похідна $\partial u/\partial t$ також належить $(\mathcal{T}')^m$ і визначається за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k'(t)e^{i(k,x)}.$$

Функція u_ξ з векторним зсувом ξ, який належить до множини $\Omega_{2\pi}^p$, належить до простору $(\mathcal{T}')^m$, якщо $u\in(\mathcal{T}')^m$, причому

$$u_\xi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}e^{i(k,\xi)}u_k(t)e^{i(k,x)},$$

$$\langle^x u_\xi,\psi\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}e^{i(k,\xi)}\psi_k^*u_k(t)\equiv\langle^x u,\psi(\cdot-\xi)\rangle.$$

Для гладких за змінною x функцій $u=u(t,x)$ маємо $u_\xi(t,x)=u(t,x+\xi)$.

Матричний оператор $F(D)$ на просторі $(\mathcal{T}')^m$ визначається формулою

$$F(D)\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\varphi_k e^{i(k,x)},$$

де $F(k)$ — квадратна матриця з комплексними елементами, $\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}$.

Позначимо $\mathcal{T}_1$ — лінійний простір скінченних сум

$$v=v(t,x)=\sum_{(k,r)}v_{k,r}e^{\tau(r)t+i(k,x)},$$

$\mathcal{T}_1'$ — спряжений з $\mathcal{T}_1$ простір, елементами якого є ряди $\sum_{(k,r)}w_{k,r}e^{\tau(r)t+i(k,x)}$, де $w_{k,r}\in\mathbb{C}$,

$$\tau(r)=(i2\pi r-\ln\mu)/T,\quad e^{\tau(r)t}=\mu^{-t/T}e^{i2\pi rt/T},$$

$\ln\mu$ — головне значення логарифма

$$\ln\mu=\ln|\mu|+i\arg\mu,\quad 0\le\arg\mu<2\pi.$$

Дію функціоналу $f\in(\mathcal{T}_1')^m$ на функцію $v\in(\mathcal{T}_1)^m$ визначаємо формулою

$$\langle f,v\rangle=\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}v_{k,r}^*f_{k,r}.$$

Функції $e^{\tau(r)t+i(k,x)}$ є власними функціями диференціальних операторів [4], що породжені диференціальними операціями за змінними t та x зі сталими коефіцієнтами і однорідними умовами (2). Ці функції утворюють базу Ріса у просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{D}^p)$ і використовуються під час дослідження нелокальних задач з умовами (2) для рівнянь та систем рівнянь (1) скінченного [4] та нескінченного [3, 5, 6] порядку. Зокрема в роботах [3, 5] введено простори Соболєва скінченного порядку $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, у скалярному та векторному випадку відповідно.

Отже, $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$ — простір вектор-функцій u із простору $(\mathcal{T}_1')^m$, які мають скінченну норму

$$\|u;\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)\|=\Bigl(\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\bigl(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\bigr)^q u_{k,r}^*u_{k,r}\Bigr)^{1/2},$$

де $\widetilde{k}^{\,2}=1+k_1^2+\ldots+k_p^2$. Подібно визначається простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ для $q\in\mathbb{R}$, а саме:

$$\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)=\Bigl\{\varphi\in(\mathcal{T}')^m:\ \|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2q}\|\varphi_k\|^2<\infty\Bigr\}.$$

Якщо h є абсолютно інтегровною на відрізку $[0,T]$ функцією, тоді для довільної функції $\varphi\in(\mathcal{T}')^m$, добуток $h\varphi$ належить до простору $(\mathcal{T}')^m$, причому

$$\langle h\varphi,v\rangle=\frac{1}{T}\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}v_{k,r}^*\varphi_k\int_0^T e^{-\tau(r)t}h(t)\,dt,$$

де $\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}$. Зокрема, у випадку сталої функції h, а саме $h(t)=\dfrac{1}{1-\mu}$, маємо

$$\Bigl\langle\frac{\varphi}{1-\mu},v\Bigr\rangle=\frac{1}{T}\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\frac{v_{k,r}^*\varphi_k}{\tau(r)}=\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}v_{k,r}^*\varphi_{k,r},$$

де $\varphi_{k,r}=\dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{\varphi_k}{\tau(r)}$.

Нехай $\varepsilon\in[0,1]$, $\bar{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_{Q_1})$ — вектор зсувів, де $1\le Q_1\le Q$.

Введемо на множині зсувів $(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$ геометричну ймовірність P за формулою

$$P(\Omega)=\frac{\operatorname{meas}\Omega}{(2\pi)^{pQ_1}},$$

де $\Omega\subset(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$ — вимірна множина, і дамо означення розв'язності задачі [1].

