ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 518, 2004, с. 18–24

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 518, 2004, p. 18–24

ОЦІНКИ ПОХИБОК НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО НЕПЕРЕРВНОГО g-ДРОБУ

С. Возна*, Х. Кучмінська

Національний університет “Львівська політехніка”
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 20 квітня 2004 р.)

Введено двовимірний неперервний π-дріб та доведено, що парною частиною такого дробу є двовимірний неперервний g-дріб. На основі цього встановлено оцінки похибок наближення для двовимірного неперервного g-дробу.

Ключові слова: π-дріб, g-дріб,збіжність, оцінка похибок наближення.

PACS: 40A15; 30B70

УДК: 517.524

Вступ

Неперервні g-дроби

$$\cfrac{s_0}{1+\cfrac{g_1 z}{1+\cfrac{g_2(1-g_1)z}{1+\cfrac{g_3(1-g_2)z}{1+\dots}}}} = \frac{s_0}{1+\underset{i=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{g_i(1-g_{i-1})z}{1}},$$

де $0<g_n<1$, $g_0=0$, $n\geq 1$, $z\in C$ є найбільше вивченим типом функціональних неперервних дробів, для яких досліджено питання збіжності [13], встановлено оцінки похибок наближення [8] та, які знайшли численні застосування, наприклад, до розв'язування степеневої проблеми моментів для інтервалу $(0,1)$ [13], до знаходження нулів, полюсів і областей однолистості деяких мероморфних і голоморфних функцій [10], [11], до розв'язування функціональних рівнянь Feigenbaum-Cvitanov-жа [12]. Детальний огляд досліджень таких дробів наведено в монографіях [6,13]. Багатовимірні узагальнення g-дробів розглянуто в роботах [1–5, 7].

Об'єктом наших досліджень є двовимірний неперервний g-дріб [3]

(1)

де $s_0>0$,

$$\Phi_k(z)=\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_1}{1}+$$
$$+\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{(1-g_{k,j+k-1})\,g_{k,j+k}z_2}{1},$$

$$k\geq 0,\quad g_{00}=0,\quad 0<g_{kj}<1,\quad k\geq 0,$$
$$j\geq 0, k+j\geq 1,\quad z=(z_1,z_2)\in C^2,$$

який збігається до голоморфної функції в області $G=\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}P_\alpha$, де

$$P_\alpha=\{z:|z_1|+|z_2|+2\,|z_1,z_2|- -\mathrm{Re}\left((z_1+z_2+2z_1z_2)\,\mathrm{e}^{-2i\alpha}\right)<2\cos^2\alpha\}\,, \tag{1}$$

причому збіжність є рівномірною на кожній компактній підмножині цієї області [3].

Метою роботи є встановлення оцінок похибок наближення для двовимірного неперервного g-дробу (1).

Розглянемо двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{kk}}{1+\Psi_k},\quad \Psi_k=\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{k+j,k}}{1}+\underset{j=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{k,k+j}}{1}, \tag{2}$$

де $a_{kj}\in C,\ k\geq 0,\ j\geq 0$.

ДНД з n-ми підхідними дробами f_n^* називається парною частиною ДНД з n-ми підхідними дробами f_n^*, якщо $f_n^*=f_{2n}^*$, $n\geq 1$.

Використовуючи властивості дробово-лінійних відображень, в [2] доведено справедливість наступного твердження

Твердження 1. Парною частиною ДНД (2) з n-ми підхідними дробами

$$f_n=\underset{k=0}{\overset{[(n-1)/2]}{D}}\frac{a_{kk}}{1+\Psi_k^{(n-1-2k)}},\quad n\geq 1,$$

де $[(n-1)/2]$ – ціла частина $(n-1)/2$, $\Psi_k^{(0)}=0$ і при $0\leq k\leq[(n-1)/2]-1$

$$\Psi_k^{(n-1-2k)}=\underset{j=1}{\overset{n-1-2k}{D}}\frac{a_{k+j,k}}{1}+\underset{j=1}{\overset{n-1-2k}{D}}\frac{a_{k,k+j}}{1},$$

є ДНД

$$\underset{k=0}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_{kk}}{1+a_{k+1,k}+a_{k,k+1}+\Phi_k},$$

*Автор-респондент

$$\Phi_k = \overset{\infty}{\underset{j=1}{D}} \frac{-a_{2j-1+k,k}a_{2j+k,k}}{1+a_{2j+k,k}+a_{2j+k+1,k}} + \overset{\infty}{\underset{j=1}{D}} \frac{-a_{k,2j-1+k}a_{k,2j+k}}{1+a_{k,2j+k}+a_{k,2j+k+1}},$$

з n-ми підхідними дробами

$$f_n = \overset{n-1}{\underset{k=0}{D}} \frac{a_{kk}}{1+a_{k+1,k}+a_{k,k+1}+\Phi_k^{(n-1-k)}},\ n \geq 1, \qquad (3)$$

де $\Phi_k^{(0)} = 0$ і при $0 \leq k \leq n-2$

$$\Phi_k^{(n-1-k)} = \overset{n-1-k}{\underset{j=1}{D}} \frac{-a_{2j-1+k,k}a_{2j+k,k}}{1+a_{2j+k,k}+a_{2j+k+1,k}} + \overset{n-1-k}{\underset{j=1}{D}} \frac{-a_{k,2j-1+k}a_{k,2j+k}}{1+a_{k,2j+k}+a_{k,2j+k+1}}.$$

Зауважимо, що n-ні підхідні дроби ДНД (2) є так званими фігурними підхідними дробами [1,2,9].

