ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 40–45

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 40–45

НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА У ПРОСТОРАХ БЕСЕЛЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

А.О. Лопушанський

Жешувський університет, 35-310 Жешув, Рейтана 16А, Польща

(Отримано 12 жовтня 2011 р.)

Знайдено достатні умови розв'язності нелінійних інтегро - диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна у просторах беселевих потенціалів за просторовими змінними, неперервно диференційовних за часовою змінною.

Ключові слова: секторіальний оператор; комплексні інтерполяційні шкали; простори беселевих потенціалів; нелінійні інтегро - диференціальні рівняння

2000 MSC: 35K55

УДК: 517.95

I. Вступ

У статті знайдено достатні умови розв'язності рівняння

$$u(x,t) = g(x,t) + \int_0^t\int_\Omega G(x,t;y,\tau)g_0\Big(y,\tau,u(y,\tau),\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial\tau}\Big)\,dyd\tau \tag{1.1}$$

у класах функцій $\Omega\times[0,T]\ni(x,t)\longmapsto u(x,t)$, що належать до просторів беселевих потенціалів [1, с. 79] за змінною x, неперервно диференційовних за змінною t, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $G(x,t;y,\tau)$ – функція Гріна нормальної параболічної крайової задачі для деякого параболічного за Петровським диференціального оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x)D_x^\gamma, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T].$$

В окремому випадку

$$g_0\Big(y,\tau,u(y,\tau),\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial\tau}\Big) = g_1\big(y,\tau,u(y,\tau)\big),$$
$$g(x,t) = \int_\Omega G(x,t;y,0)g_2(y)dy$$

до рівняння вигляду (1.1) зводиться нормальна крайова задача для півлінійного параболічного рівняння з однорідними крайовими умовами та заданою в початковій умові функцією $\Omega\ni x\longmapsto g_2(x)$.

II. Допоміжні поняття

1. В обмеженій області $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ класу C^∞ розглядаємо сильно еліптичний лінійний оператор

$$L(x,D) = \sum_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x)D^\gamma, \qquad a_\gamma(x)\in L_\infty(\Omega)$$

тобто такий, що для всіх $\zeta\in\mathrm{R}^n\backslash\{0\}$, $x\in\Omega$

$$\operatorname{Re} a(x,\zeta) = \operatorname{Re}\sum_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x)\zeta^\gamma > 0,$$

де $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$–мультиіндекс, $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n$, $D^\gamma=\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial^{\gamma_1}\dots\partial^{\gamma_n}}$, $\zeta^\gamma=\zeta_1^{\gamma_1}\cdot\dots\cdot\zeta_n^{\gamma_b}$. Вважаємо, що функції a_γ належать $L^\infty(\Omega)$, а при $|\gamma|=2m$ є неперервними в $\overline{\Omega}$. Нехай на межі $\partial\Omega$ визначені оператори

$$B_j(x,D) = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(x)D^\gamma,$$
$$b_{j,\gamma}\in C^{2m-k_j}(\partial\Omega), \quad j=1,\dots,m.$$

Припускаємо, що система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна [2, с. 178] і щодо оператора $L(x,D)$ виконуються умови параболічності Агмона

(**Ag**): • $a(x,\xi)\ne e^{i\omega}$ для будь-якого $\omega\in[-\omega_0\,\omega_0]$, де $\omega_0\in(\pi/2,\pi)$;

• для будь-якого $\omega\in[-\omega_0\,,\omega_0]$, дотичного в точці $x\in\partial\Omega$ вектора μ_x та нормального в точці $x\in\partial\Omega$ вектора ν_x кожен поліном $\mathbb{C}\ni z\to a(x,\mu_x+z\,\nu_x)-\lambda$, де $\lambda\in l_\omega$, має m коренів $z_1\,,\dots,z_m$ з додатною уявною частиною і поліноми $\big\{\sum_{|\gamma|=k_j} b_{j,\gamma}(x)(\mu_x+z\,\nu_x)^\gamma\big\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^m(z-z_j)$.

