

УДК 621.372

Я.М.Матвійчук, М.В.Хараба

Електрична та математичні реалізації схеми Чуа.

У статті запропоновано та досліджено одну фізичну реалізацію дивного атрактора на схемі Чуа, а також наведено результати досліджень математичних моделей цієї схеми.

1. Схема Чуа. Розглянемо схему Чуа [3] (рисунок 1). Вона складається з двох ємностей $C1$ і $C2$, однієї індуктивності L , опору R і нелінійного елемента $R_n = f_n(U_{C1})$, що має вольт-амперну характеристику (ВАХ), зображену на рис.2.

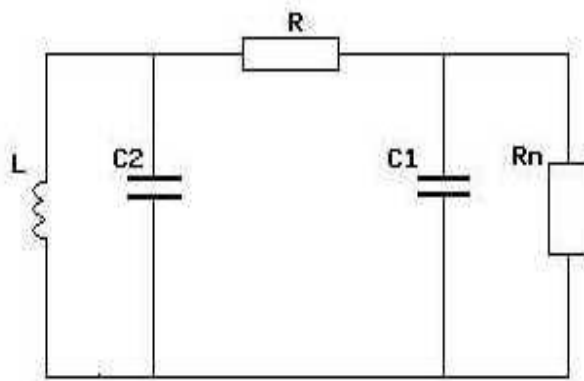


Рис.1. Схема Чуа.

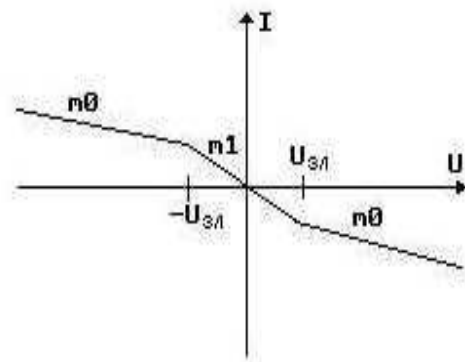


Рис.2. ВАХ опору R_n .

Рівняння стану цієї схеми мають вигляд:

$$C1 \cdot dU_{C1}/dt = (U_{C2} - U_{C1})/R - f_n(U_{C1});$$

$$C2 \cdot dU_{C2}/dt = (U_{C1} - U_{C2})/R + I_L;$$

$$L \cdot dI_L/dt = -U_{C2};$$

де функція $f_n(U_{C1}) = m_0 \cdot U_{C1} + 1/2 \cdot (m_1 - m_0) \cdot (|U_{C1} + U_{zl}| - |U_{C1} - U_{zl}|)$ має параметри: m_0 та m_1 - коефіцієнти нахилу лінійних ділянок; U_{zl} - напруга зламу ВАХ.

Фізична реалізація цієї схеми полягає у створенні нелінійного елемента, що мав би потрібну кусково-лінійну характеристику.

М. Кенеді у [4] запропонував реалізацію цієї нелінійності на двох операційних підсилювачах (ОП). Автори використали схему реалізації обмеженого від'ємного опору, зображену на рис.3. На рис.4 приведена його ВАХ, що описується співвідношеннями:

$$I = -R_2 / (R_1 * R_3) * U, \quad U^- < U < U^+; \quad U^\pm = R_3(R_2 + R_3) * E^\pm + U_0; \quad (1)$$

де U^\pm – напруги, при яких ОП входить в насичення, E^\pm – відповідно максимальна та мінімальна напруги на виході ОП, U_0 – напруга зміщення нуля на виході ОП.

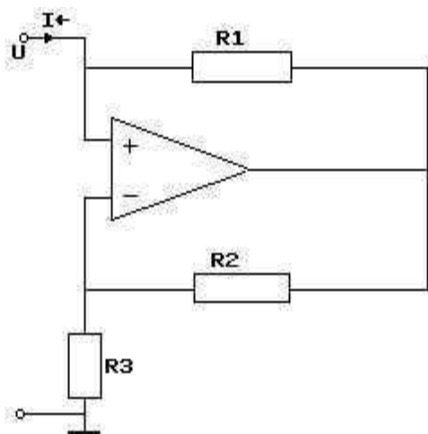


Рис.3. Схема двополюсника
з від'ємним опором.

