

УДК 621.3

Ю.П. Мочернюк, О.Ю. Мочернюк

Національний університет "Львівська політехніка"

КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ЗАСОБАМИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

© Мочернюк Ю.П., Мочернюк О.Ю., 2003

Запропоновано реалізований винятково на алгебраїчних операціях метод аналізу перехідних процесів у лінійних системах, динамічні процеси в яких описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, за умови, що відомо значення величин (так звані незалежні початкові умови), які визначають собою запас енергії енергоємних елементів системи в момент відбуття події, що спричинила цей процес.

Implemented purely on algebraic operations the method of analysis of dynamic processes in the linear systems is offered in the article. Dynamic processes in such systems are described by the linear differential equations with constant coefficients.

Вступ. Класичний метод розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, у принципі, завжди дозволяє виконати аналіз перехідного процесу в лінійних системах, в яких динамічні процеси описуються такими рівняннями. Основним недоліком цього методу є потреба в складних обчисленнях, які полягають у багатократному диференціюванні цієї системи з метою визначення невістачаючих (залежних) початкових умов та диференціюванні виразів невідомих, що описують стан системи для укладання рівнянь, з яких визначають сталі інтегрування.

Рациональнішим у цьому сенсі є операторний метод. Суть операторного методу полягає в тому, що функції дійсного аргументу часу t перетворюються на функції комплексного аргументу p . Відображення похідних функцій часу відображається лінійно через відображення самої функції, а система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами відображається системою алгебраїчних рівнянь, лінійних відносно цих відображень. Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо відображення невідомих величин у вигляді точно визначених функцій оператора p . Потім визначаємо оригінал як функцію часу t . При цьому використовуються алгебраїчні операції [1, 2].

Формулювання задачі. Покажемо, що розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, які описують перехідний процес у лінійній системі за умови, що відомі значення величин, які характеризують запас енергії в реактивних елементах цієї системи в момент відбування події, яка спричинила цей процес, можна здійснити в багатьох практично важливих випадках, використовуючи тільки алгебраїчні операції.

Відповідно до припущення про лінійність характеру системи її математичну модель в загальному випадку можна подати у вигляді системи лінійних диференціальних незалежних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Невідомими в такій системі рівнянь є змінні величини, що характеризують стан досліджуваної системи, а вільними членами – виражені аналітично за допомогою деяких функцій часу збуджуючі сили або лінійні комбінації цих функцій та їх

похідних. Припустимо, що рівняння системи формально алгебраїзовані підстановкою $\frac{d^k}{dt^k} = \lambda^k$, після чого об'єднані в матричному рівнянні

$$Q(\lambda) \cdot X(t) = F(t), \quad (1)$$

де $Q(\lambda) = \|q_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – квадратна матриця коефіцієнтів; $X(t) = \text{colon } x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – матриця-стовпець невідомих змінних, елементи якої характеризують стан досліджуваної системи; $F(t) = \text{colon } f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – матриця-стовпець вільних членів системи рівнянь, елементи якої представляють зовнішні збуджуючі сили по відношенню до системи. Порядок всіх матриць в рівнянні (1) один і той самий і дорівнює числу невідомих n .

Елементи матриці $Q(\lambda)$ в загальному випадку, коли система включає в себе елементи, здатні накопичувати енергію, є поліномами оператора диференціювання λ

$$q_{i,j} = q_{i,j}(\lambda) = \sum_k q_{i,j}^{(k)} \cdot \lambda^k. \quad (2)$$

Коефіцієнти $q_{i,j}^{(k)}$ в таких поліномах – це постійні величини з заданими числовими значеннями.

Відповідно до припущення про взаємну незалежність рівнянь системи матриця Q неособлива, тобто її визначник не тотожний нулю.

Аналізуючи перехідний процес у системі, який описується матричним рівнянням (1), матрицю невідомих змінних можна зобразити в практично важливих випадках як суму

$$X(t) = X_n(t) + X_b(t), \quad (3)$$

де $X_n(t) = \text{colon } x_{ni}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – матриця-стовпець невідомих змінних, що являють собою вимушені коливання величин, які характеризують стан системи в усталеному режимі; $X_b(t) = \text{colon } x_{bi}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – матриця-стовпець невідомих змінних, що являють собою вільні коливання величин, які характеризують стан системи за відсутності зовнішніх збуджуючих сил по відношенню до системи.