Нехай $G(x,t;y,\tau)$ – функція Гріна нормальної параболічної крайової задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = L(x,D)v(x,t)+f(x,t), x\in\overline{\Omega}, t\in(0,T],\\ v(x,0)=g(x), \qquad x\in\overline{\Omega},\\ B_j(x,D)v(x,0)|_{x\in\partial\Omega}=0, \qquad j=1,\dots,m,\end{cases} \tag{2.2}$$

Її існування та властивості одержано в [2].

2. Нехай A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі V_0 над $\mathbb{C}$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)=V_1$, $E_{10}\colon V_1\hookrightarrow V_0$ – неперервне щільне вкладення банахового простору V_1 з нормою графіка A; $l_\omega := \{re^{i\omega} : r>0\}$ – промінь з кутом $\omega\in[0,2\pi]$;

$\omega_0 \in (\pi/2,\pi)$ – фіксований кут; $\Lambda_0 := \bigcup\{l_\omega : \omega \in [-\omega_0,\omega_0]\}$ і $\Lambda := \Lambda_0 \bigcup \{0\}$ – відповідно замкнений сектор в $\mathbb{C}$ з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання; $\mathcal{A}$ – клас секторіальних лінійних операторів $A \in \mathcal{L}(V_1;V_0)$ таких, що $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\left\|\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty$, де стала $K(A)$ залежить тільки від A (оператори $(\lambda E_{10}-A)^{-1} : V_0 \to V_1$ є визначені для всіх $\lambda \in \Lambda$ і належать до простору $\mathcal{L}(V_0;V_1)$ всіх неперервних операторів із V_0 в V_1), $\varrho(A)$ – резольвентна множина A. В загальному випадку (див. [3]) лінійний оператор A над V_0 називають секторіальним, якщо існують такі сталі $\omega_0 \in (\pi/2,\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ та $C > 0$, що $\alpha + \Lambda_0 \subset \varrho(A)$ і

$$\left\|R(\lambda,A)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{|\lambda-\alpha|}, \quad \forall\lambda \in \alpha+\Lambda_0.$$

Довільний секторіальний оператор лінійною заміною зводиться до оператора класу $\mathcal{A}$.

3. Розглянемо далі замкнений лінійний оператор

$$(Av)(x) = L(x,D)\,v(x),$$

заданий у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі

$$\begin{aligned} V_1 &= H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \\ &= \Big\{v \in H^{2m}_p(\Omega) : B_j(x,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j=\overline{1,m}\Big\}. \end{aligned}$$

Тут $H^{2m}_p(\Omega)$ – простір беселевих потенціалів, підпростір $H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений в $H^{2m}_p(\Omega)$ і наділений його нормою. Припустимо далі, що $0<\theta<1$,

$$\begin{aligned} V_\theta &= H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \\ &= \Big\{v \in H^{2m\theta}_p(\Omega) : B_j(x,D)v_{\,|\partial\Omega} = 0;\ j=\overline{1,m}\Big\} \end{aligned}$$

з нормою простору беселевих потенціалів $H^{2m\theta}_p(\Omega)$ порядку $2m\theta$. Це щільний в $L_p(\Omega)$ підпростір, замкнений в $H^{2m\theta}_p(\Omega)$.

Крайова задача (2.2), яка додатково задовольняє припущення (Ag), є параболічною в сенсі означення [4], оскільки оператор $A\colon V_1 \longrightarrow V_0$ породжений (2.2) є секторіальним і заданим над простором V_0 із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A) = V_1$, який генерує аналітичну півгрупу лінійних обмежених операторів $0 \le t \longmapsto e^{tA} \in \mathcal{L}(V_0)$.

Припущення (L): Нехай

$$0<\eta<1, \quad k_j < 2m\eta - \frac{1}{p}, \qquad \forall j=\overline{1,m}. \qquad (2.3)$$

Відомо (див. [5, теорема Сілі, с. 400]), що, якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності (2.3), то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \left[L_p(\Omega), H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right]_\eta,$$

де праворуч проміжний простір з показником η, породжений методом комплексної інтерполяції банахової пари $\left\{L_p(\Omega),\, H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right\}$. При цьому

$$H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \mathcal{D}(J^\eta)$$

— область визначення дробового степеня оператора

$$J = \left[E_{10} - (-\Delta)^{1/2}\right]^{2m} :\ H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

(див. [5, 2.5.3]). Це дозволяє до оператора A застосувати результати [6] про інтерполяцію дробовими степенями операторів.