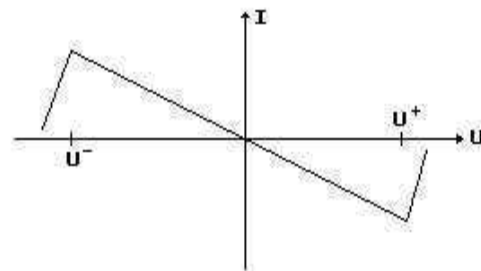


Рис 4. ВАХ двополюсника
з від'ємним опором.

2. Розрахунок характеристики нелінійного елемента з від'ємним опором. Якщо в (1) замість лінійного опору R_2 використати двополюсник із кусково-лінійним додатним опором, то ВАХ схеми на рис.3 набуде потрібної форми. Такий двополюсник можна моделювати за допомогою діодів з ідеальними характеристиками:

$I=0$ при $U < U_v$; $I=\infty$ при $U > U_v$; де U_v - напруга відкриття діода.

Розглянемо такий двополюсник (рис.5).

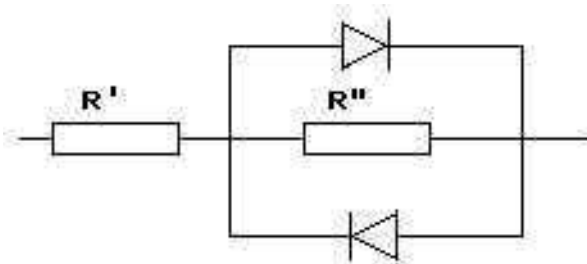


Рис.5. Модель опору R_2 .

Його ВАХ при ідеальній моделі діода матиме вигляд :

$$\begin{aligned}
I &= U/(R'+R'') \text{ при } |U| < U_B \cdot (R'+R'')/R''; \\
I &= (U-U_B)/R' \text{ при } U < -U_B \cdot (R'+R'')/R''; \\
I &= (U+U_B)/R' \text{ при } U > U_B \cdot (R'+R'')/R'';
\end{aligned}
\tag{2}$$

Знайдемо ВАХ схеми на рис.3 з опором R , що має ВАХ (2).

Визначимо спочатку вхідну напругу $U_{зл}$, при якій один із діодів відкривається, тобто напруга між вузлами 1 і 2 дорівнює $U_B \cdot (R'+R'')/R''$.

Якщо знехтувати неідеальністю ОП, то $U_{зл}-U_o = -U_B \cdot (R'+R'')/R''$.

Коли діоди закриті, то $(U_o-U_{зл})/(R'+R'') = U_{зл}/R$ (струми через R' і R_3 однакові).

Звідси $U_{зл}=U_B(R/R'')$, і ВАХ має вигляд $I=-U \cdot (R'+R'')/(R_1 \cdot R_3)$ при $|U| < U_{зл}$.

Нехай тепер $U > U_{зл}$, тобто один з діодів відкритий.

Струми через R_3 і R' однакові: $U/R_3 = (U_o-U_B-U)/R'$, тобто $U-U_o = -(U \cdot R')/R_3 + U_B$.

Тоді $I = (U-U_o)/R_1 = -U \cdot R'/(R_1 \cdot R_3) + U_B/R_1$.

Отже, ВАХ схеми на рис.3 має вигляд, зображений на рис.2:

$$\begin{aligned}
I &= -U \cdot (R'+R'')/(R_1 \cdot R_3) \text{ при } |U| < U_{зл}; \\
I &= -U \cdot (R')/(R_1 \cdot R_3) \text{ при } U < -U_{зл}; \\
I &= -U \cdot (R')/(R_1 \cdot R_3) \text{ при } U > U_{зл}.
\end{aligned}
\tag{3}$$

Маємо три параметри, що задають кусково-лінійну криву: m_0 , m_1 та $U_{зл}$.

Із системи (3) випливає: $m_0 = -R'/(R_1 \cdot R_3)$; $m_1 = -(R'+R'')/(R_1 \cdot R_3)$.

Тоді: $R_1 = -U_B/(U_{зл}(m_1-m_0))$; $R''=R_3 \cdot U_B/U_{зл}$; $R'=R_3 \cdot (-m_0 \cdot U_B)/(m_1-m_0) \cdot U_{зл}$.

