

МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

УДК 681.3:519.15

О. Бандирська

Державне підприємство НДІ “Система”,
Львівська філія Державного підприємства
“Український науково-дослідний та навчальний центр”

ВІД ТЕОРІЇ БЕЗНАДЛИШКОВИХ ШКАЛ ДО ПРОГРЕСИВНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

© Бандирська О., 2007

Розглядаються засади теорії безнадлишкових шкал, яка ґрунтується на комбінаторних властивостях оптимальних структурних пропорцій (ОСП) і може знайти застосування в прогресивних інформаційних технологіях для побудови систем кодування та перетворення інформації з використанням ідеального кільцевого монолітного коду (ІКМК), що передбачає високоякісне кодування, пересилання та перетворення даних не лише у вигляді одновимірних масивів, але й досконало розподілених з погляду мінімізації інформаційної надлишковості векторних даних.

The non redundancy scales theoretical basis, based on remarkable properties of the Optimal Structural Proportions (OSP)s, which allows on application progressive information technologies for coded systems and transforming information technologies design, using The Ideal Ring Monolithic Code (IRMC), which provides high performance data coding, translating and transforming not only one-dimensional data, but vector data arrays to be of perfectly distributed with point of data redundancy minimization, are considered.

Вступ. У сучасних інформаційних технологіях важливого значення набуває проблема зменшення структурної, інформаційної та алгоритмічної надмірності систем контрольно-вимірювальної техніки. Ця проблема постає не лише в контрольно-вимірювальній техніці, але й у суміжних галузях, які пов'язані з удосконаленням та підвищенням якісних показників інформаційних технологій за такими параметрами, як роздільна здатність, достовірність, надійність тощо. Розгортання досліджень у нових наукових напрямках за новими принципами та методами структурної оптимізації систем структуризації, перетворення та пересилання інформації відкривають шляхи до пошуків ефективних методів синтезу систем з поліпшеними технічними характеристиками, а узагальнення результатів таких досліджень та їх проектування на інші технічні, економічні чи природничо-філософські науки, як правило, також приносять добрі плоди для глибшого розуміння об'єднаних законів гармонії природи та її фундаментальної ролі в досконалості світобудови. У статті розкриваються дивовижні властивості нового класу шкал для відліку відстаней, так званих «безнадмірних шкал», та розглядаються деякі аспекти розвитку теорії безнадмірних шкал з погляду перспективи здійснення «проривних» інформаційних технологій, що ґрунтуються на цій теорії.

Огляд літературних джерел. Проблема оптимізації системи кодування інформації за критерієм мінімізації інформаційної надмірності необхідно вважати розв'язаною лише для невпорядкованих систем вагових кодових розрядів, оскільки в цьому випадку оптимізація

зводиться лише до вибору відповідних співвідношень між числовими значеннями вагових розрядів і не залежить від топологічної структури системи кодування. Ще італійський математик Леонардо Пізанський (Fibonacci) (1180–1240) довів оптимальність двійкової системи ваг за критерієм мінімізації числа ваг, відкривши двійковий алгоритм вимірювання і двійкову систему числення, яку покладено в основу більшості сучасних інформаційних технологій. Використання кодів Фібоначчі, як і більшості інших кодів у цифровій техніці, пов'язано з можливістю оптимізації систем вагових розрядів за обраним критерієм та встановленими обмеженнями на правила формування дозволених кодових комбінацій. Одним із напрямків таких досліджень є створення алгоритмічної теорії вимірювання [2]. Основним результатом цієї теорії є широке узагальнення рекурентного співвідношення Фібоначчі, що породжує „безмежну” множину числових рядів.