Означення 1. Задачу (1), (2) називаємо розв'язною у просторі $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$ з ймовірністю $1-\varepsilon$ на множині зсувів $(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$, якщо існує така вимірна підмножина Ω множини $(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$, що $P(\Omega)\ge1-\varepsilon$ і для кожного вектора $\bar{\xi}\in\Omega$ задача (1), (2) має єдиний розв'язок у просторі $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$.

В означенні використано метричний підхід до питання розв'язності задачі (1), (2). Умови розв'язності залежать від ε: при збільшенні ε вони послаблюються, а при $\varepsilon = 0$ вони є найсильнішими. Розв'язність задачі (1), (2) лише для одного фіксованого $\bar{\xi} \in (\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$ означає розв'язність з нульовою ймовірністю ($\operatorname{meas}\Omega = 0$, $\varepsilon = 1$).

III. Побудова розв'язку. Метричні оцінки

Будемо використовувати функції $e^{\tau(r)t+i(k,x)}$ після заміни $u = \tilde{u} + \varphi/(1-\mu)$, яка приводить задачу (1), (2) до задачі з однорідними нелокальними умовами

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{Q} A_j(D)\tilde{u}_{\xi_j} + \frac{1}{1-\mu}\sum_{j=1}^{Q} A_j(D)\varphi_{\xi_j} + f, \qquad (3)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} - \mu\tilde{u}|_{t=T} = 0, \qquad (4)$$

де $\tilde{u} = \tilde{u}(t,x)$ — нова невідома функція.

Нехай $u_{k,r}$, $\tilde{u}_{k,r}$ та $\varphi_{k,r}$, $f_{k,r}$ — коефіцієнти Фур'є відповідно функцій u, $\tilde{u}$ та $\varphi/(1-\mu)$, f за системою експонент $e^{\tau(r)t+i(k,x)}$. Тоді справджуються такі рівності для всіх $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$:

$$u_{k,r} = \tilde{u}_{k,r} + \varphi_{k,r}, \qquad \tau(r)\tilde{u}_{k,r} = A(k)u_{k,r} + f_{k,r},$$

де

$$A(k) = \sum_{j=1}^{Q} A_j(k)e^{i(k,\xi_j)}. \qquad (5)$$

З цих рівностей отримуємо системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} L(k,r)\tilde{u}_{k,r} &= f_{k,r} + A(k)\varphi_{k,r}, \\ L(k,r)u_{k,r} &= f_{k,r} + \tau(r)\varphi_{k,r}, \end{aligned} \qquad (6)$$

де $L(k,r) = \tau(r)E - A(k)$, E — одинична матриця.

Нехай $\widetilde{\Omega}$ — множина таких векторів $\bar{\xi} \in (\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$, що хоча б для одного вектора $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, де $k \neq 0$, маємо рівність $\det L(k,r) := \det L(k,r;\bar{\xi}) = 0$.

Позначимо $\Omega(1) = (\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1} \setminus \widetilde{\Omega}$, тоді

$$\operatorname{meas}\Omega(1) = \operatorname{meas}(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1} = (2\pi)^{pQ_1}.$$

Остання рівність випливає з того, що множина нулів $\widetilde{\Omega}$ зліченної кількості цілих функцій $L(k,r;\bar{\xi})$ має нульову міру.

Для довільного вектора $\xi \in \Omega(1)$ існує єдиний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (6) для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, а значить

$$u_{k,r} = L^{-1}(k,r)\Big(f_{k,r} + \frac{\varphi_k}{T}\Big),$$

$$\|u_{k,r}\|^2 \leq 2\|L^{-1}(k,r)\|^2\Big(\|f_{k,r}\|^2 + \frac{1}{T^2}\|\varphi_k\|^2\Big). \qquad (7)$$

Оскільки $L(k,r) = \tau(r)\Big(E - \dfrac{A(k)}{\tau(r)}\Big)$ і

$$\|A(k)\| \leq \sum_{j=1}^{Q}\|A_j(k)\| \leq \eta\widetilde{k}^{\,l},$$

де $\|\cdot\|$ — евклідова норма матриці,

$$\eta = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(\|A_1(k)\| + \dots + \|A_Q(k)\|\big)/\widetilde{k}^{\,l},$$

то із нерівності $|\tau(r)| \geq 2\eta\widetilde{k}^{\,l}$ випливає оцінка

$$\|L^{-1}(k,r)\| = |\tau(r)|^{-1}\Big\|\Big(E - \frac{A(k)}{\tau(r)}\Big)^{-1}\Big\| \leq$$
$$\leq |\tau(r)|^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\bigg(\frac{\|A(k)\|}{|\tau(r)|}\bigg)^j \leq \frac{2}{|\tau(r)|}. \qquad (8)$$