Застосовуючи виведені формули, розрахуємо параметри елементів. Покладемо $R_3=2\text{кОм}$. Згідно [2] $m_1 = 0.8 \text{ мСім}$, $m_0 = 0.5 \text{ мСім}$, $U_{зл}=1$. Для кремнієвого діода $U_B \approx 0.6\text{В}$. Звідси одержуємо: $R_1=2\text{кОм}$; $R'=2\text{кОм}$; $R''=2\text{кОм}$. Значення інших елементів схеми Чуа візьмемо із статті [4]: $C_1=10\text{нФ}$; $C_2=100\text{нФ}$; $L=18\text{мГн}$; $R=0 \div 2\text{кОм}$.

Загальна електрична схема зображена на рис.6.

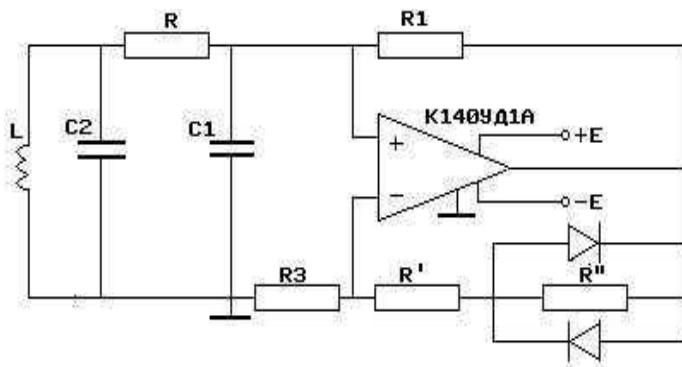


Рис.6. Електрична модель схеми Чуа.

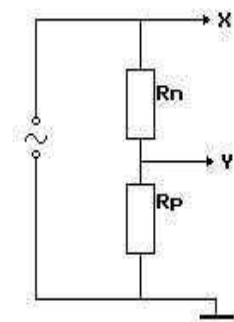
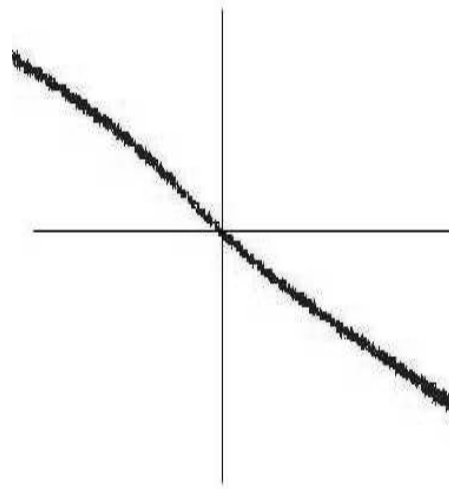


Рис.7. Схема визначення ВАХ.

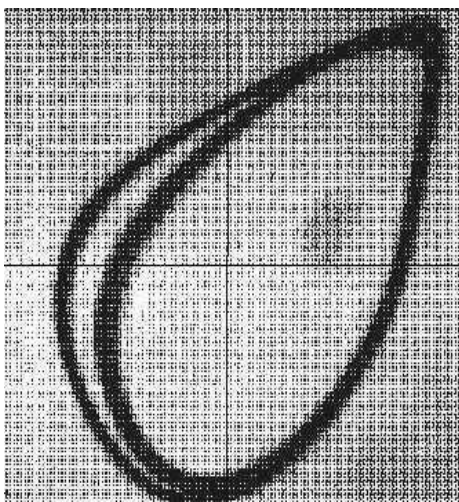
3. Результати експериментального дослідження схеми Чуа. ВАХ нелінійного елемента з від'ємним опором зображена на фотографії 1, зроблений з екрану осцилографа. Схема для визначення ВАХ показана на рис.7, де $R_p=100\text{ Ом}$ – малий пробний опір.



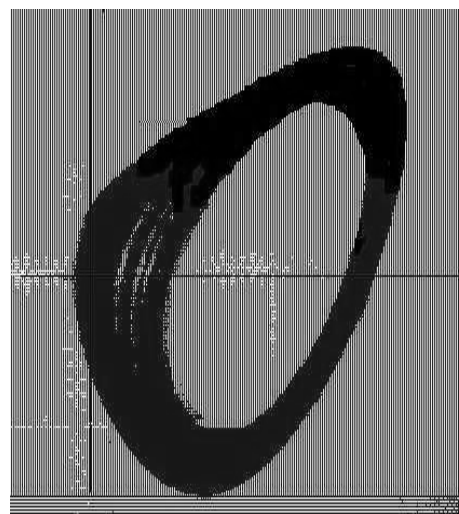
Фот.1. ВАХ нелінійного елемента
(по гор. 0.5 В/см , по верт. 0.6 мА/см).