III. Розв'язок інтегро - диференціального рівняння

1. Нехай $C\Big([0,T];H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$ – простір неперервних вектор - функцій $v\colon [0,T] \ni t \longmapsto v(t,\cdot) \in H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, породжених комплексними функціями $[0,T]\times\overline{\Omega} \ni (t,x) \longmapsto v(t,x)$ що за просторовою змінною $x \in \overline{\Omega}$ належать простору $H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, і який наділений рівномірною нормою $\|v\|_{2m\eta} = \max\limits_{t\in[0,T]}\left\|v(t,\cdot)\right\|_{H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$. Розглянемо простір $W_{1,\eta} = C\Big([0,T];H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)\bigcap C^1\Big([0,T];H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$ з нормою $\|v\|_{1,\eta} = \max\left\{\|v\|_{2m(\eta+1)}, \|v'_t\|_{2m\eta}\right\}$ вектор - функцій класу $W_\eta := C\Big([0,T];H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, які є сильно неперервно диференційованими за змінною $t\in[0,T]$ зі значеннями похідної v'_t в $H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$. Нехай $W_{1,\eta;C} = \{v \in W_{1,\eta} : \|v\|_{1,\eta} \le C\}$ і $H^{2m\eta}_{p,\{B_j\},C}(\Omega) = \Big\{v \in H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) : \|v\|_{H^{2m\eta}_p(\Omega)} \le C\Big\}$ – замкнені кулі.

Припущення (G): Нехай

- $0<\eta<\vartheta<1$,
- функція g належить простору $W_{1,\eta}$,
- для довільної вектор-функції $v \in W_{1,\eta}$ значення вектор - функціоналу

$$\begin{aligned} g_0 : [0,T]\times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \ni (t,v,v') \longmapsto \\ \longmapsto g_0\big(\cdot,t,v(\cdot,t),v'_t(\cdot,t)\big) \end{aligned}$$

за просторовою змінною $x\in\overline{\Omega}$ належать $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, до того ж сам вектор-функціонал g_0 належить класу неперервних вектор-функціоналів вигляду $C\Big(\Omega\times[0,T]\times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega);\ H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$.

Припущення (G1): Існують такі додатні сталі $K_1 > 0$, $M_1 > 0$, що для будь-яких $t\in[0,T]$ та для будь-яких $v_1, v_2 \in W_{1,\eta}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \big\|g_0\big(\cdot,t,v_1(t,\cdot),v'_1(t,\cdot)\big) - g_0\big(\cdot,t,v_2(t,\cdot),v'_2(t,\cdot)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_p(\Omega)} \\ \le K_1\left\|v_1(t,\cdot)-v_2(t,\cdot)\right\|_{H^{2m(1+\eta)}_p(\Omega)} + \\ +M_1\left\|v'_1(t,\cdot)-v'_2(t,\cdot)\right\|_{H^{2m\eta}_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

де норми взято за просторовою змінною $x\in\overline{\Omega}$.

Припущення (G2): Існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, q, r, C, що для будь-яких $t \in [0,T]$ та для будь-яких $v, v_1, v_2 \in W_{1,\eta}$

$$\left\| g_0\big(\cdot, t, v(t,\cdot), v'(t,\cdot)\big) \right\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \leq \\ \leq K_1 \|v(t,\cdot)\|^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + M_1 \|v'(t,\cdot)\|^r_{H_p^{2m\eta}(\Omega)},$$

$$\left\| g_0\big(\cdot, t, v_1(t,\cdot), v_1'(t,\cdot)\big) - g_0\big(\cdot, t, v_2(t,\cdot), v_2'(t,\cdot)\big) \right\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \\ \leq K_2 \|v_1(t,\cdot) - v_2(t,\cdot)\|^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + \\ + M_2 \|v_1'(t,\cdot) - v_2'(t,\cdot)\|^q_{H_p^{2m\eta}(\Omega)}$$

і норми взято за просторовою змінною $x \in \overline{\Omega}$.