Далі встановлюємо оцінку зверху величини норми оберненої матриці $\|L^{-1}(k,r)\|$ у випадку

$$|\tau(r)| < 2\eta\widetilde{k}^{\,l}. \qquad (9)$$

Лема 1. *Нехай справджується нерівність* (9) *і виконується умова*

$$\eta_1 := \sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,l}\min_{j=1,\dots,Q_1}\big\|A_j^{-1}(k)\big\| < \infty. \qquad (10)$$

Позначимо $L_1(k,r) = -A_j^{-1}(k)L(k,r)$, *де* (k,r) — *розв'язок нерівності* (9), $j = j(k)$ *те значення індекса, за якого досягається мінімум у формулі* (10). *Тоді міра множини* $\Omega(k,r)$ *векторів* $\bar{\xi} \in (\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$, *для яких*

$$|\det L_1(k,r)| < \varepsilon_k, \qquad 0 < \varepsilon_k < 1, \qquad (11)$$

має для $k \neq 0$ *оцінку згори*

$$\operatorname{meas}\Omega(k,r) < \frac{3m}{2}(2\pi)^{Q_1p}p^{p/2}\omega_{p-1}\varepsilon_k^{1/m}, \qquad (12)$$

де ω_{p-1} — *об'єм* $(p-1)$*-вимірної кулі одиничного діаметра.*

□ *Доведення.* Оскільки $z_j(k) = e^{i(k,\xi_j)}$, де $j = 1\dots,Q$, — одиничні вектори,

$$L_1(k,r) = z_j(k) - \tau(r)A_j^{-1}(k) +$$
$$+ \sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{Q} z_\alpha(k)A_j^{-1}(k)A_\alpha(k),$$

$$\|\tau(r)A_j^{-1}(k)\| = |\tau(r)|\cdot\|A_j^{-1}(k)\| \leq$$
$$\leq 2\eta\widetilde{k}^{\,l}\|A_j^{-1}(k)\| \leq 2\eta\eta_1,$$

$$\Big\|\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{Q} z_\alpha(k)A_j^{-1}(k)A_\alpha(k)\Big\| \leq$$
$$\leq \|\widetilde{k}^{\,l}A_j^{-1}(k)\|\cdot\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{Q}\Big\|\frac{A_\alpha(k)}{\widetilde{k}^{\,l}}\Big\| \leq \eta\eta_1,$$

то матриця $L_1(k,r)$ має рівномірно обмежені згори за змінними k та r елементи, а, отже, й норму, як і її супроводжуюча матриця $L_1^{\vee}(k,r) := \det L_1(k,r) L_1^{-1}(k,r)$:

$$\|L_1(k,r)\| \le m + 3\eta\eta_1,$$

$$\|L_1^{\vee}(k,r)\| \le \|L_1(k,r)\|^{m-1} \le (m+3\eta\eta_1)^{m-1}.$$

Обмеженими є також числа $\lambda_1(k,r), \ldots, \lambda_m(k,r)$ — власні значення матриці $L_1(k,r)$:

$$|\lambda_j(k,r)| \le m + 3\eta\eta_1, \qquad j = 1,\ldots,m.$$

Нехай $\Omega_\alpha(k,r)$, де $\alpha = 1,\ldots,m$, позначає множину тих $\bar\xi \in (\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$, для яких

$$|z_j(k) - \lambda_\alpha(k,r)| < \varepsilon_k^{1/m}, \tag{13}$$

а $\Omega_{\alpha\bar\xi_j}(k,r)$ — множину векторів $\xi_j \in \Omega_{2\pi}^p$, для яких виконується нерівність (13) для всіх інших фіксованих векторів ξ_α, $\alpha \ne j$.

Кожний вектор $\xi_j \in \Omega_{\alpha\bar\xi_j}(k,r)$ породжує число $z_j(k)$ з кола $|z| = 1$, що належить кругу радіуса $\varepsilon_k^{1/m}$ з центром у точці $\lambda_\alpha(k,r)$. Нехай M_1 та M_2 точки перетину цього одиничного кола і кола радіуса $\varepsilon_k^{1/m}$ з центром у точці $\lambda_\alpha(k,r)$. Такі точки існують і не збігаються тоді і тільки тоді, коли $\lambda_\alpha(k,r)$ належить кільцю

$$1 - \varepsilon_k^{1/m} < |\lambda_\alpha(k,r)| < 1 + \varepsilon_k^{1/m}. \tag{14}$$

Відстань від початку координат до середини M хорди M_1M_2 дорівнює числу

$$\frac{1 + |\lambda_\alpha(k,r)|^2 - \varepsilon_k^{2/m}}{2|\lambda_\alpha(k,r)|}.$$