Дослідження фазового портрету схеми Чуа проводимо в проекції на площину (U_{C1}, U_{C2}) . Для цього напруги на ємностях $C1$ та $C2$ подаємо відповідно на входи осцилографа X та Y . Зміна опору R викликає проходження через точки біфуркації.

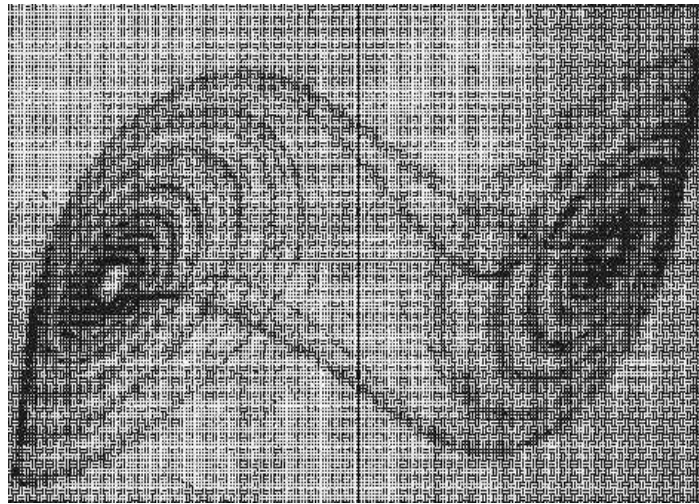
На фотографіях 2÷5 зафіксовані характерні режими схеми.



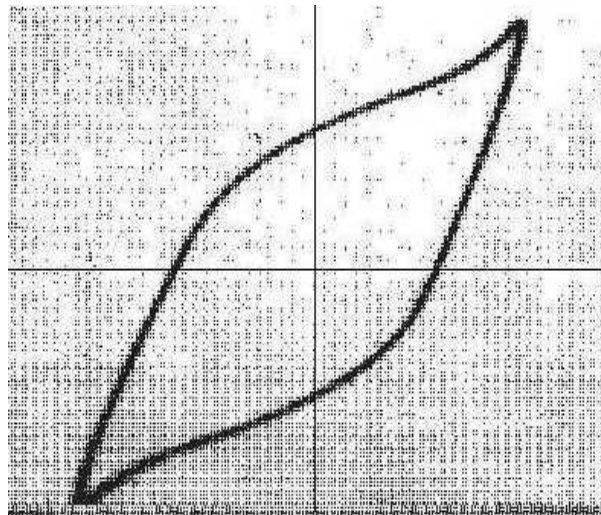
Фот.2. Подвоєння періоду при $R=1580\text{ Ом}$
(по гор. 0.3 В/см , по верт. 0.17 В/см).



Фот.3. Атрактор Ресслера [5] при $R=1540\text{ Ом}$
(по гор. 0.3 В/см , по верт. 0.17 В/см).



Фот.4. Подвійна прокрутка("double scroll") при $R=1500 \text{ Ом}$
(по гор. 0.6 В/сМ , по верт. 0.17 В/сМ).



Фот.5. Граничний цикл при $R < 1300 \text{ Ом}$.
(по гор. 0.6 В/сМ , по верт. 0.5 В/сМ).

4. Дослідження схеми Чуа на EOM. Опис електричної схеми на рис.6 на вхідній мові системи SANOS-PC (аналог SANOS-EC [1]) наведено нижче. Операційний підсилювач моделює вхідна ланка CIN-RIN та ідеальне джерело напруги з нелінійним коефіцієнтом управління $K \cdot V_{IN SAT}$. До опису схеми на рис.6 додано омичний опір RL індуктивності $L1$.

Електрична модель схеми Чуа на мові системи SANOS-PC.