Системи вагових розрядів, утворених за допомогою рядів p -чисел Фібоначчі:

$$\varphi_p = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n < 0 \\ 1, & \text{якщо } n = 0 \\ \varphi_p(n-1) + \varphi_p(n-p-1), & \text{якщо } n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рекурентне співвідношення (1) при $p=0$ утворює ряд 1, 2, 4, 8, 16,...; при $p=1$ – ряд 1,1,2,3,5,8; при $p=2$ – ряд 1,1,1,2,3,4,6,9... і т.д; причому при $p=\infty$ ряд матиме вигляд 1,1,1,1,1,...,1.

Завдяки надмірності кодів, побудованих на рекурентних співвідношеннях Фібоначчі, алгоритмічна теорія вимірювання використовується для побудови логіко-достовірних комп'ютерів Фібоначчі, в задачах забезпечення самосинхронізації, контролю помилок та оптимального узгодження спектрів кодового сигналу і каналу для систем цифрової реєстрації та систем зв'язку, а також поліпшення технічних характеристик аналого-цифрових та цифро-аналогових перетворювачів [2]. Частковими випадками числових рядів, сприятливих для формування кодових послідовностей, є також степеневі ряди чисел, система біноміальних коефіцієнтів, а також натуральний ряд чисел [3]. Під надмірністю системи прийнято розуміти перевищення обсягу сигналів або міри складності структур системи порівняно з їхніми мінімальними значеннями, необхідними для того, щоб виконати поставлене завдання [1]. Надмірність може вводитися штучно, коли потрібно, наприклад, поліпшити основні характеристики системи за надійністю, точністю або завадостійкістю.

Проблема надмірності в метрології пов'язана з двома основними завданнями: 1) введенням штучної надмірності з метою поліпшення основних метрологічних характеристик вимірювального засобу (точності, стабільності тощо); 2) зменшенням природної інформаційної надмірності, щоб спростити систему. На абстрактному рівні можна говорити про інформаційну надмірність системи, тобто про надмірність у кількості інформації, яку переробляють. Для оцінювання складності структури не існує загальноприйнятого способу, а методи раціонального вибору співвідношення між кількістю елементів, їх взаємним розміщенням та кількістю зв'язків, нарешті обрання доцільної топологічної структури проектованої системи зі заданими технічними характеристиками здебільшого залежать від творчої інтуїції проектанта. Тому актуальним є дослідження проблеми інформаційної надмірності рядів як числових конструкцій (шаблонів) для синтезу безнадлишкових наборів мір та їх стандартизації з метою удосконалення нормативної бази проектування пристроїв і засобів інформаційно-вимірювальної техніки з поліпшеними якісними показниками.

Проблема мінімізації надмірності шкал

Вперше ідея безнадмірної кругової шкали з'явилася в працях В.В. Різника на початку 70-х років минулого століття. Цю ідею було покладено в основу створення цілого ряду нових технологій та пристроїв з поліпшеними технічними характеристиками, зокрема вперше був запропонований «ідеальний кільцевий монолітний код» (ІКМК), створений за безнадлишковою системою впорядкування вагових розрядів [4]. У цьому контексті необхідно згадати про винахід професора Соломона У. Голомба (Південнокаліфорнійський університет, США), який запропонував використати свій пристрій – «ідеальну лінійку Голомба» в радіоастрономії [5]. Ідеальна лінійка

Голомба – це, по суті, безнадлишкова багатозначна міра довжини, виконана у вигляді нероздільної (монолітної) конструкції – лінійки. З’ясувалося, що подібного типу пристрої можуть успішно застосовуватися в теорії кодування, рентгенівській кристалографії, конструюванні електронних схем, радіоастрономії. Результати досліджень були впроваджені в Національному геодезичному центрі Національної служби Сполучених Штатів Америки по океану і атмосфері для поліпшення роздільної здатності віддалених радіоджерел за допомогою методу інтерференції, а також для підвищення точності вимірювання параметрів Землі. В основу методу закладено систему радіотелескопічних антен, розташованих за лінійкою Голомба з довжиною бази у декілька кілометрів. Для визначення координат віддаленого радіоджерела необхідно знайти кут між лінією бази антен і напрямком фронту хвилі, яка надходить від джерела. Шуканий кут обчислюється на ЕОМ з використанням аналізу Фур’є за відомими значеннями довжини хвилі, на яку налаштовані всі антени, швидкості світла та повної різниці фаз між прийнятими сигналами, що фіксуються одночасно усіма парами антен. При однакових відстанях між парами антен інформація про зсув за фазою виявляється надлишковою, що означає практично її втрату. Найвищої точності обчислень вдається досягнути за умови, коли кожна пара антен фіксує відмінний від решти пар зсув за фазою [5]. Саме ця умова задовольняється при рознесенні антен за лінійкою Голомба.