Зауважимо, що припущення (G1) виконується, якщо існують такі додатні сталі $K_1, M_1 > 0$, що

$$\|g_0(x,t,z_1,\xi_1) - g_0(x,t,z_2,\xi_2)\|_{H_p^{2m\theta}(\Omega)} \leq \\ \leq K_1 \|z_1 - z_2\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + M_1 \|\xi_1 - \xi_2\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)},$$

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad z_1, z_2 \in H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega), \\ \xi_1, \xi_2 \in H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega),$$

а припущення (G2) виконується, зокрема, якщо існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, q, r, C, що

$$\|g_0(x,t,z,\xi)\|_{H_p^{2m\theta}(\Omega)} \leq \\ \leq K_1 \|z\|^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + M_1 \|\xi\|^r_{H_p^{2m\eta}(\Omega)},$$

$$\|g_0(x,t,z_1,\xi_1) - g_0(x,t,z_2,\xi_2)\|_{H_p^{2m\theta}(\Omega)} \leq \\ \leq K_2 ||z_1 - z_2||^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + M_2 ||\xi_1 - \xi_2||^r_{H_p^{2m\eta}(\Omega)},$$

$$\forall x \in \overline{\Omega}, t \in [0,T], \quad z_1, z_2 \in H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\},C}(\Omega), \\ \xi_1, \xi_2 \in H^{2m\eta}_{p,\{B_j\},C}(\Omega).$$

2. Приклад функції g_0, що задовольняє припущення (G2). Нехай $F[g] = \hat{g}$ – перетворення Фур'є функції g, $F^{-1}[g]$–обернене перетворення Фур'є від g,

$$l_{2m\vartheta}(x) = F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{-m\vartheta}\right], \\ g_0 = \left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0} * l_{2m\vartheta}, \quad 0 < q_0 < 1,$$

де через $g_1 * g_2$ позначено операцію згортки функцій g_1, g_2. Вирази для функцій $l_{2m\vartheta}(x)$ одержують із формули (5) [7, с. 153], наведені у [8, с. 142], де також відзначено деякі їх властивості. Зокрема маємо

$$l_{s_1} * l_{s_2} = l_{s_1+s_2}, \\ l_{-2m(1+\eta)} * v = l_{n+2-2\{m\eta\}} * l_{-2m-2[m\eta]-n-2} * v \\ = a * \big(1-\Delta\big)^{m+[m\eta]+\frac{n}{2}+1} v,$$

де $a(x) = l_{n+2-2\{m\eta\}}(x)$ – обмежена функція, Δ – оператор Лапласа, $[s]$– ціла частина дійсного додатного числа s, $\{s\}$– його дробова частина, а отже, функцію g_0 можемо подати як нелінійний інтегральний оператор від v та її похідних за просторовими змінними до порядку

$$2\left(m + [m\eta] + \frac{n}{2} + 1\right).$$

Враховуючи, що $g_1 * g_2 = F^{-1}\big[\hat{g}_1 \cdot \hat{g}_2\big]$, а отже,

$$g_0 = F^{-1}\left[F\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0}\right] \cdot \big(1+|\xi|^2\big)^{-m\vartheta}\right],$$

для довільних $v_1, v_2 \in H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)$ матимемо

$$\|g_0\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left|F^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{m\vartheta}\hat{g}_0\right]\right|^p dx\right]^{1/p} \\ = \left[\int_\Omega \left|F^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{m\vartheta}\left[F\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0}\right]\right] \times \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. \times \big(1+|\xi|^2\big)^{-m\vartheta}\right|^p dx\right]^{1/p} \\ = \left[\int_\Omega \left|F^{-1}\left[F\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0}\right]\right]\right|^p dx\right]^{1/p} \\ = \left[\int_\Omega \left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0 p} dx\right]^{1/p} \\ \leq \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^p dx\right]^{\frac{q_0}{p}} \\ = \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|F^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{m(1+\eta)}\hat{v}\right]\right|^p dx\right]^{\frac{q_0}{p}} \\ = \tilde{C}\left[\|v\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}\right]^{\frac{q_0}{p}}.$$

