

## УДК 528.21

Б. Б. ДЖУМАН

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, тел. +38(068)7632139, ел. пошта teojuman@gmail.com

## АПРОКСИМАЦІЯ АНОМАЛІЙ СИЛИ ВАГИ МЕТОДОМ ASHA НА ТЕРИТОРІЮ АРКТИКИ

Розглянуто методику побудови локального гравітаційного поля аномалій сили ваги з використанням техніки spherical cap harmonic analysis (SCHA). Цей підхід передбачає використання приєднаних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку. Ці функції формують дві системи функцій, у кожній із цих систем вони є ортогональними між собою на “шапці” сфери. Проте в загальному ці функції не є ортогональними. Тому для використання обох систем функцій традиційно використовують спосіб найменших квадратів. Проте для високих порядків досить складно знаходити власні числа даних функцій та їхню норму. Тому обґрунтовано використання техніки adjusted spherical harmonic analysis (ASHA) для побудови локального поля аномалій сили ваги. Техніка ASHA передбачає проектування вихідних даних аномалій сили ваги із сегмента сфери на півсферу і подальше використання сферичних функцій цілого степеня і цілого порядку. Очевидно, на півсфері ми також отримаємо дві системи ортогональних функцій. Для першої системи функцій різниця  $n-m$  буде парним числом. Своєю чергою, для другої системи функцій різниця  $n-m$  буде непарним числом. За допомогою техніки ASHA побудовано поле аномалій сили ваги на територію Арктики 100-го порядку з використанням алгоритму пришвидшеного знаходження матриці нормальних рівнянь і гармонічних коефіцієнтів. Цей алгоритм передбачає проектування вихідних даних на рівномірну сітку. У такій рівномірній сітці відстань між паралелями може бути довільною. Своєю чергою, відстань між меридіанами має зберігати сталі значення. У такому разі під час побудови матриці нормальних рівнянь можна використати дискретні ортогональні відношення базисних функцій по довготі. Також побудовано поле аномалій сили ваги на територію Арктики з використанням моделі EGM 2008 до 360-го порядку. Для оцінки точності порівняно отриману модель аномалій сили ваги і побудоване поле аномалій сили ваги з моделі EGM 2008. Знайдено основні характеристики вихідного поля аномалій сили ваги на територію Арктики, а також модельних значень та їх різниць.

*Ключові слова:* аномалії сили ваги; апроксимація; локальне гравітаційне поле; гармонічні коефіцієнти.

### Вступ

Зазвичай глобальне гравітаційне поле та його трансформанти представляються у вигляді ряду кульових функцій. Проте таке представлення не є зручним для локальної території. У такому разі потрібно побудувати модель локального гравітаційного поля, яка б складалася з набагато меншої кількості коефіцієнтів, аніж модель глобального гравітаційного поля, і, своєю чергою, не поступалася їй в точності.

Одним із методів побудови локального гравітаційного поля є техніка spherical cap harmonic analysis (SCHA) [Haines G.V., 1985; Haines G.V., 1988; Thebault E., 2006]. У ній використовують дві системи сферичних функцій цілого степеня і дійсного порядку, ортогональних на “шапці” або сегменті сфери [Джуман Б. Б., 2013]. Оскільки загалом дані

функції не є ортогональні, традиційно невідомі коефіцієнти моделі отримують за допомогою методу найменших квадратів.

### Мета

Необхідно побудувати локальну модель поля аномалій сили ваги на територію Арктики, кількість коефіцієнтів якої була б значно меншою за кількість коефіцієнтів глобальної моделі без втрати точності. Кількість коефіцієнтів локальної моделі залежить від прийнятого радіуса  $\theta_0$  сферичного сегменту (в цьому разі  $\theta_0 = 25^\circ$ ). Тоді, наприклад, якщо глобальна модель матиме  $361^2$  коефіцієнтів, то відповідна локальна модель матиме  $101^2$  коефіцієнтів.