Звідси обчислюємо довжину дуги $\overset{\smile}{M_1M_2}$ одиничного кола:

$$2\arccos \frac{1 + |\lambda_\alpha(k,r)|^2 - \varepsilon_k^{2/m}}{2|\lambda_\alpha(k,r)|}.$$

Довжина цієї дуги на множині (14) при

$$|\lambda_\alpha(k,r)| = \sqrt{1 - \varepsilon_k^{2/m}}$$

досягає супремуму

$$2\arccos\sqrt{1 - \varepsilon_k^{2/m}} = 2\arcsin\left(\varepsilon_k^{1/m}\right),$$

причому

$$\arg M_{1,2} = \arg\lambda_\alpha(k,r) \pm \arcsin\left(\varepsilon_k^{1/m}\right).$$

Оскільки $2\arcsin y \le \pi y$, то шукана довжина дуги не перевищує числа $\pi\varepsilon_k^{1/m}$, тому

$$\left|\Big((k,\xi_j) - \arg\lambda_\alpha(k,r)\Big) \mod 2\pi\right| < \frac{\pi}{2}\varepsilon_k^{1/m}.$$

Отже, якщо $\xi_j \in \Omega_{\alpha\bar\xi_j}(k,r)$, то точка ξ_j лежить між двома гіперплощинами

$$(k,\xi_j) = \arg\lambda_\alpha(k,r) - 2\pi G \pm (\pi/2)\varepsilon_k^{1/m},$$

тобто

$$\arg\lambda_\alpha(k,r) - 2\pi G - (\pi/2)\varepsilon_k^{1/m} < (k,\xi_j) <$$
$$< \arg\lambda_\alpha(k,r) - 2\pi G + (\pi/2)\varepsilon_k^{1/m}$$

для якогось числа $G \in \mathbb{Z}$.

Оскільки діаметр множини $\Omega_{2\pi}^p$ дорівнює $2\pi\sqrt{p}$, то міра множини точок між гіперплощинами для фіксованого G не перевищує числа

$$\pi\left(2\pi\sqrt{p}\right)^{p-1}\omega_{p-1}\varepsilon_k^{1/m}/\|k\|.$$

З нерівностей $|(k,\xi_j)| \le \|k\| \cdot \|\xi_j\| \le 2\pi\sqrt{p}\cdot\|k\|$ випливає, що кількість значень, які може набувати G, оцінюється згори числом $\dfrac{4\pi\sqrt{p}\cdot\|k\|}{2\pi} + 1 \le 3\sqrt{p}\cdot\|k\|$, тому

$$\operatorname{meas}\Omega_{\alpha\bar\xi_j}(k,r) \le \frac{3}{2}(2\pi)^p p^{p/2}\omega_{p-1}\varepsilon_k^{1/m}.$$

Інтегруванням за аргументами $\bar\xi_j$ отримуємо нерівність

$$\operatorname{meas}\Omega_\alpha(k,r) \le \frac{3}{2}(2\pi)^{Q_1p}p^{p/2}\omega_{p-1}\varepsilon_k^{1/m}. \tag{15}$$

Оскільки $\Omega(k,r) \subset \bigcup_{\alpha=1}^{m}\Omega_\alpha(k,r)$, то з формули (15) випливає шукана оцінка

$$\operatorname{meas}\Omega(k,r) \le m\cdot\operatorname{meas}\Omega_\alpha(k,r) \le$$
$$\le \frac{3m}{2}(2\pi)^{Q_1p}p^{p/2}\omega_{p-1}\varepsilon_k^{1/m}.$$

Лему доведено. ■

Нехай $\Omega(2) = \Omega(1) \setminus {\bigcup_{(k,r)}}' \Omega(k,r)$, тоді

$$\Omega(1) \subset \Omega(2) \cup {\bigcup_{(k,r)}}'\Omega(k,r)$$

і

$$\operatorname{meas}\Omega(2) \ge \operatorname{meas}\Omega(1) - {\sum_{(k,r)}}'\operatorname{meas}\Omega(k,r), \tag{16}$$

де об'єднання ${\bigcup_{(k,r)}}'$ та підсумовування ${\sum_{(k,r)}}'$ відбувається на множині розв'язків нерівності (9), яка еквівалентна нерівності

$$\left(r - \frac{\arg\mu}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\ln\mu}{2\pi}\right)^2 < \left(\frac{\eta T}{\pi}\widetilde{k}^{\,l}\right)^2$$