«Ідеальні кутоміри Різника» та «ідеальні лінійки Голомба» відкрили новий перспективний напрям фундаментальних і прикладних досліджень не лише в інформаційно-вимірювальній техніці, радіофізиці чи кристалографії, але й в усьому природознавстві, оскільки ідея безнадмірності структур пов’язана з глибшим розумінням досконалості структуризації та гармонії світобудови.

Властивості безнадлишкових шкал

На відміну від широко вживаної звичайної лінійки з рівномірною шкалою ідеальна лінійка Голомба має нерівномірну шкалу і є багатозначною мірою довжини з безнадлишковою шкалою, що впливає з її властивостей. Однак, як відомо [5], існують лише дві ідеальні лінійки Голомба. Найдовша з них має чотири ($n=4$) позначки (0,1,4,6), де кожна відстань укладається між обраною парою позначок і обчислюється як різниця між цілими числами, яким ці позначки відповідають: $1=1-0$, $2=6-4$, $3=4-1$, $4=6-0$. Ця лінійка дає змогу відтворювати ряд послідовно зростаючих розмірів лінійних відстаней завдовжки до шести ($G_1=6$) одиниць, яка визначається як сума чисел арифметичного ряду $1,2,\dots,n$, що збігається з максимально можливим теоретично числом G_1 градацій робочого діапазону цієї міри:

$$G_1 = 1+2+\dots+n = n(n+1)/2 \quad (2)$$

Ідеальна лінійка Голомба з трьома позначками (0,1,3) дає змогу відтворювати три відстані, пропорційні числам ряду 1,2,3: $1=1-0$, $2=3-1$, $3=3-0$. Ідеальна лінійка (0,1) як тривіальний випадок до уваги не береться. Відсутність ідеальних лінійок з кількістю позначок більшою ніж чотири не дає змоги будувати ідеальні безнадлишкові багатозначні міри довжини у вигляді лінійки з довжиною шкали на кількість градацій, більшу за шість, що значною мірою обмежує можливості їх практичного використання в народному господарстві. Звідси постає проблема дефіциту ідеальних безнадлишкових багатозначних мір з кількістю градацій, більшою за шість.

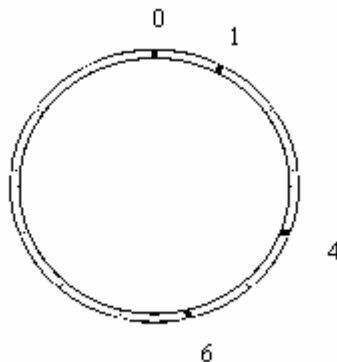


Рис. 1. Схема безнадлишкової кругової шкали з чотирма ($n=4$) позначками: 0,1,4,6

Проблему вдалося успішно подолати, використовуючи принцип оптимальних структурних пропорцій, суть якого зручно проілюструвати властивостями кругової шкали з нерівномірним розміщенням на ній позначок для відліку кутових відстаней. На рис.1 зображено схему кругової шкали з чотирма ($n=4$) позначками (0, 1, 4, 6). Вона дає змогу здійснювати відлік кутових відстаней в діапазоні 0-360 град. з кроком 360/13 град. Позначки розміщені так, що кутові відстані між сусідніми позначками дорівнюють відповідно 360/13, 3·360/13, 2·360/13, 7·360/13 град. Це дає змогу відтворити на ній найдовший апіорі ряд розмірів кутової відстані від 360/13 до 12· 360/13 град. з однаковим кроком приросту 360/13 град., що впливає з табл. 1.