Подібно

$$\left\|g_0(x,t,v_1,v_1') - g_0(x,t,v_1,v_1')\right\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} = \\ = \left[\int_\Omega \left||l_{-2m(1+\eta)} * v_1|^{q_0} - |l_{-2m(1+\eta)} * v_2|^{q_0}\right|^p dx\right]^{1/p} \\ \leq \left[\int_\Omega |l_{-2m(1+\eta)} * (v_1 - v_2)|^{q_0 p} dx\right]^{1/p} \\ \leq \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|F^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{m(1+\eta)}[\hat{v}_1 - \hat{v}_2]\right|^p dx\right]^{\frac{q_0}{p}} \\ = \tilde{C}\left[\|v_1 - v_2\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}\right]^{\frac{q_0}{p}}.$$

Отже, вибрана функція g_0 задовольняє припущення (G2) із $q = \frac{q_0}{p} \in (0,1)$. Так само показуємо, що

$$g_0 = \left(\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{q_0} + \left|l_{-2m\eta} * v'\right|^{r_0}\right) * l_{2m\vartheta}$$

при $q_0, r_0 \in (0,1)$ задовольняє припущення (G2) із $q = \frac{q_0}{p}$, $r = \frac{r_0}{p} \in (0,1)$.

3. Нехай далі

$$P := \max_{t\in[0,T]} \|g(t,\cdot)\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}, \\ P_1 := \max_{t\in[0,T]} \|g'(t,\cdot)\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)}, \\ \hat{P} := \max\{P, P_1\}.$$

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умова* (2.3), *припущення* (Ag), (G) *та одне з припущень* (G1), (G2). *Тоді* (*за додаткових обмежень щодо* $K_1, M_1, \hat{P}$ *у випадку* $q \geq 1$, $r \geq 1$ *припущення* (G2)) *рівняння* (1.1) *розв'язне в класі* $W_{1,\eta}$. *У випадку припущення* (G1) *розв'язок единий.*

□ *Доведення.* Рівняння (1.1) зводиться до абстрактного операторного рівняння при $t \in [0, T]$

$$v(\cdot, t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g_0\big(\cdot, \tau, v(\cdot, \tau), v'(\cdot, \tau)\big) d\tau + g(\cdot, t) \tag{3.4}$$

у класі $W_{1,\eta}$. Введемо інтегральний оператор

$$H : (Hv)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g_0\big(\cdot, \tau, v(\cdot, \tau), v'(\cdot, \tau)\big)\, d\tau,$$

$v \in W_{1,\eta}$. Як при доведенні леми 1 у [9] показуємо, що інтегральний оператор

$$H_1 : H_1 v = Hv + g, \qquad v \in W_{1,\eta}$$

діє з $W_{1,\eta}$ в $W_{1,\eta}$. Використовуватимемо виведену в [6] оцінку, за якою

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t)\big\|_{2m(1+\eta)} \leq K \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t, v(t), v'(t)\big)\big\|_{2m\vartheta} \tag{3.5}$$

та тотожність при $t \in [0, T]$

$$(Hv)'(t) = g_0\big(t, v(t), v'(t)\big) + A(Hv)(t), \tag{3.6}$$

де стала K пропорційна нормі $\max\limits_{t\in[0,T]} \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta, V_{1+\vartheta})}$.

За припущення (G2) розглядаємо випадки: 1) $q, r \in (0, 1)$; 2) $q \geq 1$ та $r \geq 1$.

Для доведення існування нерухомої точки оператора H_1 застосуємо принцип Шаудера у випадку припущення 1 та принцип стисних відображень у випадку 2. Із (3.5) та(3.6) для довільної $v \in W_{1,\eta,C}$ маємо

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1 v)(t)\big\|_{W_{1,\eta}} = \\
&= \max\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1 v)(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}, \\
&\qquad \max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1' v)(t)\big\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)} \Big\} \leq \\
&\leq \hat{K} \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0(t, v(t), v'(t)))\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \\
&\leq \hat{K} \Big[K_1 \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + \\
&\qquad + M_1 \max_{t\in[0,T]} \|v'(t)\|^r_{H_p^{2m\eta}(\Omega)} \Big] \\
&\leq \hat{K} \left[K_1 \|v\|^q_{W_{1,\eta}} + M_1 \|v(t)\|^r_{W_{1,\eta}} \right],
\end{aligned}$$