Система (1) з врахуванням (3) запишеться так:

$$Q(\lambda) \cdot (X_n(t) + X_b(t)) = F(t). \quad (4)$$

У багатьох практично важливих випадках, коли вільні члени системи рівнянь, які являють собою зовнішні збуджуючі сили по відношенню до системи, є періодичними функціями часу або сталі величини, а також в деяких інших випадках, матриця $X_n(\lambda)$ невідомих змінних (частковий розв'язок неоднорідної системи рівнянь) можна визначити із системи [1, 2]

$$Q(\lambda) \cdot X_n(t) = F(t), \quad (5)$$

використовуючи алгебраїчні операції. За таких умов загальний характер функцій, за допомогою яких виражаються вимушені коливання величин (ще їх називають вимушеними складовими), які характеризують стан системи в усталеному режимі, відповідає характерові функцій зовнішніх збуджуючих сил.

Матриця $X_b(t)$ невідомих змінних, що являють собою вільні коливання величин (ще їх називають вільними складовими), які характеризують стан системи за відсутності зовнішніх збуджуючих сил по відношенню до системи (загальний розв'язок однорідної системи

рівнянь) повинна задовольняти систему [1, 2]

$$Q(\lambda) \cdot X_b(t) = 0. \quad (6)$$

Як відомо із теорії диференціальних рівнянь, система (6) має розв'язок, коли

$$\det Q(\lambda) = 0. \quad (7)$$

Характеристичне рівняння (7) – це алгебраїчне рівняння m -го степеня відносно оператора λ . Степінь цього рівняння залежить від порядку диференціальних рівнянь, окремих елементів-складових системи, а також від способу з'єднання цих елементів у системі. У будь-якому випадку степінь рівняння не нижчий від найвищого порядку диференціальних рівнянь окремих складових системи і не вищий від суми порядків рівнянь всіх складових системи.

Розв'язок системи (6) у випадку **простих дійсних коренів** записують так:

$$x_{gi}(t) = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \cdot e^{\lambda_k \cdot t}, \quad (8)$$

де λ_k , $k=1,2,\dots,m$ – корені рівняння (7), а $a_{i,k}$ – постійна інтегрування, яка входить у вираз i -ї невідомої вільних коливань, $i=1,2,\dots,n$ та є множником до експоненти з показником $\lambda_k \cdot t$.

Підставивши (8) в (6) та згрупувавши відносно експонент, одержимо в матричній формі

$$\sum_{k=1}^m Q(\lambda_k) \cdot A_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t} = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k) & q_{1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k) \\ q_{2,1}(\lambda_k) & q_{2,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1}(\lambda_k) & q_{n,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{n,n}(\lambda_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_k \cdot t} = 0, \quad (9)$$

де $Q(\lambda_k)$ – матриця $Q(\lambda)$ із рівняння (6), в яку підставили k -й корінь λ_k рівняння (7), а $A_k = \text{colop } a_{i,k}$, $i=1,2,\dots,n$ – матриця-стовпець невідомих постійних інтегрування, елементи якої є співмножниками до експонент з показником $\lambda_k \cdot t$, що входять у вираз невідомої x_i , i – номер невідомої, яка входить в рівняння (6).

Рівняння (9) розпадається на m однорідних матричних рівнянь, причому оскільки $\det Q(\lambda_k)=0$, то серед рівнянь, що входять в ці матричні рівняння є одне залежне. Відкинувши будь-яке із цих n рівнянь, одержимо систему із $n-1$ рівнянь, яку в матричній формі можна записати так:

$$Q_n(\lambda_k) \cdot A_k = \begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k) & q_{1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k) \\ q_{2,1}(\lambda_k) & q_{2,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n-1,1}(\lambda_k) & q_{n-1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{n-1,n}(\lambda_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = 0, \quad k=1,2,\dots,m \quad (10)$$

та дає можливість виразити $n-1$ сталу інтегрування, що входять в цю систему через одну будь-яку (згадаймо задачу про власні значення, власні вектори та характеристичне рівняння матриці [1, 3]), де $Q_n(\lambda_k)$ – прямокутна матриця розміром $(n-1) \times n$, одержана із матриці $Q(\lambda_k)$ вилученням n -го рядка.