DESC

* Модель діода ;

MODEL:D(1,2)C1,KI,KV;

J1(1,2); VJ(J1); C1(J1); J1=KI*(EXP(KV*VJ)-1);;

TYPE:'KD'(D)1P,1E-10,30.0;;

* Опис схеми ;

```

L1(10,1) 18ML; RL(0,10) 32.0; C2(0,1) 100N; C1(0,2) 10N;
R_(1,2); *R_=1600; R_=1550; *R_=1450;
VC1(C1); VC2(C2); IL1(L1);
INIT:C1(1);
* Опис моделі нелінійного елемента ;
CIN(2,4) 0.1N; VIN(CIN); RIN(2,4) 4000;
R1(2,3) 2000; R3(4,0) 2000; R21(4,6) 2000; R22(6,3) 1200;
D1(6,3) 'KD'; D2(3,6) 'KD';
ROUT(5,0) 700; K=500; SAT=9.0/K;
EOP(5,3) K*VINSAT;
VINSAT=IF(ABS(VIN).LE.SAT)(VIN)(VIN/ABS(VIN)*SAT);
;;
TRAN
TMAX=40ML; INIT; HS=20MC; HMIN=0.0001MC;
OUTPUT: VC2(VC1), XMIN=-5, XMAX=5, YMIN=-2.0, YMAX=2.0;;
END

```

На рис. 8-11 відтворені результати комп'ютерного моделювання схеми на рис.6 за допомогою системи SANOS-PC.

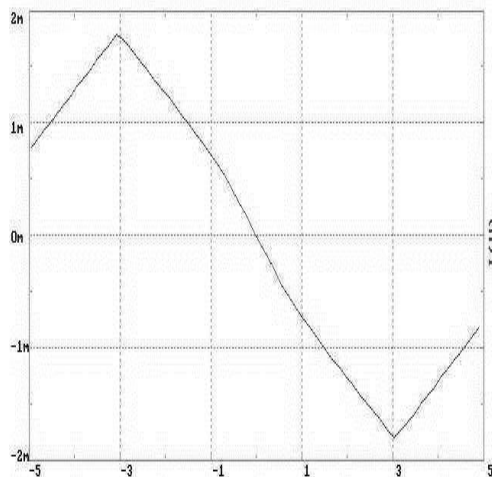


Рис.8. Характеристика нелінійного елемента.

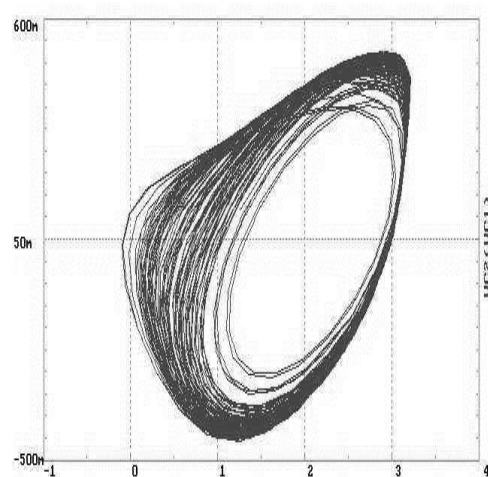


Рис.9. Атрактор Ресслера (R=1600 Ом).

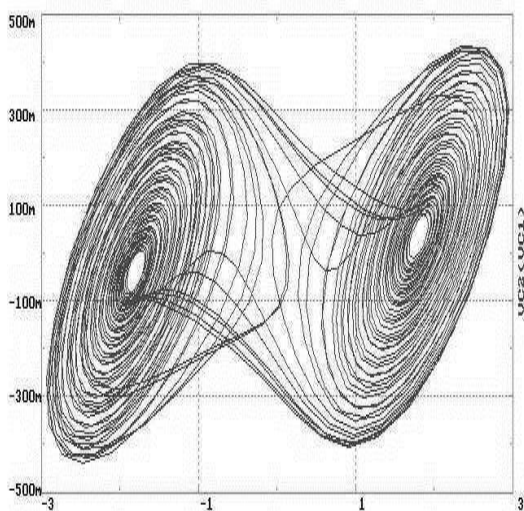


Рис.10. Подвійна прокрутка (R=1550 Ом).

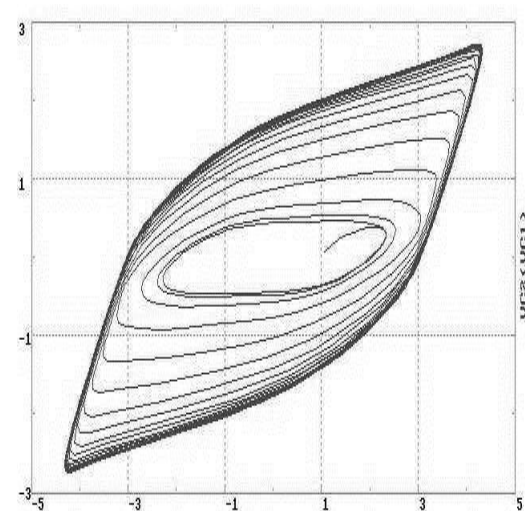


Рис.11. Граничний цикл (R=1450 Ом).