і має не більшу кількість розв'язків, ніж нерівність $\left|r - \dfrac{\arg\mu}{2\pi}\right|^2 < \dfrac{\eta T}{\pi}\widetilde{k}^{\,l}$. Кількість розв'язків цієї нерівності не перевищує $\dfrac{2\eta T}{\pi}\widetilde{k}^{\,l}$. Формула (12) дає оцінку

$${\sum_{(k,r)}}'\operatorname{meas}\Omega(k,r) =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\ \sum_{|\tau(r)|<2\eta\widetilde{k}^{\,l}}\operatorname{meas}\Omega(k,r) \le \frac{3\eta mT}{\pi}\times$$
$$\times (2\pi)^{Q_1p}p^{p/2}\omega_{p-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\,l}\varepsilon_k^{1/m} = (2\pi)^{Q_1p}\varepsilon. \tag{17}$$

В останній рівності ε_k визначаються рівністю

$$\varepsilon_k = \varepsilon^m \eta_2^{-m} \widetilde{k}^{\,(\theta-l)m}, \tag{18}$$

де $\theta < -p$ — довільне від'ємне число,

$$\eta_2 = 3\eta m T \zeta(\theta) p^{p/2} \omega_{p-1}/\pi.$$

Отже, з формул (16), (17) випливає, що міра множини $\Omega(2)$ задовольняє нерівність

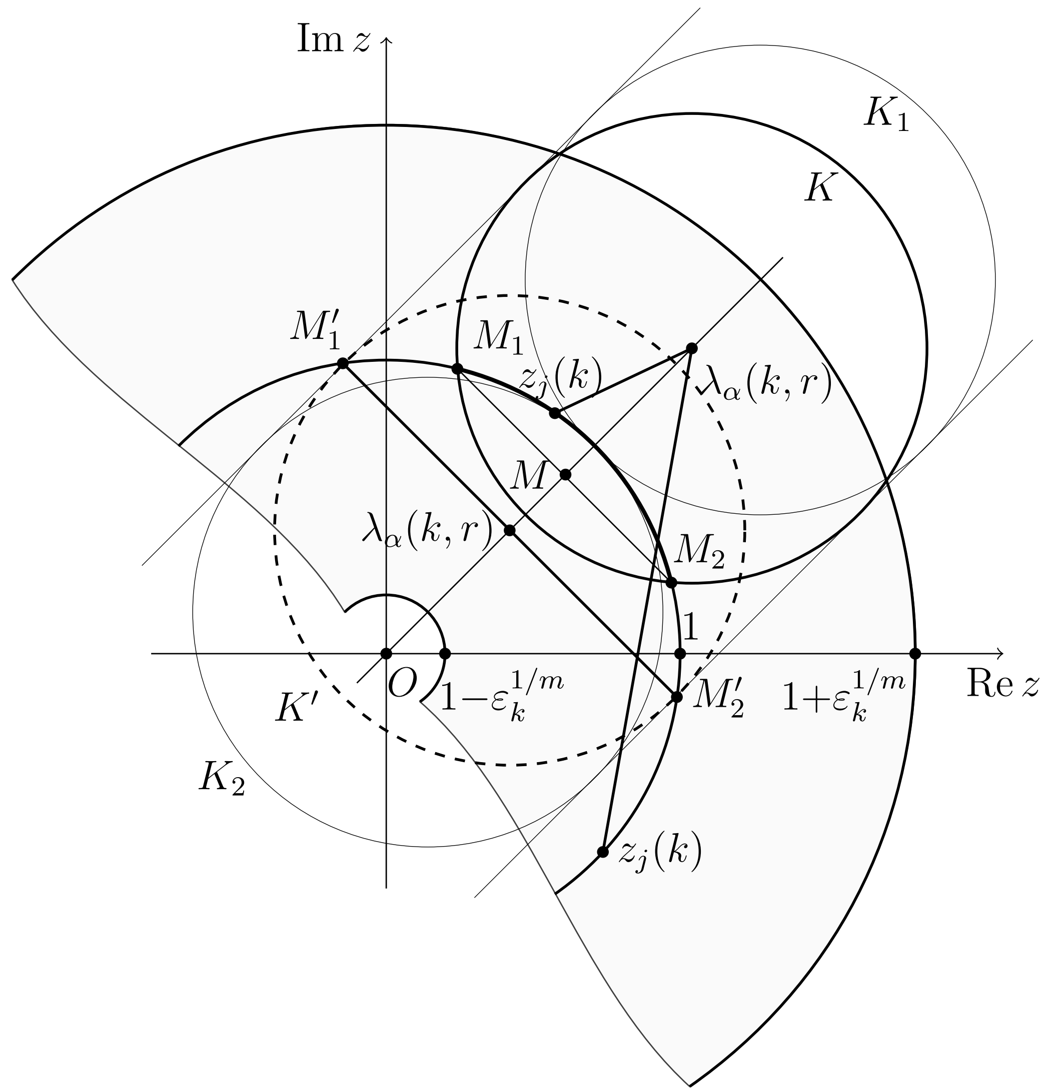
$$\operatorname{meas}\Omega(2) \geq \operatorname{meas}\left(\Omega_{2\pi}^p\right)^{Q_1} - \operatorname{meas}\bigcup_{(k,r)}{}' \Omega(k,r) \geq$$
$$\geq (1-\varepsilon)\operatorname{meas}\left(\Omega_{2\pi}^p\right)^{Q_1},$$