Відомо також, що аналіз передісторії процесу дозволяє визначити m невідомих змінних $x_i(0)$, які характеризують стан досліджуваної системи та визначають собою запас енергії в реактивних елементах системи на початку перехідного процесу (так звані незалежні

початкові умови). Нехай вони мають номери $i = 1, 2, \dots, m$. За відомого розв'язку системи (5) невідомі змінні, що являють собою вільні коливання величин (загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь) цих m змінних в момент, коли відбулася подія в системі, що спричинила цей перехідний процес, можна визначити з рівнянь

$$x_{\text{Bi}}(0) = x_i(0) - x_{\text{Pi}}(0), i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Враховуючи рівняння (8) та (11), одержимо m рівнянь, в які входять сталі інтегрування у виразах цих невідомих

$$\sum_{k=1}^m a_{i,k} = x_{\delta i}(0), i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Об'єднавши $(n-1)$ х m алгебраїчних рівнянь (10) та m алгебраїчних рівнянь (12), одержимо $n \cdot m$ рівнянь, які утворюють систему незалежних рівнянь

$$\begin{pmatrix}
q_1(\lambda) & \cdots & q_m(\lambda) & \cdots & q_n(\lambda) \\
q_1(\lambda) & \cdots & q_m(\lambda) & \cdots & q_n(\lambda) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_{n-1}(\lambda) & \cdots & q_{n-m}(\lambda) & \cdots & q_n(\lambda) \\
\\
q_1(\lambda_2) & \cdots & q_m(\lambda_2) & \cdots & q_n(\lambda_2) \\
q_1(\lambda_2) & \cdots & q_m(\lambda_2) & \cdots & q_n(\lambda_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_{n-1}(\lambda_2) & \cdots & q_{n-m}(\lambda_2) & \cdots & q_n(\lambda_2) \\
\\
& & & \ddots & \\
& & q_1(\lambda_m) & \cdots & q_m(\lambda_m) & \cdots & q_n(\lambda_m) \\
& & q_1(\lambda_m) & \cdots & q_m(\lambda_m) & \cdots & q_n(\lambda_m) \\
& & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& & q_{n-1}(\lambda_m) & \cdots & q_{n-m}(\lambda_m) & \cdots & q_n(\lambda_m) \\
\\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
& & & 1 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
q_{11} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{m1} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{n1} & 0 \\
q_{22} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{m2} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{n2} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{m3} & 0 \\
\vdots & 0 \\
q_{nm} & x_{nl}(\mathbf{0}) \\
\vdots & \vdots \\
q_{nm} & x_{sm}(\mathbf{0})
\end{pmatrix}, \quad (13)$$

що дозволяє визначити постійні інтегрування, які входять у n невідомих змінних у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння (7).

Розв'язок системи (6) у випадку **комплексних коренів** $\lambda_k = \alpha_k \pm j \cdot \beta_k$ записують так:

$$\begin{aligned} x_{gi}(t) &= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} ((a_{i,k} + j \cdot b_{i,k}) \cdot e^{(\alpha_k + j \cdot \beta_k) \cdot t} + (a_{i,k} - j \cdot b_{i,k}) \cdot e^{(\alpha_k - j \cdot \beta_k) \cdot t}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} (2 \cdot a_{i,k} \cdot \cos(\beta_k \cdot t) - 2 \cdot b_{i,k} \cdot \sin(\beta_k \cdot t)) \cdot e^{\alpha_k \cdot t}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\lambda_{k\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \dots, m/2$ – корені рівняння (7), а $a_{i,\kappa}$ та $b_{i,\kappa}$ – дійсна та уявна частини комплексної постійної інтегрування, яка входить у вираз i -ї невідомої вільних коливань, $i = 1, 2, \dots, n$ та відповідає κ -му комплексному кореню.

Підставивши ліву частину залежності (14) в (6) та згрупувавши відносно експонент, одержимо у згорнутій матричній формі рівняння

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} (Q(\alpha_k + j \cdot \beta_k) \cdot C_k \cdot e^{(\alpha_k + j \cdot \beta_k)t} + Q(\alpha_k - j \cdot \beta_k) \cdot C_k^* \cdot e^{(\alpha_k - j \cdot \beta_k)t}) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} (Q(\lambda_k) \cdot C_k \cdot e^{\lambda_k t} + Q(\lambda_k^*) \cdot C_k^* \cdot e^{\lambda_k^* t}) = 0, \quad (15)$$

яке розпадається на два рівняння

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} Q(\lambda_k) \cdot C_k \cdot e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k) & q_{1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k) \\ q_{2,1}(\lambda_k) & q_{2,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1}(\lambda_k) & q_{n,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{n,n}(\lambda_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_k t} = 0 \quad (16)$$