### Методика

Відповідно до поставленої мети досліджень як вихідні дані використано виміряні значення

аномалій сили ваги  $\Delta g_i$  ( $i > 1\ 000\ 000$ ) у вільно-повітрі на території Арктики з Арктичного проекту на рівномірній сітці  $5 \times 5$  (рис. 1)

[NGA, 2008]. Точність визначення даних аномалій сили ваги можна оцінити величиною 10–15 мГал.

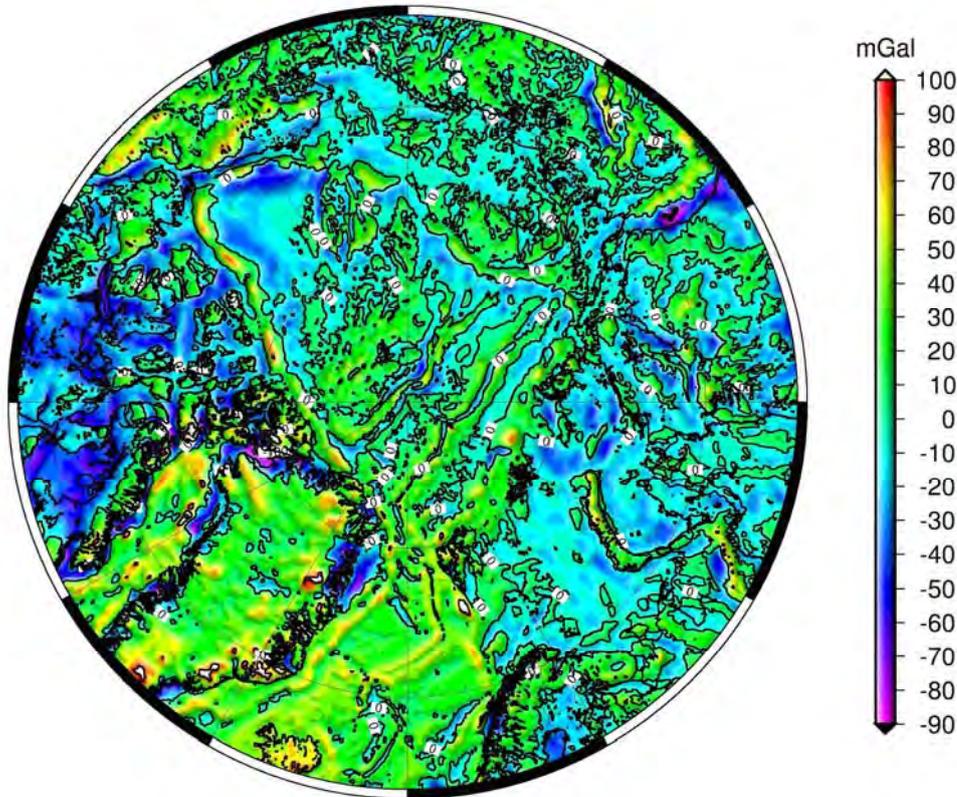


Рис. 1. Карта аномалій сили ваги з Арктичного проекту [NGA, 2008]

Fig. 1. Map of gravity anomalies from Arctic Project

Як добре відомо, локальна модель аномалій сили ваги у випадку SCHA має вигляд [Jiancheng L., 1995; Hwang J., 2012; De Santis A., 1997

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)} [n_k(m) - 1] \times (\bar{C}_{km} \cos m\lambda + \bar{S}_{km} \sin m\lambda) \bar{P}_{n_k(m)m}(\cos \theta), \quad (1)$$

де  $(r, \theta, \lambda)$  – сферичні координати,  $GM$  – геоцентрична гравітаційна стала,  $n$  і  $m$  – степінь і порядок сферичних функцій відповідно,  $k$  – індекс,  $\bar{C}_{km}, \bar{S}_{km}$  – гармонійні коефіцієнти,  $\bar{P}_{n_k(m)m}(\cos \theta)$  – повністю нормовані сферичні функції на сегменті сфери.