тобто $P\big(\Omega(2)\big) \geq 1-\varepsilon$, а для всіх точок цієї множини виконуються нерівності

$$\|L^{-1}(k,r)\| = \frac{\|L_1^{\vee}(k,r)A_j^{-1}(k,r)\|}{|\det L_1(k,r)|} \leq$$
$$\leq \varepsilon^{-m}\eta_3 \cdot \widetilde{k}^{\,(m-1)l-m\theta} \tag{19}$$

при виконанні умови (9), де

$$\eta_3 = \eta_1 \eta_2^m (m + 3\eta\eta_1)^{m-1}.$$



Довжина дуги одиничного кола з центром у початку координат O між точками M_1 та M_2 перетину цього кола і кола K радіуса $\varepsilon_k^{1/m}$ з центром у точці $\lambda_\alpha(k,r)$ є максимальною (дуга $\overset{\smile}{M_1'M_2'}$) для кола K' і мінімальною (нульовою) для кіл K_1 та K_2. Довжина дуги $\overset{\smile}{M_1'M_2'}$ не перевищує числа $\pi\varepsilon_k^{1/m}$, яке є довжиною півкола радіуса $\varepsilon_k^{1/m}$

Залишається оцінити $L^{-1}(k,r)$ при $k=0$, а саме: $L^{-1}(0,r)$ при $|\tau(r)|<2\eta$. Остання нерівність має не більше, ніж $2\eta T/\pi$ розв'язків.

Оскільки

$$L(0,r)=\tau(r)E-A(0)=\tau(r)E-\sum_{j=1}^{Q}A_j(0),$$

то $L^{-1}(0,r)$ не залежить від зсувів ξ_j. Системи

$$L(0,r)u_{0,r}=f_{0,r}+\frac{1}{T}\varphi_r$$

мають лише по одному розв'язку $u_{0,r}$ для всіх правих частин тоді і тільки тоді, коли

$$\det L(0,r)\neq 0, \qquad |\tau(r)|<2\eta. \tag{20}$$

IV. Розв'язність задачі

Для формулювання і доведення теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) використовуємо такі позначення:

$$\eta_4=\max\left(\frac{2}{T^2},\frac{2}{\ln^2|\mu|+(2\pi-\arg\mu)^2},\frac{1}{4\eta^2}\right),$$

$$\eta_5=\max_{|\tau(r)|<2\eta}\frac{\|L^{-1}(0,r)\|^2}{\left(1+r^2\right)^{m(1-\theta/l)-1}}.$$

Теорема 1. *Нехай $f\in\mathbf{W}^{q+m(1-\theta/l)-1}(\mathcal{D}^p)$, $\varphi\in\mathbf{H}_{l(q+m-1/2)-m\theta}(\Omega_{2\pi}^p)$ і виконуються умови (10) та (20), тоді задача (1), (2) розв'язна у просторі $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$ з ймовірністю 1 на множині зсувів $(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$ для всіх чисел $q<1/2$. Для довільних $\varepsilon\in(0,1)$ і $q<1/2$ розв'язок и задачі (1), (2) з ймовірністю $1-\varepsilon$ справджує оцінку*

$$\|u;\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)\|^2\le C_1\|f;\mathbf{W}^{q+m(1-\theta/l)-1}(\mathcal{D}^p)\|^2+ \\ +C_2\|\varphi;\mathbf{H}_{l(q+m-1/2)-m\theta}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2, \tag{21}$$

де

$$C_1=8\eta_4T^2+2\varepsilon^{-2m}\eta_3^2+2\eta_5, \tag{22}$$

$$C_2=8\eta_4\sum_{r\in\mathbb{Z}}(1+r^2)^{q-1}+8T^{-2}\varepsilon^{-2m}\eta\eta_3^2\times \\ \times\left(1+\frac{4\eta^2T^2}{\ln^2|\mu|+(2\pi-\arg\mu)^2}\right)^q+2T^{-2}\eta_5. \tag{23}$$

☐ *Доведення.* На основі формул (7), (20) для кожного вектора $\bar\xi\in\Omega(1)$ запишемо нерівність

$$\|u;\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)\|^2\le 2V_f(\bar\xi)+\frac{2}{T^2}V_\varphi(\bar\xi), \tag{24}$$

де

$$V_f(\bar\xi)=\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^q\|L^{-1}(k,r)\|^2\|f_{kr}\|^2,$$

$$V_\varphi(\bar\xi)=\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^q\|L^{-1}(k,r)\|^2\|\varphi_k\|^2,$$

яка у випадку $V_f(\bar\xi)<\infty$ та $V_\varphi(\bar\xi)<\infty$ означає розв'язність задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$ для фіксованого вектора $\bar\xi$.