та

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} Q(\lambda_k^*) \cdot C_k^* \cdot e^{\lambda_k^* t} = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k^*) & q_{1,2}(\lambda_k^*) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k^*) \\ q_{2,1}(\lambda_k^*) & q_{2,2}(\lambda_k^*) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1}(\lambda_k^*) & q_{n,2}(\lambda_k^*) & \cdots & q_{n,n}(\lambda_k^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,k}^* \\ c_{2,k}^* \\ \vdots \\ c_{n,k}^* \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_k^* t} = 0, \quad (17)$$

де $\lambda_k = \alpha_k + j \cdot \beta_k$ та $\lambda_k^* = \alpha_k - j \cdot \beta_k$ – комплексний корінь рівняння (7) та йому спряжений; $Q(\lambda_k)$ та $Q(\lambda_k^*)$ – матриці, одержані із матриці $Q(\lambda)$ рівняння (6), в яку підставили k -й комплексний корінь λ_k рівняння (7) та йому спряжений λ_k^* ; $C_k = \text{colon } c_{i,k}$ та $C_k^* = \text{colon } c_{i,k}^*$, $i=1,2,\dots,n$ – матриця-стовпець невідомих комплексних постійних інтегрування, елементи якої $c_{i,k} = a_{i,k} + j \cdot b_{i,k}$ є співмножниками до експонент з показником $\lambda_k \cdot t$ у виразі для невідомої x_i та матриця-стовпець невідомих комплексних постійних інтегрування, спряжених до C_k , елементи якої $c_{i,k}^* = a_{i,k} - j \cdot b_{i,k}$ є співмножниками до експонент з показником $\lambda_k^* \cdot t$, i – номер невідомої, яка входить в рівняння (6).

Очевидно, що рівняння (16) та (17) рівносильні, бо є комплексними спряженими, тому достатньо розглянути одне із них.

Рівняння (16) розпадається на $m/2$ однорідних матричних рівнянь типу

$$Q(\lambda_k) \cdot C_k = \begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k) & q_{1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k) \\ q_{2,1}(\lambda_k) & q_{2,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1}(\lambda_k) & q_{n,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{n,n}(\lambda_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m/2. \quad (18)$$

Оскільки $\det Q(\lambda_k) = 0$, то серед рівнянь, що входять в матричне рівняння (18), є одне залежне. Вилучивши будь-яке із цих n рівнянь, нехай воно буде n -те, одержимо систему із $(n-1)$ -го комплексного рівняння, яку в матричній формі у розгорнутому вигляді можна записати так:

$$\begin{pmatrix} q_{1,1}(\lambda_k) & q_{1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{1,n}(\lambda_k) \\ q_{2,1}(\lambda_k) & q_{2,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{2,n}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n-1,1}(\lambda_k) & q_{n-1,2}(\lambda_k) & \cdots & q_{n-1,n}(\lambda_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m/2 \quad (19)$$

та яка дає можливість виразити $n-1$ комплексну сталу інтегрування, що входять в цю систему через одну будь-яку (згадаймо задачу про власні значення, власні вектори та характеристичне рівняння матриці [1, 3]).

Із рівняння (14) з врахуванням (11) одержимо m рівнянь

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} a_{i,k} = \frac{1}{2} \cdot x_{ei}(0), i = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

які виражають залежність суми дійсних частин комплексних сталих інтегрування для i -ї невідомої із її значенням вільних коливань (загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь) у момент початку перехідного процесу.

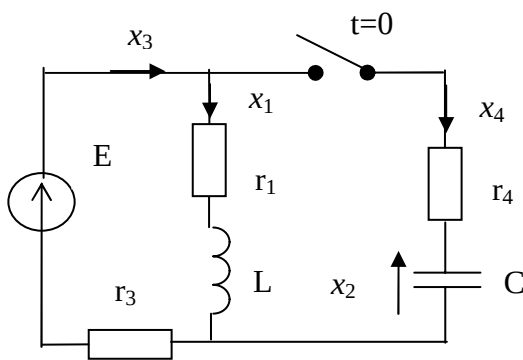
Об'єднавши $(n-1) \times m/2$ алгебраїчних комплексних рівнянь (19) та врахувавши, що кожне комплексне рівняння розпадається на два рівняння, з m рівняннями (21) одержимо $n \cdot m$ алгебраїчних рівнянь по відношенню до дійсних та уявних частин комплексних сталих інтегрування, розв'язавши які, визначимо комплексні сталі інтегрування.

Випадок **кратних коренів** через обмеженість обсягу статті розглянемо в наступній праці.