де $\hat{K} = \max\{K, C_2 K + C_3\}$, стала C_2 характеризує ізоморфізм $\mathcal{D}\big[(-A)^{1+\eta}\big] \simeq V_{1+\eta}$, стала C_3 – норма неперервного вкладення $V_\vartheta \hookrightarrow V_\eta$. Звідки

$$\begin{aligned}
\|H_1 v\|_{1,\eta} &\leq \hat{K}\,[K_1 C^q + M_1 C^r] + \hat{P} \\
&= b_1 C^q + b_2 C^r + b_3, \quad \forall v \in W_{1,\eta,C},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

де $b_1 = \hat{K} K_1$, $b_2 = \hat{K} M_1$, $b_3 = \hat{P}$.

За властивостями функції $h(C) = b_1 C^q + b_2 C^r + b_3$ при $q, r \in (0, 1)$, довільних додатних сталих b_1, b_2, b_2 існує така додатна стала C_0, що при всіх $C > C_0$ виконується $b_1 C^q + b_2 C^r + b_3 < C$, а отже,

$$\|H_1 v\|_{1,\eta} < C, \qquad \forall v \in W_{1,\eta,C} \tag{3.8}$$

і $H_1 \colon W_{\eta,C} \longrightarrow W_{\eta,C}$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
b_1 C^q + b_2 C^r + b_3 &= (b_1 + b_2) C + b_3 \\
&= b' C + b_3 \text{ при } q = r = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C^q + b_2 C^r + b_3 \\
&\qquad \leq (b_1 + b_2) C^q + b_3 \text{ при } C \geq 1,\ q \geq r \geq 1.
\end{aligned}$$

За властивостями функції $h_1(C) = b' C + b_3$ при довільній додатній сталій b_3 та $b' < 1$ існує така додатна стала C, що $h_1(C) < C$. Тоді матимемо (3.8).

Із нерівності

$$b' C^q + b_3 < \varepsilon C, \qquad C \geq 1 \quad \varepsilon \in (0, 1] \tag{3.9}$$

випливає існування сталих $C > 0$, за яких у випадку $q \geq r \geq 1$ виконується (3.8). Для виконання (3.9) достатньо [1, с. 320] існування $\min\limits_{C\geq 0} h_2(C) \leq -b_3$, де $h_2(C) = b' C^q - \varepsilon C$. Число $C_0 = \sqrt[q-1]{\frac{\varepsilon}{b' q}}$ є точкою мінімуму функції $h_2(C)$. Знаходимо

$$\begin{aligned}
h_2(C_0) &= C_0 \left(b' C_0^{q-1} - \varepsilon \right) = C_0 \left(b' \frac{\varepsilon}{b' q} - \varepsilon \right) \\
&= -C_0 \varepsilon \left(1 - \frac{1}{q} \right).
\end{aligned}$$

Звідси отримуємо еквівалентні нерівності

$$\begin{aligned}
&-C_0 \varepsilon \left(1 - \tfrac{1}{q} \right) < -b_3 \iff C_0 > \frac{b' q}{\varepsilon (q-1)} \iff \\
&\qquad \iff b' b_3^{q-1} < \left(\frac{\varepsilon}{q} \right)^q (q-1)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Умова $C_0 \geq 1$ виконується при $b' \leq \frac{r}{q} < \frac{1}{q}$. Отже, за умов

$$\begin{aligned}
&\hat{K}^q (K_1 + M_1) \hat{P}^{q-1} < \left(\frac{1}{q} \right)^q (q-1)^{q-1}, \\
&\hat{K} (K_1 + M_1) < \frac{1}{q}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

існує така стала $C > 0$, що виконується (3.8) та $H_1 \colon W_{1,\eta,C} \longrightarrow W_{1,\eta,C}$.

При $q > 1$, $r = 1$ функція $h_3(C) = b_1 C^q + b_2 C - C$ має мінімум у точці $C_0 = \sqrt[q-1]{\frac{1-b_2}{b_1 q}}$, а нерівність $h_3(C_0) < -b_3$ рівносильна $(\frac{1-b_2}{q})^q < b_1 q (q-1)^{-1} b_3^{q-1}$.