Таблиця 1

Таблиця відповідності "шкала-кут" для без надлишкової шкали кутоміра з позначками 0,1,4,6

Напря́м відліку кута (за годинниковою стрілкою)		Значення кутового розміру
Початок відліку	Кінець відліку	<i>град.</i>
0	1	$\alpha_1 = 360/13$
0	4	$4\alpha_1$
0	6	$6\alpha_1$
1	4	$3\alpha_1$
1	6	$5\alpha_1$
1	0	$12\alpha_1$
4	6	$2\alpha_1$
4	0	$9\alpha_1$
4	1	$10\alpha_1$
6	0	$7\alpha_1$
6	1	$8\alpha_1$
6	4	$11\alpha_1$

За табл.1 можна легко визначити величину реалізованого кутового розміру в межах від 360/13 до 12 360/13 *град.* з кроком 360/13 *град.* залежно від вибору початкової та кінцевої позначок шкали за наявності на ній лише чотирьох позначок. Таблицею зручно користуватися під час вимірювання кутових відстаней, наприклад, методом порівняння невідомої відстані з кутовими розмірами багатозначної міри.

За правилами елементарної комбінаторики легко обчислити максимально можливе число G_r градацій робочого діапазону для безнадмірної кругової шкали з n позначками, що дорівнює кількості всіх можливих способів відтворення кутових відстаней різного розміру, здійснюваних одним відліком:

$$G_r = n(n - 1). \quad (3)$$

Запропонований метод дає змогу здійснювати глибші дослідження проблеми подолання надмірності систем на прикладі мінімізації надмірності шкал з нерівномірно нанесеними позначками. В основу цих досліджень покладено принцип оптимальних структурних пропорцій, спрямований на подолання глобальної проблеми сучасної науки – проблеми інформаційної та структурної надмірності систем.

У випадку відтворення кутових розмірів за допомогою багатозначної міри з безнадлишковою шкалою зручніше користуватися таблицею відповідності "кут – шкала" (табл.2).

За табл.2 можна визначити початкову й кінцеву позначки безнадлишкової шкали з чотирма поділками залежно від вибору потрібної величини кутової відстані в межах від $360/13$ до $12 \cdot 360/13$ град. з кроком $360/13$ град.

Вищенаведені приклади ілюструють переваги безнадлишкових кругових шкал порівняно з аналогами – лінійками: забезпечення теоретично досяжного мінімуму надмірності шкали з одночасним збільшенням кількості градацій в $2(n-1)/(n+1)$ разів, що впливає з порівняння виразів (2) і (3).

Таблиця 2

**Таблиця відповідності “кут – шкала” кутоміра
для безнадлишкової шкали з позначками 0, 1, 4, 6**

Таблиця відповідності "кут - шкала" для кутоміра з позначками 0, 1, 4, 6		
Кутовий розмір, град.	Відлік за позначками шкали	
	Від	До
$\alpha_1=360/13$	0	1
$2\alpha_1$	4	6
$3\alpha_1$	1	4
$4\alpha_1$	0	4
$5\alpha_1$	1	6
$6\alpha_1$	0	6
$7\alpha_1$	6	0
$8\alpha_1$	6	1
$9\alpha_1$	4	0
$10\alpha_1$	4	1
$11\alpha_1$	6	4
$12\alpha_1$	1	0

Результати порівняння згаданих шкал за числом градацій для різної кількості n позначок наведено в табл.3 та ілюструються відповідними графіками (рис.2).