Отже, функції  $P_{n_k(m)m}(\cos \theta)$  можна знайти з наступного рекурсивного співвідношення [Haines G. V., 1985]:

$$P_{n_k(m)m}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(m, n) \sin^{2j}(\theta/2), \quad (2)$$

де  $A_j(m, n)$  означає

$$A_0(m, n) = \sin^m \theta, \\ A_j(m, n) = \left( \frac{(j+m-1)(j+m) - n(n+1)}{j(j+m)} \right) A_{j-1}(m, n). \quad (3)$$

Свою чергою, функції  $dP_{n_k(m)m}/d\theta$  можна знайти як

$$\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} P_{n_k(m)m}(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{2} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot A_j(m, n) \cdot \sin^{2(j-1)}(\theta/2). \quad (4)$$

Проте очевидно, що такий підхід має низку недоліків, особливо під час побудови моделей високих порядків. Насамперед зі збільшенням порядку досить складно знаходити степінь сферичних функцій  $n$  із формул (3) і (4). Також суттєво ускладнюється знаходження загально

прийнятої в геодезії норми “Heiskanen and Moritz” [Hofmann-Wellenhof B., 2005; Hwang C., 1997].

Тому в цьому випадку доцільніше використати техніку adjusted spherical harmonic analysis (ASHA) [De Santis A., 1992]. Отже, необхідно ввести нову систему координат  $(r', \theta', \lambda')$ , яка пов'язана з попередньою так:

$$\left. \begin{aligned} r' &= r \\ \lambda' &= \lambda \\ \theta' &= \alpha \cdot \theta \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

де  $\alpha = \frac{\pi}{2\theta_0}$ ,  $\theta_0$  – половинний кут сегмента сфери (для території Арктики приймемо  $\theta_0 = 25^\circ$ ).

Беручи до уваги, що вихідні дані розміщені на сфері, остаточно рівняння моделі аномалій сили ваги можна подати в такому вигляді:

$$\Delta g_{\text{mod}}(\theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left\{ \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{nm}(\cos \alpha \theta), \quad (6)$$

де  $N$  – максимальний порядок моделі.

Як добре відомо, роздільну здатність такої моделі можна обчислити за такою формулою

$$\lambda = \frac{4\theta_0 r}{N} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{2\theta_0^\circ}{N}. \quad (7)$$

Свою чергою, роздільна здатність глобальної моделі обчислюється як

$$\lambda = \frac{2\pi r}{N} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{180}{N}. \quad (8)$$

Із формул (7) і (8) видно, що у цьому разі глобальній моделі 360-го порядку еквівалентна за точності локальна модель 100-го порядку. Отже, прийнявши  $N = 100$ , легко бачити, що розмірність матриці параметричних рівнянь у цьому випадку буде  $\approx 1\,000\,000 \times 10\,000$ . Оскільки процес побудови і розв'язку такої вели-

кою системи рівнянь потребує великої кількості часу [Лук'янченко Ю. О., 2013], використано такий алгоритм знаходження невідомих коефіцієнтів [Марченко О. М., 2014]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=m}^N \sum \bar{R}_{im} \bar{R}_{jm} \cdot x_\sigma &= q_\sigma, \quad j = m, N; \quad m = 0, N \\ \sum_{i=m}^N \sum \bar{S}_{im} \bar{S}_{jm} \cdot x_\delta &= q_\delta, \quad j = m, N; \quad m = 1, N \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

де  $\sigma = \sigma(i, m)$ ,  $\delta = \delta(i, m)$ ;

$$\bar{R}_{mm}(\vartheta, \lambda) = \bar{P}_{mm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda;$$

$$\bar{S}_{mm}(\vartheta, \lambda) = \bar{P}_{mm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda, \quad \sum = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4,$$

$s$  – кількість паралелей,  $r$  – кількість точок у першому октанті на одній паралелі.