Аналогічно для довільних $v_1, v_2 \in W_{1,\eta,C}$

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1 v_1)(t) - (H_1 v_2)(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} \leq \\
&\leq K \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0(t, v_1(t), v_1'(t)) - g_0\big(t, v_2(t), v_2'(t)\big)\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\leq K\Big[K_2 \max_{t\in[0,T]} \|v_1(t)-v_2(t)\|^q_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + \\ +M_2 \max_{t\in[0,T]} \|v_1'(t)-v_2'(t)\|^r_{H_p^{2m\eta}(\Omega)}\Big] \\ \leq K\left[K_2\|v_1-v_2\|^q_{1,\eta}+M_2\|v_1-v_2\|^r_{1,\eta}\right],$$

а також

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1v_1)'(t)-(H_2v_2)'(t)\big\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)} \leq \\ \leq \max_{t\in[0,T]} \big\|A[(Hv_1)(t)-(Hv_2)(t)]\big\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)} + \\ + \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0(t,v_1(t),v_1'(t))-g_0(t,v_2(t),v_2'(t))\big\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)} \\ \leq C_2 \max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv_1)(t)-(Hv_2)(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + \\ +C_3 \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0(t,v_1(t),v_1'(t))-g_0(t,v_2(t),v_2'(t))\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \\ \leq \hat{K}\left[K_2\|v_1-v_2\|^q_{1,\eta}+M_2\|v_1-v_2\|^r_{1,\eta}\right].$$

Звідси одержуємо неперервність оператора H на $W_{1,\eta,C}$.

При $q \geq r > 1$ для довільних $v_1, v_2 \in W_{\eta,C}$ маємо

$$\|v_1-v_2\|^q_{1,\eta} \leq a(q)\max\Big\{\|v_1\|^{q-1}_{1,\eta}, \|v_2\|^{q-1}_{1,\eta}\Big\}\|v_1-v_2\|_{1,\eta} \\ \leq a(q)C^{q-1}\|v_1-v_2\|_{1,\eta},$$

а тоді $\|Hv_1-Hv_2\|_{1,\eta} \leq a'\|v_1-v_2\|_{1,\eta}$, де $a' = a'(C) = \hat{K}\left[K_2a(q)+M_2a(r)\right]C^{q-1}$, $a(q) = 2^{2-q}q$ при $q \in (1,2)$, $a(q) = q$ при $q \geq 2$. Оскільки

$$a'(C_0) = \frac{[K_2a(q)+M_2a(r)]}{K_1+M_1}\frac{\varepsilon}{q},$$

то вибором числа ε досягаємо нерівності $a'(C_0) < 1$. Отже, у випадку $q \geq r > 1$ $\big($та при $q = r = 1$, якщо $b_1 + b_2 < 1\big)$ існує таке $C > 0$, що оператор H_1 стисний на $W_{1,\eta,C}$ і за принципом стисних відображень за умови (3.10) у випадку $q \geq r > 1$ $\big($та при $q = r = 1$, якщо $b_1 + b_2 < 1\big)$ рівняння (1.1) має розв'язок у $W_{1,\eta,C}$.

Випадок $r \geq q > 1$ аналогічний.

У випадку $q \in (0,1)$ доведемо компактність оператора H на $W_{1,\eta,C}$. Вище доведена рівномірна обмеженість $\big\|H_1v\big\|_{1,\eta}$ на $W_{1,\eta,C}$. Покажемо одностайну неперервність множини $W_{1,\eta,C}$ в $W_{1,\eta}$. Для довільних $v \in W_{1,\eta,C}$, $s \in \mathbb{R}$ маємо

$$Q(v) = \max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1v)(t+s)-(H_1v)(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} \\ = \max_{t\in[0,T]} \Big\| \int_t^{t+s} e^{(t-\tau)A}g_0\big(\tau,v(\tau),v'(\tau)\big)d\tau + \\ +g(t+s)-g(t)\Big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} \leq \\ \leq |s|K_3 \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t,v(t),v'(t)\big)\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} + \\ + \max_{t\in[0,T]} \big\|g(t+s)-g(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)},$$