Встановимо рівномірні оцінки на множині $\Omega(2)$ виразів $V_f(\bar\xi)$, $V_\varphi(\bar\xi)$ і перетворимо (24) у шукану нерівність (21).

Зафіксуємо числа $\varepsilon\in(0,1)$, $\theta<-p$ та виберемо числа ε_k за формулою (18), тоді із оцінок (8), (19) отримуємо

$$V_f(\bar\xi)\le 4\sum_{|\tau(r)|\ge 2\eta\widetilde{k}^{\,l}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^q\frac{\|f_{k,r}\|^2}{|\tau(r)|^2}+ \\ +\sum_{|\tau(r)|<2\eta}\left(1+r^2\right)^q\|L^{-1}(0,r)\|^2\|f_{0,r}\|^2+ \\ +\varepsilon^{-2m}\eta_3^2\sum_{\max(|\tau(r)|,2\eta)<2\eta\widetilde{k}^{\,l}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^q\frac{\|f_{k,r}\|^2}{\left(\widetilde{k}^{\,2l}\right)^{1-m(1-\theta/l)}}.$$

З нерівності $|\tau(r)|\ge 2\eta\widetilde{k}^{\,l}$ маємо при $r\neq 0$ оцінку

$$|\tau(r)|^2\ge\frac{4\eta^2}{1+4\eta^2}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+|\tau(r)|^2\right)\ge\frac{\widetilde{k}^{\,2l}+|\tau(r)|^2}{2}\ge \\ \ge\frac{\widetilde{k}^{\,2l}}{2}+\frac{2\pi^2}{T^2}\left(\frac{\ln^2|\mu|}{4\pi^2}+\left(r-\frac{\arg\mu}{2\pi}\right)^2\right)\ge \\ \ge\frac{1}{2T^2}\min\left(T^2,\ln^2|\mu|+(2\pi-\arg\mu)^2\right)\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right),$$

а при $r=0$ — оцінку $|\tau(0)|^2\ge 4\eta^2\widetilde{k}^{\,2l}$, з яких випливає формула

$$\frac{1}{|\tau(r)|^2}\le\frac{\eta_4T^2}{\widetilde{k}^{\,2l}+r^2}, \qquad r\in\mathbb{Z}.$$

Тому справджується оцінка

$$V_f(\bar\xi)\le 4\eta_4T^2\sum_{|\tau(r)|\ge 2\eta\widetilde{k}^{\,l}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^{q-1}\|f_{k,r}\|^2+ \\ +\sum_{|\tau(r)|<2\eta}\left(1+r^2\right)^q\|L^{-1}(0,r)\|^2\|f_{0,r}\|^2+ \\ +\varepsilon^{-2m}\eta_3^2\sum_{\max(|\tau(r)|,2\eta)<2\eta\widetilde{k}^{\,l}}\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^{q+m(1-\theta/l)-1}\|f_{k,r}\|^2\le \\ \le\frac{1}{2}C_1\|f;\mathbf{W}^{q+m(1-\theta/l)-1}(\mathcal{D}^p)\|^2,$$

де стала C_1 визначається формулою (22).

Далі використовуємо нерівність

$$\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^{q-1}\le\left(1+r^2\right)^{q-1}$$

та нерівність

$$\left(\widetilde{k}^{\,2l}+r^2\right)^q\le\left(\widetilde{k}^{\,2l}+\frac{T^2|\tau(r)|^2}{\ln^2|\mu|+(2\pi-\arg\mu)^2}\right)^q< \\ <\left(1+\frac{4\eta^2T^2}{\ln^2|\mu|+(2\pi-\arg\mu)^2}\right)^q\widetilde{k}^{\,2lq},$$