### Результати

Отже, побудовано модель аномалій сили ваги, яку зображено на рис. 2.

Карта різниць  $\delta \Delta g$  між вихідними значеннями аномалій сили ваги з Арктичного проекту і модельними значеннями подано на рис. 3.

Основні характеристики поля аномалій сили ваги з Арктичного проекту  $\Delta g$ , модельних значень аномалій сили ваги, побудованих методом ASHA  $\Delta g_{\text{mod}}$ , поля аномалій сили ваги, побудованого за моделлю EGM2008 до 360-го порядку  $\Delta g_{\text{EGM}}$ , а також поле різниць  $\delta \Delta g$  наведено в табл. 1.

Модель аномалій сили ваги (6) порівняно з моделлю EGM2008 до 360-го порядку на територію Арктики. Отже, стандартне відхилення різниць між значеннями аномалій сили ваги з Арктичного проекту і модельними значеннями аномалій сили ваги з моделі EGM2008 становить  $\sigma = 13,41 \text{ мГал}$ . Як видно з табл. 1, судячи із стандартних відхилень, модель (6) до 100-го порядку і модель EGM2008 до 360-го порядку практично еквівалентні.

Таблиця 1

Основні характеристики поля аномалій сили ваги  
Main characteristics of gravity anomalies field

	Мінімум, мГал	Максимум, мГал	Середнє, мГал	Стандартне відхилення, мГал
$\Delta g$	-172	227	3,62	27,34
$\Delta g_{\text{mod}}$	-142	142	3,62	24,84
$\Delta g_{\text{EGM}}$	-136	147	3,67	24,76
$\delta \Delta g$	-150	151	0,00	12,52

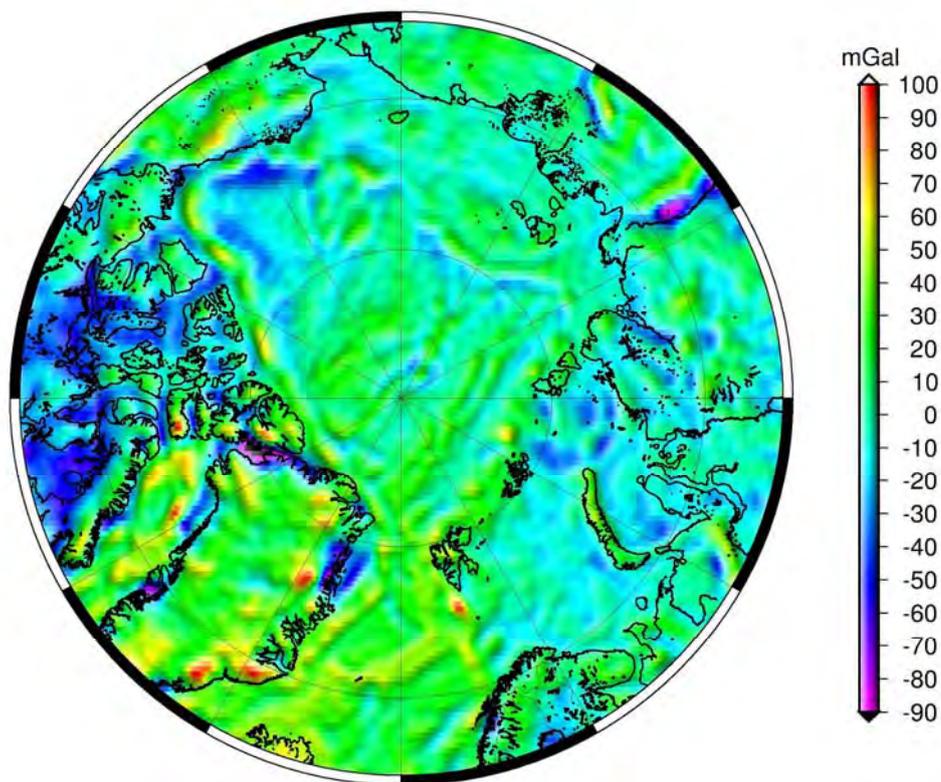


Рис. 2. Карта модельних значень аномалій сили ваги на регіон Арктики  
Fig. 2. Map of gravity anomalies from Arctic Project