де K_3 – певна додатна стала. Остання нерівність випливає з результатів [10] та [6]. Враховуючи припущення (G2), матимемо

$$Q(v) \leq |s|K_3\big(K_1C^q + M_1C^r\big) + \\ + \max_{t\in[0,T]} \big\|g(t+s)-g(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}.$$

Тоді для довільних $v \in W_{1,\eta,C}$, $\varepsilon > 0$ існує таке $s_1 = s_1(\varepsilon, C) > 0$, що при всіх $|s| < s_1$ матимемо $Q(v) < \varepsilon$. Подібно

$$Q_1(v) = \max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1v)'(t+s)-(H_1v)'(t)\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \\ = \max_{t\in[0,T]} \big\|A[(Hv)(t+s)-(Hv)(t)] + \\ +\big[g_0\big(t+s,v(t+s),v'(t+s)\big)-g_0\big(t,v(t),v'(t)\big)\big] + \\ +\big[g'(t+s)-g'(t)\big]\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} \\ \leq C_2 \max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t+s)-(Hv)(t)\big\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)} + \\ +C_3 \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0(t+s,v(t+s),v'(t+s)) - \\ -g_0(t,v(t),v'(t))\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} + \\ + \max_{t\in[0,T]} \big\|g'(t+s)-g'(t)\big\|_{H_p^{2m\eta}(\Omega)}.$$

Тоді для довільних $v \in W_{1,\eta,C}$, $\varepsilon > 0$ існує таке $s_2 = s_2(\varepsilon, C) > 0$, що при всіх $|s| < s_2$ матимемо $Q_1(v) < \varepsilon$, а при $|s| < \min\{s_1, s_2\}$ матимемо $\max\{Q(v), Q_1(v)\} < \varepsilon$. За лемою Арцела оператор H_1 компактний на $W_{1,\eta,C}$.

За припущення (G1), враховуючи вищенаведене, для довільних $v_1, v_2 \in W_{1,\eta}$ одержуємо

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1v_1)(t)-(H_1v_2)(t)\big\|_{1,\eta} \\ \leq \hat{K}\left[K_1+M_1\right]\|v_1-v_2\|_{1,\eta},$$

а отже, при $\hat{K}\left[K_1+M_1\right] < 1$ оператор стисний на $W_{1,\eta}$. ■

Висновки

Доведено теорему існування розв'язку інтегро-диференціального рівняння у класах неперервно диференційовних функцій за однією змінною, що належать до просторів беселевих потенціалів за іншими змінними. Як окремий випадок звідси одержуємо достатні умови розв'язності нормальної крайової задачі для напівлінійної параболічної системи рівнянь з початковими даними в просторах беселевих потенціалів.

Література

[1] Функциональный анализ (под общ. ред. Крейна С.Г.). Серия "Справочная математическая библиотека". – М., 1972. – 544 с.

[2] Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Вища школа. – 1990. – 200 с.

[3] Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 351 с.

[4] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985.

[5] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М., 1980.

[6] Лопушанский А.О. Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, №12. С. 1799–1803.

[7] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

[8] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

[9] Лопушанський А.О. Регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного параболічного рівняння // Математичний вісник НТШ. – 2011.

[10] Лопушанський А.О. Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 2006.– Т. 49, №2. – С. 65–73.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А.О. Лопушанский

Жешувский университет,
ул. Рейтана, 16А, 35-310б, Жешув, Польща

Найдены достаточные условия разрешимости в пространствах бесселевых потенциалов нелинейных интегро - дифференциальных уравнений типа Гаммерштейна.

Ключевые слова: секториальный оператор; комплексные интерполяционные шкалы; пространства беселевых потенциалов; нелинейные интегро-дифференциальные уравнения.

2000 MSC: 35K55

УДК: 517.95

NONLINEAR HAMMERSTEIN TYPE EQUATIONS IN B BESSEL POTENTIALS' SPACES

A.O. Lopushansky

Rzeszów University, Rejtana str., 16A, 35-310 Rzeszów, Poland

The sufficient conditions of solvability of nonlinear integral-differential equations of Hammerstein type in Bessel potentials' spaces under space variables and continuous differentiable under time varianle are obtained.

Key words: sectorial operator, complex interpolation scales, Bessel potentials' spaces, nonlinear integral-differential equations

2000 MSC: 35K55

УДК: 517.95