Таблиця 3

Результати порівняння кругової та лінійної безнадмірних шкал

Число n позначок на шкалі	Число градацій	
	G_r	G_l
3	6	6
4	12	10
5	20	15
6	30	21
10	90	55
20	380	210
30	870	465
40	1560	820
50	2450	1275
100	9900	5050

На рис.2 наведено порівняльні графіки залежності кількості градацій кругової та лінійної безнадлишкових шкал від кількості градацій. Для зручності порівняння обидві криволінійні залежності $G_r(n)$ і $G_l(n)$ апроксимовані двома прямолінійними відрізками.

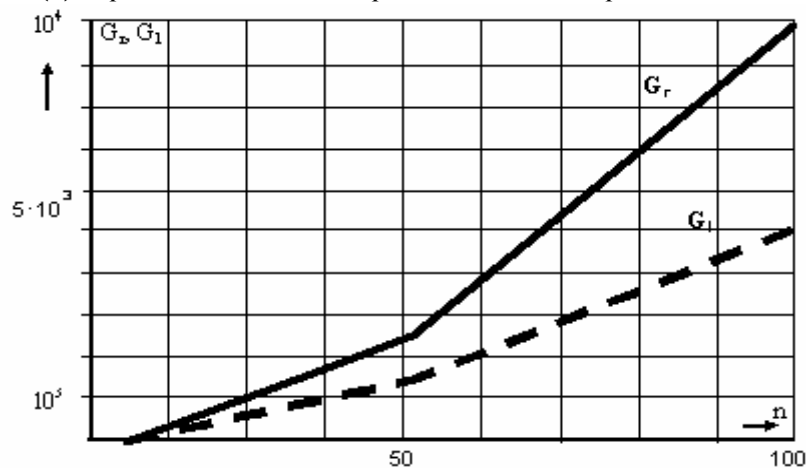


Рис. 2. Порівняльні характеристики безнадлишкових кругової (G_r) та лінійної (G_l) шкал за максимально можливою априорі кількістю градацій відповідних шкал залежно від кількості n позначок

З порівняння залежностей $G_r(n)$ і $G_l(n)$ випливає, що зі збільшенням кількості позначок спочатку швидко, а потім поступово зростає якість безнадливної кругової шкали порівняно з лінійною за кількістю градацій і відповідно робочим діапазоном порівнюваних шкал. За теоретичними розрахунками безнадлишна шкала вже за кількості позначок понад 50 майже вдвічі перевищує лінійну за вищезгаданим показником. Треба зауважити, що порівняння здійснювалося винятково на підставі теоретичних розрахунків, в яких не враховано вже встановленого факту про те, що ідеальних безнадлишкових лінійок (лінійок Голомба) з кількістю позначок більше чотирьох просто не існує [5]. Тому на графіку (рис.3) ми можемо спостерігати не реальну залежність $G_l(n)$, а лише *a priori* верхню границю залежності кількості градацій лінійної шкали від кількості розміщених на ній позначок за умови, що всі можливі відстані між різними парами позначок вичерпують ряд натуральних чисел.

Для можливості об'єктивного оцінювання «градуовальної» ефективності лінійок з нерівномірною шкалою введемо коефіцієнт ефективності D_n нерівномірної шкали:

$$D_n = G_D / G_{ap}, \quad (4)$$

де G_D – кількість рівномірно зростаючих градацій лінійки з одиничним кроком приросту, G_{ap} – максимально можлива априорі кількість градацій лінійки з n позначками, що дорівнює кількості невпорядкованих комбінацій із n по 2 і визначається залежністю

$$G_{ap} = n(n-1)/2 \quad (5)$$

На підставі виразів (4) і (5) легко порівняти ефективність двох згаданих варіантів лінійок за формулою:

$$D_n = 2G_D / n(n-1). \quad (6)$$

Сьогодні не відомі регулярні методи синтезу лінійок ні з найвищою «градуовальною» ефективністю, ні найкоротших лінійок для довільної кількості позначок. Для подолання цієї проблеми використовуються здебільшого різні евристичні підходи із залученням сучасної потужної комп'ютерної техніки. Основні дослідження в цьому напрямку пошуку найкоротших лінійок проводяться учнями наукової школи професора С. Голомба (Південнокаліфорнійський університет), результати яких регулярно з'являються в мережі Інтернет. Там же наводяться дані про час комп'ютерних обчислень, необхідний для знаходження таких лінійок за допомогою різного типу комп'ютерів, що випускаються різними фірмами. Так, дані за 1998 рік свідчать про спонтанне зростання машинного часу обчислень, наприклад, від 10 с для знаходження оптимальних лінійок Голомба з 12-ма поділками до майже 10^5 с – для лінійок з 18-ма поділками (Pentium 133).

Ідеальний кільцевий монолітний код

Проблема вибору оптимізації вимагає пошуку таких правил комплектування вагових розрядів, які забезпечували б можливість формування якнайдовшого числового ряду кодових комбінацій, а в ідеалі – вичерпували б натуральний ряд чисел на різноманітності комбінаторних станів системи. Суть методу полягає в оптимальному послідовному розміщенні числових значень вагових розрядів коду за критерієм досягнення максимального «гуртування» однойменних символів під час формування дозволених кодових комбінацій на осі часу. За таких обмежень будь-яка дозволена кодова комбінація формується не більш ніж з двох груп однойменних символів, одна з яких містить, наприклад, лише “нулі”, а друга – лише “одиниці”. Йдеться про нестандартний двійковий код з обмеженнями на спосіб вибірки вагових розрядів – «ідеальний кільцевий монолітний код» (ІКМК) [4]. У найпростішому випадку ІКМК є циклічною послідовністю цілочислових вагових розрядів, які утворюють досконалу систему розбиття довжини кругової шкали на фіксовану кількість не однакових частин (сегментів), пропорційних числам в межах від 1 до S , де S – числовий еквівалент довжини усієї шкали, причому всі сегменти такої шкали і суми всіх двох, трьох і т.д. її суміжних сегментів вичерпують множину натуральних чисел від 1 до $S = n^2 - n + 1$ [4]. Наприклад, ІКМК з чотирма ($n=4$) розрядами (1,2,6,4) відповідає системі числових значень вагових розрядів ІКМК, які визначаються одновимірною оптимальною структурною пропорцією (1-ОСП) згідно з циклічним співвідношенням 1:2:6:4. Особливість цієї системи вагових розрядів полягає в тому, що будь-яке натуральне число від 1 до $S-1=12$, де $S=13$ можна подати як кодову послідовність двох послідовно сполучених між собою блоків однорідних символів – “одиниць” та “нулів”, наприклад, у системі вагових розрядів (1,2,6,4) забезпечується взаємно однозначна відповідність: $1 \leftrightarrow 1000$, $2 \leftrightarrow 0100$, $3 \leftrightarrow 1100$, $4 \leftrightarrow 0001$, $5 \leftrightarrow 1001$,... і т.д., причому $13 \leftrightarrow 1111$.

Легко побачити, що всі 4-розрядні кодові комбінації чисел від $0 \leftrightarrow 0000$ до $13 \leftrightarrow 1111$, утворюють «кільцевий монолітний» код, де кожна комбінація складається не більш ніж з двох блоків однойменних символів (“одиниць” і “нулів”). Ця властивість дає змогу представляти будь-яке натуральне число в діапазоні цілочислових значень від 0 до 13 як відповідної частини «цілого» єдино можливим способом у вигляді двомісної пропорції, причому використовуються усі без винятку способи такого представлення.