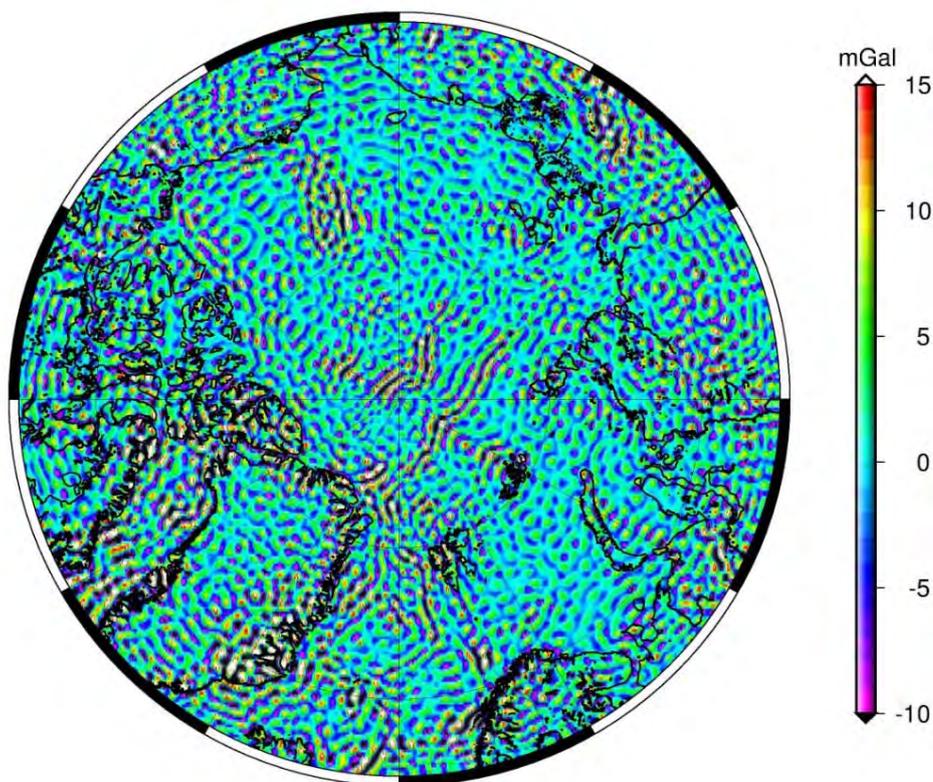


Рис. 3. Карта різниць між вихідними та модельними значеннями аномалій сили ваги  
Fig. 3. Map of differences between initial and model values of gravity anomalies

У подальшому планують побудувати локальні гравітаційні поля цим методом для інших територій, на яких відомі значення аномалій сили ваги з вищою точністю.

Також планується побудова локального гравітаційного поля та його трансформант на територію Арктики з використанням методу ASHA в межах процедури “Видалення – Відновлення”.

### Висновки

1. Обґрунтовано використання техніки ASHA для побудови локальних гравітаційних полів високої роздільної здатності.

2. Побудовано поле аномалій сили ваги на територію Арктики з використанням алгоритму пришвидшеного знаходження матриці нормальних рівнянь та гармонічних коефіцієнтів;

3. Виконано порівняння точності отриманої моделі аномалій сили ваги з моделлю EGM 2008 до 360-го порядку.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Джуман Б. Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля // Геодинаміка, 2013. – № 1(14). – С. 29–33.
- Лук'янченко Ю. О. Побудова нормальних рівнянь для опрацювання даних місії GOCE // Геодинаміка, 2013. – № 1(14). – С. 34–37.
- Марченко О. М., Джуман Б. Б. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля // Геодезія, картографія і аерофотознімання, 2014. – 79. – С. 29–34.