Відхилення значень опору R порівняно з фізичним експериментом пояснюється похибками у фізичному моделюванні.

Старший показник Ляпунова обчислювався за методом, описаним у [2]. Суть методу полягає у одночасному інтегруванні двох математичних моделей, що відрізняються лише початковими умовами. Інтегрування проводиться вздовж обраної базової траєкторії з t_0 до t_N короткими інтервалами, на протязі яких рух моделей мало відрізняється від руху в лінійному наближенні. На початку кожного інтервалу задається деяка відстань d_0 між точками, що зображують моделі у фазовому просторі. В кінці i -го інтервалу відстань між точками стає d_i . Показник Ляпунова λ знаходиться за формулою:

$$\lambda = 1/(t_N - t_0) * \sum_{i=1}^N \ln(d_i/d_0) \quad (4)$$

Вдалось описати процес обчислення (4) на вхідній мові системи SANOS-PC. Отримані такі значення старшого показника Ляпунова для дивних атракторів: $\lambda=850$ (рис.9); $\lambda=420$ (рис.10).

Була знайдена поточкова фрактальна розмірність [2] наступним методом. Вибираємо випадковим чином M точок на фазовій траєкторії системи і визначаємо відстань S_{nm} від n -ої до m -ої. Імовірність попадання точки в окіл ϵ визначається формулою:

$$P_n(\epsilon) = 1/N * \sum_{m=1}^N H(\epsilon - S_{nm}), \quad \text{де } H(.) - \text{функція Хевісайда; } N - \text{загальна кількість точок.}$$

Тоді усереднена фрактальна розмірність d дорівнює

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln C(\epsilon) / \ln \epsilon; \quad \text{де } C(\epsilon) = 1/M * \sum_{n=1}^M P_n(\epsilon).$$

Цю границю можна знайти за нахилом прямої у системі координат $(\ln \epsilon, \ln C(\epsilon))$.

Отримані такі значення фрактальної розмірності: $d=1.4$ (рис.9), $d=1.4$ (рис.10).

5.Схема Чуа з кубічною апроксимацією нелінійного елемента. Автори перевірили можливість опису ВАХ нелінійного елемента у схемі на рис.1 степеневим поліномом третього порядку

$$I = a * U^3 + b * U^2 + c * U + d. \quad (5)$$

Із умови непарності ВАХ та проходження через початок координат одержуємо $b=0$, $d=0$. Нахил ВАХ у початку координат дорівнює $-m1$ (рис.2), тому $c=-m1$.

Нехай нахил кривої, яку описує поліном, у деякій точці U_0 становить $-m0$. Тоді $a = (m1 - m0)/(3 * U_0^2)$ і формула (5) прийме вигляд:

$$I = (m1 - m0)/(3 * U_0^2) * U^3 - m1 * U.$$

Результати аналізу схеми Чуа з кубічною апроксимацією на ЕОМ аналогічні до результатів, отриманих у випадку кусково-лінійної апроксимації.

6. Висновки. Автори запропонували спрощену схему реалізації нелінійного елементу з від'ємним опором у схемі Чуа.

Здійснене фізичне моделювання у вигляді електричної схеми та математичне моделювання за допомогою системи SANOS-PC. В обох випадках виявлені характерні режими, зокрема дивні атрактори.

Обраховані старші показники Ляпунова та фрактальні розмірності для отриманих дивних атракторів.

Перевірена можливість опису нелінійного елементу степеневим поліномом.

1. Давымука С.А., Матвийчук Я.Н., Мелихов И.Б., Федорчук Е.Н. Система автоматизированного схемотехнического проектирования средств электроизмерительной техники. Известия Ленинградского электротехнического института. Вып.310, 1982.
2. Мун Ф. Хаотические колебания. -М.:Мир, 1990.
3. T.Matsumoto. A chaotic attractor from Chua's circuit. IEEE Trans CAS, 31(12): 1055-1058, 1984.
4. M.P.Kennedy. Robust op amp realization of Chua's circuit. Frequenz, 46(34): 66-80, 1992.
5. O.E.Rossler. Chemical turbulence: chaos in a small reaction-difusion system. Z.Natuforsch, 1168-1172.