Наступний приклад стосується застосування двовимірних ОСП для кодування векторів. Під двовимірною «оптимальною структурною пропорцією» (2-ОСП) розуміємо циклічну послідовність двомісних цілочислових кортежів, усі суміжні суми яких, узяті за відповідними модулями за порядковими номерами місць кортежів, утворюють систему векторів у вигляді двовимірної матриці. Двовимірній ОСП відповідає система кодування двовимірних векторів за правилами, передбаченими для ІКМК. Наприклад, 2-вимірна кільцева ОСП на послідовності 2-місних кортежів (1,1):(1,2):(1,4):(1,3) утворює досконалу з погляду досягнення інформаційної без- надмірності систему кодування в ІКМК усіх двовимірних векторів на матриці з розмірами 3×4 , що ілюструє табл.4.

Таблиця 4

Кодування векторів у системі ІКМК {(1,1),(1,2),(1,4),(1,3)}

Вектор	Кодова комбінація			
(1, 1)	1	0	0	0
(1, 2)	0	1	0	0
(1, 3)	0	0	0	1
(1, 4)	0	0	0	1
(2, 1)	0	1	1	0
(2, 2)	0	0	1	1
(2, 3)	1	1	0	0
(2, 4)	1	0	0	1
(3, 1)	1	1	0	1
(3, 2)	1	1	1	0
(3, 3)	1	0	1	1
(3, 4)	0	1	1	1

З табл. 4 можна бачити, що записані до неї 4-розрядні комбінації закодованих векторів від (1,1) до (3,4) заповнюють усі клітинки матриці розмірами 3×4 , утворюючи систему кодування у вигляді двовимірного «кільцевого монолітного» коду. Ця властивість дає змогу представляти в ІКМК будь-який двовимірний вектор, обмежений матрицею 3×4 . По суті, ІКМК є оптимальним кодом за критерієм мінімізації числа розрядів з обмеженням на правила формування однойменних символів в дозволених кодових комбінаціях. Обмеження полягають в тому, що всі однойменні символи в межах відповідного блоку знаходяться один біля одного. Однак, як можна побачити з таблиці, згадані обмеження не призводять до зменшення комбінаторної різноманітності системи кодування, оскільки принцип ОСП, який закладено в основу ІКМК, забезпечує можливість отримання якнайдовшого гармонійного ряду двомісних співвідношень, необхідних для формування дозволених кодових комбінацій чисел або векторів. Інформаційна система, яка ґрунтується на ІКМК, набуває низки корисних властивостей. При цьому обмежується рівень впливу завад в каналі зв'язку, завдяки розмежуванню блоків “нулів” та “одиниць” зростає надійність системи перетворення кодових сигналів, зменшується вплив перехідних процесів, спрощується схема реалізація та керування пристроями перетворення.

Висновки. Теорія безнадлишкових шкал може знайти застосування в прогресивних інформаційних технологіях для побудови систем кодування та перетворення інформації на основі ідеального кільцевого монолітного коду (ІКМК), що передбачає високоякісне кодування, пересилання та перетворення повідомлень не лише у вигляді одновимірних масивів, але й досконало розподілених з погляду мінімізації інформаційної надлишковості векторних даних. Чудові властивості безнадлишкових шкал є ґрунтовною підставою для розгортання фундаментальних та прикладних досліджень в напрямку створення системи відповідних стандартів за принципом оптимальних структурних пропорцій, що виникли на перехресті комбінаторного аналізу та інформаційно-вимірювальної техніки. Результати досліджень відкривають широкі перспективи для застосування теорії безнадлишкових шкал в інформаційно-вимірювальній техніці, комп'ютерних технологіях, нанотехнологіях та інших галузях науки і народного господарства.

1. *Енциклопедія кібернетики / Головна редакція УРЕ. – К., 1973.* 2. *Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М., 1977.* 3. *ГОСТ 8032-84. Предпочтительные числа и ряды предпочтительных чисел.* 4. *Різник В.В. Синтез оптимальних комбінаторних систем. – Львів: Вища школа, 1989. – 168 с.* 5. *Дьюдни А.К. О линейках Голомба и их применение в радиоастрономии // В мире науки. – 1986. – № 2. – С.103–107.*