Запропонований метод проілюструємо на прикладі аналізу перехідного (динамічного) процесу в лінійному електричному колі, параметри якого $E=100$ В, $L=125$ мГн, $r_1=r_2=r_3=25$ Ом.

Внаслідок аналізу передісторії процесу (в ел. колі до комутації) цій системі одержимо значення величин, які визначають собою запас енергії в енергоємних елементах (їх $\epsilon 2$, $m=2$) системи: $x_1(0) = E/(R_1+R_4) = 2$ А, $x_2(0) = 0$.

Система диференціальних рівнянь, яка описує процес після того, як подія відбулася (після комутації) в цій системі, є:



$$-x_1 - C \cdot \frac{dx_2}{dt} + x_3 = 0,$$

$$r_3 \cdot x_3 + r_1 \cdot x_1 + L \cdot \frac{dx_1}{dt} = E,$$

$$r_1 \cdot x_1 + L \cdot \frac{dx_1}{dt} - x_2 - r_4 \cdot C \cdot \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Формально алгебраїзована система диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} -1 & -C \cdot \lambda & 1 \\ r_1 + L \cdot \lambda & 0 & r_3 \\ r_1 + L \cdot \lambda & -(1 + r_4 \cdot C \cdot \lambda) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Невідомі змінні, що являють собою вимушені коливання величин, які характеризують стан системи в усталеному режимі дорівнюють: $x_{п1} = x_{п3} = E/(R_1+R_3) = 2$ А, $x_{п2} = 50$ В.

Невідомі змінні, що являють собою вільні коливання величин, які визначають запас енергії енергоємних елементів у системі на початку перехідного процесу (так звані незалежні початкові умови для вільних складових), опираючись на залежність (11), дорівнюють: $x_{в1}(0) = 0$, $x_{в2}(0) = -50$ В.

Характеристичне рівняння системи:

$$\det \begin{vmatrix} -1 & -C \cdot \lambda & 1 \\ r_1 + L \cdot \lambda & 0 & r_3 \\ r_1 + L \cdot \lambda & -(1 + r_4 \cdot C \cdot \lambda) & 0 \end{vmatrix} = -((r_3 + r_4) \cdot L \cdot C \cdot \lambda^2 + ((r_1 \cdot r_3 + r_3 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_4) \cdot C + L) \cdot \lambda + r_1 \cdot r_3) = 0.$$

$C = 1000 \cdot 10^{-6}$ Ф. **Корені дійсні різні.**

$$50 \cdot 125 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda^2 + (3 \cdot 25 \cdot 1000 \cdot 10^{-6} + 125 \cdot 10^{-3}) \cdot \lambda + 50 = 0,$$

$$\lambda^2 + 320 \cdot \lambda + 8000 = 0.$$

$$\lambda_1 = -27,335 \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_2 = -293,665 \text{ с}^{-1}.$$

Формуємо систему рівнянь у символах для визначення сталих інтегрування:

$$\begin{vmatrix} -1 & -C \cdot \lambda_1 & 1 \\ r_1 + L \cdot \lambda_1 & 0 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

в цифрах:

$$\begin{vmatrix} -1 & 27,335 \cdot 10^{-3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 21,583 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 292,665 \cdot 10^{-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11,583 & 0 & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{vmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є: $a_{1,1} = -0,754$, $a_{1,2} = 0,754$, $a_{2,1} = -51,382$, $a_{2,2} = 1,382$, $a_{3,1} = 0,651$, $a_{3,2} = 0,349$.

Розв'язком системи диференціальних рівнянь є

$$x_1 = x_{п1} + x_{в1} = x_{п1} + a_{1,1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + a_{1,2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = 2 - 0,754 \cdot e^{-27,335 \cdot t} + 0,754 \cdot e^{-293,665 \cdot t} \text{ А, } t[\text{с}],$$

$$x_2 = x_{п2} + x_{в2} = x_{п2} + a_{2,1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + a_{2,2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = 50 - 51,382 \cdot e^{-27,335 \cdot t} + 1,382 \cdot e^{-293,665 \cdot t} \text{ В, } t[\text{с}],$$

$$x_3 = x_{п3} + x_{в3} = x_{п3} + a_{3,1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + a_{3,2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = 2 + 0,651 \cdot e^{-27,335 \cdot t} + 0,349 \cdot e^{-293,665 \cdot t} \text{ А, } t[\text{с}].$$