Б. Б. ДЖУМАН

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, ул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, тел. +38(068)7632139, ел. пошта teojuman@gmail.com

### АППРОКСИМАЦИЯ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ МЕТОДОМ ASHA НА ТЕРРИТОРИЮ АРКТИКИ

Рассмотрена методика построения локального гравитационного поля аномалий силы тяжести с использованием техники spherical cap harmonic analysis (SCHA). Этот подход предполагает использование присоединенных функций Лежандра целого степеня и действительного порядка. Данные функции составляют две системы функций. В каждой из этих систем они являются ортогональными между собой на “шапке” сферы. Однако в общем эти функции не являются ортогональными. Поэтому для использования обеих систем функций традиционно используют способ наименьших квадратов. Однако для высоких порядков достаточно сложно находить собственные числа данных функций и их нормы. Поэтому обосновано использование техники adjusted spherical harmonic analysis (ASHA) для построения локального поля аномалий силы тяжести. Техника ASHA предусматривает проектирование исходных данных аномалий силы тяжести из сегмента сферы на полусферу и дальнейшее использование сферических функций целого степеня и целого порядка. Очевидно, на полусфере мы также получим две системы ортогональных функций. Для первой системы

- De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field // Geophys. Res. Lett., 1992. – 19. – P. 1065–1067.
- De Santis A., Torta J. Spherical cap harmonic analysis : a comment on its proper use for local gravity field representation // J. of Geod., 1997. – 71, P. 526–532.
- Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields // Comput. Geosci., 1988. – 14. – P. 413–447.
- Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis // J. Geophys. Res., 1985. – 90. – P. 2583–2591.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. Physical Geodesy, Wien New York : Springer Science + Business Media, 2005. – P. 403.
- Hwang C., Chen S. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 // Geophys. J. Int., 1997. – 129. – P. 450–460.
- Hwang J., Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis / J. Hwang, H. Han, S. Han, K. Kim, J. Kim, M. Kang, C. Kim // J. of Geodynamics, 2012. – 53. – P. 27–33.
- Jiancheng L., Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / L. Jiancheng, C. Dingbo, N. Jiancheng // Manuscr. Geod., 1995. – 20. – P. 265–277.
- NGA, Arctic Gravity Project, The National Imagery and Mapping Agency, 2008, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/aggp/>
- Thebault E. Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) / E. Thebault, M. Manda, J. Schott // J. Of Geophys. Research, 2006. – 111. – 13 p.

функцій різниця  $n-m$  буде четним числом. В свою череду, для другої системи функцій різниця  $n-m$  буде нечетним числом. С допомогою техніки ASHA побудовано поле аномалій сили тяжести на територію Арктики 100-го порядку з використанням алгоритму прискореного знаходження матриці нормальних рівнянь і гармонічних коефіцієнтів. Цей алгоритм передбачає проектування вихідних даних на рівномірну сітку. В такій рівномірній сітці відстань між паралелями може бути довільною. В свою череду, відстань між меридіанами повинно зберігати постійне значення. В такому випадку при побудові матриці нормальних рівнянь можна використовувати дискретні ортогональні відношення базисних функцій по довготі. Також побудовано поле аномалій сили тяжести на територію Арктики з використанням моделі EGM 2008 до 360-го порядку. Для оцінки точності порівняно отриману модель аномалій сили тяжести і побудоване поле аномалій сили тяжести з моделі EGM 2008. Знайдено основні характеристики вихідного поля аномалій сили тяжести на територію Арктики, а також модельних значень і їх різниць.

*Ключові слова:* аномалії сили тяжести; апроксимація; локальне гравітаційне поле; гармонічні коефіцієнти.