яка виконується при $|\tau(r)| < 2\eta\widetilde{k}^{\,l}$, з метою отримання такої оцінки:

$$V_\varphi(\bar\xi) \le 4\eta_4 T^2 \sum_{r\in\mathbb{Z}} (1+r^2)^{q-1} \sum_{|\tau(r)|\ge 2\eta\widetilde{k}^{\,l}} \|\varphi_k\|^2 + $$
$$+ \sum_{|\tau(r)|<2\eta} \big(1+r^2\big)^q \|L^{-1}(0,r)\|^2 \|\varphi_0\|^2 +$$
$$+ \varepsilon^{-2m}\eta_3^2 \Big(1 + \frac{4\eta^2T^2}{\ln^2|\mu| + (2\pi - \arg\mu)^2}\Big)^q \times$$
$$\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \sum_{|\tau(r)|<2\eta\widetilde{k}^{\,l}} \widetilde{k}^{\,2l(q+m(1-\theta/l)-1)} \|\varphi_k\|^2 \le$$
$$\le \frac{T^2}{2} C_2 \|\varphi; \mathbf{H}^{l(q+m-1/2)-m\theta}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2,$$

де стала C_2 визначається формулою (23). Нерівність (21) отримуємо безпосередньо з доведених нерівностей для величин $V_f(\bar\xi)$ і $V_\varphi(\bar\xi)$ та нерівності (24).

Отже, нерівність (21) виконується на множині $\Omega(2)$, міра якої задовольняє умову

$$\operatorname{meas}\Omega(2) \ge (1-\varepsilon)(2\pi)^{p\Theta_1} x,$$

тобто (21) виконується з ймовірністю $1-\varepsilon$.

Зі збіжності ряду (17) за лемою Бореля–Кантеллі отримуємо, що міра множини $\tilde{Q}_1$ тих $\xi \in Q(1)$, для яких нерівність (11) має безліч розв'язків, дорівнює нулеві. Тобто, на множині $\Omega(3) = \Omega(1) \setminus \tilde{Q}_1$ з ймовірністю $P\big(\Omega(3)\big) = 1$ виконується протилежна до (11) нерівність, а отже і нерівність (19), для всіх (за винятком скінченного числа) векторів $(k,r) \in \mathbb{Z}^{p+1}$.

Звідси, для довільного вектора $\bar\xi \in Q(3)$ випливає нерівність (21) зі сталими $C_1(\bar\xi)$ та $C_2(\bar\xi)$, які залежать від ξ, і розв'язність задачі (1), (2) з ймовірністю одиниця на множині зсувів $(\Omega_{2\pi}^p)^{Q_1}$.

Теорему доведено. ■

V. Висновки*

У класі просторів Соболєва з одиничною ймовірністю встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною t для безтипної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною, яка містить значення шуканого розв'язку у точках, зсунутих на сталі величини ξ_j за просторовою змінною $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

Література

[1] Ільків В. С. Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2010. – Вип. 21. – С. 72–85.

[2] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[3] Ільків В. С. Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка // Укр. матем. журн. – 1983. – **35**.– № 4. – С. 498—502.

[4] Ільків В. С. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Доповіді АН УРСР Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15—19.

[5] Ільків В. С. Нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними у просторах Соболєва нескінченного порядку// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 115–119.

[6] Ільків В. С. Нелокальная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка // Дифференц. уравн. – 2005. – **41**, № 2. — С. 250—257.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СО СМЕЩЕНИЯМИ АРГУМЕНТОВ

В.С. Илькив

Национальный университет "Львивська политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Установлены условия существования и единственности решения задачи с двухточечными нелокальными условиями по временной переменной t с одним параметром для бестипной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка по временной переменной, содержащей значения искомого решения в точках, сдвинутых на постоянные величины ξ_j по пространственной переменной $x = (x_1, \dots, x_p)$. Решение ищется в классе пространств Соболева вектор-функций. Задача является некорректной и связана с проблемой малых знаменателей, для оценивания которых использована методика метрического подхода. Доказана однозначная разрешимость задачи с вероятностью единица на множестве сдвигов ξ_j, установлены равномерные оценки решения, которые выполняются с вероятностью близкой к единице.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, нелокальные условия, пространства Соболева, малые знаменатили.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946+511/37

SOLVABILITY OF THE NONLOCAL PROBLEM FOR LINEAR NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SHIFTED ARGUMENTS

V.S. Il'kiv

*National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

The existence and uniqueness conditions of solution for the problem of one parameter nonlocal twopoits conditions by time variable t for typeless system of differential equations, which contains the value of original solution in the points shifted to the constant value ξ_j for the spatial variable $x = (x_1, \dots, x_p)$ are established. The solution sought in the class of Sobolev spaces 2π-periodic for variable x vector functions. Solvability of the problem for almost all (except for sets of arbitrarily small measure) values of parameter μ in nonlocal conditions are proved. Established lower bounds of small denominators that arise in studying the smoothness of the solution.

Key words: partial differential equation, nonlocal condition, Sobolev spaces, small denominators.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.946+511.37