$C = 100 \cdot 10^{-6}$ Ф. **Корені комплексні.**

$$50 \cdot 125 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda^2 + (3 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 10^{-6} + 125 \cdot 10^{-3}) \cdot \lambda + 50 = 0,$$

$$\lambda^2 + 500 \cdot \lambda + 80000 = 0, \quad \lambda_1 = -250 + j \cdot 132,288 \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_2 = -250 - j \cdot 132,288 \text{ с}^{-1}.$$

Формуємо систему рівнянь у символах для визначення сталих інтегрування:

$$\begin{vmatrix} -1 & -C \cdot \lambda_1 & 1 \\ r_1 + L \cdot \lambda_1 & 0 & r_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} + j \cdot b_{1,1} \\ a_{2,1} + j \cdot b_{2,1} \\ a_{3,1} + j \cdot b_{3,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 \cdot x_{\epsilon 1}(0) \\ 0,5 \cdot x_{\epsilon 2}(0) \end{vmatrix},$$

в цифрах:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0,025 + j \cdot 132,288 \cdot 10^{-4} & 1 \\ -6,25 + j \cdot 16,536 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} + j \cdot b_{1,1} \\ a_{2,1} + j \cdot b_{2,1} \\ a_{3,1} + j \cdot b_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \cdot (-50) \end{pmatrix}.$$

Ця система рівнянь зводиться до шести рівнянь з шістьма дійсними невідомими, з них три дійсних частини та три уявних частини комплексних постійних інтегрування:

$$\begin{cases} -a_{1,1} + 0,025 \cdot a_{2,1} + 132,288 \cdot b_{2,1} + a_{3,1} = 0, \\ -b_{1,1} - 132,288 \cdot 10^{-4} \cdot a_{2,1} + 0,025 \cdot b_{2,1} + b_{3,1} = 0, \\ -6,25 \cdot a_{1,1} - 16,536 \cdot b_{1,1} + 25 \cdot a_{3,1} = 0, \\ 16,536 \cdot a_{1,1} - 6,25 \cdot b_{1,1} + 25 \cdot b_{3,1} = 0, \\ a_{1,1} = 0, \\ a_{2,1} = -25. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є: $a_{1,1} = 0$, $b_{1,1} = 0,756$, $a_{2,1} = -25$, $b_{2,1} = 9,449$, $a_{3,1} = 0,5$, $a_{3,1} = 0,651$, $b_{3,1} = 0,189$.

Розв'язком системи диференціальних рівнянь є:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{п1} + x_{в1} = x_{п1} + (2 \cdot a_{1,1} \cdot \cos \beta_1 - 2 \cdot b_{1,1} \cdot \sin \beta_1) \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} = \\ &= 2 + (2 \cdot 0 \cdot \cos 132,288 \cdot t - 2 \cdot 0,756 \cdot \sin 132,288 \cdot t) \cdot e^{-250 \cdot t} \text{ A, } t[\text{с}], \\ x_2 &= x_{п2} + x_{в2} = x_{п2} + (2 \cdot a_{2,1} \cdot \cos \beta_1 - 2 \cdot b_{2,1} \cdot \sin \beta_1) \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} = \\ &= 50 + (2 \cdot (-25) \cdot \cos 132,288 \cdot t - 2 \cdot 9,449 \cdot \sin 132,288 \cdot t) \cdot e^{-250 \cdot t} \text{ B, } t[\text{с}], \\ x_3 &= x_{п3} + x_{в3} = x_{п3} + (2 \cdot a_{3,1} \cdot \cos \beta_1 - 2 \cdot b_{3,1} \cdot \sin \beta_1) \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} = \\ &= 2 + (2 \cdot 0,5 \cdot \cos 132,288 \cdot t - 2 \cdot 0,189 \cdot \sin 132,288 \cdot t) \cdot e^{-250 \cdot t} \text{ A, } t[\text{с}]. \end{aligned}$$

В обох випадках результати аналізу збігаються з результатами, отриманими з використанням інших методів, за умови, що обчислювали з округленням чисел до третього знака після коми.

Висновки. Запропонований метод аналізу перехідних процесів у лінійних системах, процеси в яких описуються лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, можна здійснити в багатьох практично важливих випадках, використовуючи лише алгебраїчні операції. Також поданий метод є з математичного погляду менш трудомістким, ніж операторний метод, а отже, значно спрощує аналіз.

1. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., 1978.
2. Блажкевич. Б.І. Основи теорії лінійних електричних кіл. – К., 1964.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1953.