B. B. DZHUMAN

Department of Higher Geodesy and Astronomy Lviv Polytechnic National University, S. Bandera str., 12, Lviv, Ukraine, 79013, tel. +38(068)7632139, e-mail teojuman@gmail.com

#### APPROXIMATION OF GRAVITY ANOMALIES BY METHOD OF ASHA ON ARCTIC AREA

We consider the method of constructing the local gravity field using technique called spherical cap harmonic analysis (SCHA). This approach involves using of associated Legendre functions of integer degree and noninteger order. These functions form two sets of functions. They are mutually orthogonal over the spherical cap in each set. However, in general these functions are not orthogonal. Thus, for using both of these sets of functions it is traditionally used least squares method. However, for higher orders it is quite difficult to compute eigenvalues and norms of these functions. Therefore, we substantiate the use of technique adjusted spherical harmonic analysis (ASHA) for constructing local field of gravity anomalies. The technique ASHA provides of projection of initial data of gravity anomalies from segment of sphere to hemisphere and continued using of spherical functions of integer degree and integer order. Obviously, on hemisphere we will also obtain two sets of orthogonal functions. For the first system of functions difference  $n-m$  will be even. In turn, for the second system of functions difference  $n-m$  will be odd. With using technique ASHA we constructed field of gravity anomalies up to 100 order on Arctic area using accelerated algorithm of computation of normal equations matrix and harmonic coefficients. This algorithm provides designing of initial data on a uniform grid. In such uniform grid distance between parallels can be arbitrary. In turn, the distance between meridians must keep constant value. In this case, during the construction of the normal equations matrix we can use discrete orthogonal relation between basis functions in longitude. Also we built field of gravity anomalies on Arctic area using model EGM 2008 up to 360 order. To estimate accuracy we compared obtained model of gravity anomalies and constructing field of gravity anomalies from model EGM 2008. We found the main characteristics of initial field of gravity anomalies on Arctic area and the model values and their differences.

*Key words:* gravity anomalies; approximation; local gravitational field; harmonic coefficients.

#### REFERENCES

- Dzhuman B. B. Pro pobudovu modeli lokalnoho hrovitatsiinoho polia [On the construction of local gravitational field model]. *Heodynamika*, 2013, No. 1(14), pp. 29–33.
- Lukianchenko Yu. O. Pobudova normalnykh rivnian dlia opratsiuvannia danykh misii GOCE [Construction of normal equations mission for processing data GOCE]. *Heodynamika*. 2013, No. 1(14), pp. 34–37.
- Marchenko A. N., Dzhuman B. B. Pobudova matrytsi normal'nykh rivnyan' dlya modelyuvannya lokal'noho hrovitatsiinoho polya [Construction of the normal equations matrix for modeling of local gravitational field]. *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*. 2014, 79, pp. 29–34.
- De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.* 1992, Issue 19, pp. 1065–1067.

- De Santis A., Torta J. Spherical cap harmonic analysis : a comment on its proper use for local gravity field representation // *J. of Geod.*, 1997, 71, pp. 526–532.
- Haines G. V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields // *Comput. Geosci.*, 1988, 14, pp. 413–447.
- Haines G. V. Spherical cap harmonic analysis // *J. Geophys. Res.*, 1985, 90, pp. 2583–2591.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. *Physical Geodesy*, Wien New York, Springer Science + Business Media, 2005, pp. 403.
- Hwang C., Chen S. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 // *Geophys. J. Int.*, 1997, 129, pp. 450–460.
- Hwang J., Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis / J. Hwang, H. Han, S. Han, K. Kim, J. Kim, M. Kang, C. Kim // *J. of Geodynamics*, 2012, 53, pp. 27–33.
- Jiancheng L., Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / L. Jiancheng, C. Dingbo, N. Jiancheng // *Manuscr. Geod.*, 1995, 20, pp. 265–277.
- NGA, Arctic Gravity Project, The National Imagery and Mapping Agency, 2008, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/>
- Thebault E., Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) / E. Thebault, M. Manda, J. Schott // *J. of Geophys. Research*, 2006, 111, 13 p.

Надійшла 22.10.14 р.