Якщо ДНД збіжний до скінченної границі f, то різниця $f-f_n$ називається похибкою наближення n-м підхідним дробом двовимірного неперервного дробу. Існують, так звані, апріорні та апостеріорні оцінки похибок наближень. Апріорні оцінки мають вигляд $|f-f_n| \leq C_n$, де $C_n \to 0$ при $n \to \infty$, апостеріорні – $|f-f_n| \leq C\,|f_n - f_{n-1}|$, де C – стала.

I. Основні результати

Введемо поняття двовимірного неперервного π-дробу ДНД вигляду

$$\frac{\pi_0}{1+z_1+z_2+\Psi_0(z)+\overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{\pi_{i-1,i-1}\pi_{ii}z_1z_2}{1+\pi_{ii}+z_1+z_2+\Psi_i(z)}}, \quad (4)$$

де $\pi_0 > 0$,

$$\Psi_k(z) = -\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{k+1,k}}{1+z_1-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{k+2,k}}{1+z_1-\dots}}}} - \cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,k+1}}{1+z_2-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,k+2}}{1+z_2-\dots}}}}, \quad k \geq 0,$$

$\pi_{00} = 1$, $\pi_{kj} > 0$, $k \geq 0$, $j \geq 0$, $k+j \geq 1$, $z \in C^2$, назвемо двовимірним неперервним π-дробом.

Нехай вирази

$$f_1(z) = \pi_0/(1+z_1+z_2), \quad f_2(z) = \pi_0,$$

$$f_n(z) = \frac{\pi_0}{1+z_1+z_2+\Psi_0^{(n-1)}(z)+\overset{[(n-1)/2]}{\underset{j=1}{D}} \frac{\pi_{j-1,j-1}\pi_{jj}z_1z_2}{1+\pi_{jj}+z_1+z_2+\Psi_j^{(n-1-2j)}(z)}}, \quad n \geq 3$$

де $\Psi_j^{(0)}(z) = 0$, $\Psi_j^{(1)}(z) = -z_1 - z_2$ і при $0 \leq k \leq [(n-1)/2]-1$

$$\Psi_k^{(n-1-2k)}(z) = -\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{k+1,k}}{1+z_1-\ddots-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{[(n-1)/2],k}}{1+z_1}}}} - \cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,k+1}}{1+z_2-\ddots-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,[(n-1)/2]}}{1+z_2}}}},$$

якщо n – непарне,

$$\Psi_k^{(n-1-2k)}(z) = -\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{k+1,k}}{1+z_1-\ddots-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{[(n-1)/2],k}}{1+z_1-\cfrac{z_1}{1}}}}} - \cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,k+1}}{1+z_2-\ddots-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{k,[(n-1)/2]}}{1+z_2-\cfrac{z_2}{1}}}}}$$

якщо n – парне, є n-ми підхідними дробами ($n \geq 1$) двовимірного неперервного π-дробу, тобто n-й підхідний дріб дробу (4) є фігурним підхідним дробом.

Твердження 1. Парною частиною двовимірного неперервного π-дробу (4), де $z_p \neq -1$, $p = 1, 2$, $z_1 + z_2 \neq -1$, $1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2 \neq -1$, $j \geq 1$, є двовимірний неперервний g-дріб (1), де $s_0 = \pi_0$, $\pi_{00} = 1$, $g_{kl} = \pi_{kl}/(1 + \pi_{kl})$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k + l \geq 1$, з n-ми підхідними дробами вигляду (3).

□ *Доведення.* Еквівалентними перетвореннями, приймаючи

$$\rho_{00} = \frac{1}{1 + z_1 + z_2}, \quad \rho_{jj} = \frac{1}{1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2}, \quad j \geq 1,$$

$$\rho_{2n+k,k} = \frac{1}{1 + z_1}, \quad \rho_{k,2n+k} = \frac{1}{1 + z_2},$$

$$\rho_{2n-1+k,k} = 1, \quad \rho_{k,2n-1+k} = 1, \quad k \geq 0, \quad n \geq 1,$$

двовимірний неперервний π-дріб зведемо до вигляду

$$\cfrac{\cfrac{\pi_0}{1 + z_1 + z_2}}{1 + \cfrac{\overline{\Psi}_0(z)}{1 + z_1 + z_2} + \cfrac{2 + z_1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{j-1,j-1}\pi_{jj} z_1 z_2}{(1 + \pi_{j-1,j-1} + z_1 + z_2)(1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2)}}{1 + \cfrac{\overline{\Psi}_j(z)}{1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2}}}, \tag{5}$$

де

$$\overline{\Psi}_k(z) = -\cfrac{z_1}{1 + \cfrac{\cfrac{\pi_{k+1,k}}{1 + z_1}}{1 - \cfrac{\cfrac{z_1}{1 + z_1}}{1 + \cfrac{\cfrac{\pi_{k+2,k}}{1 + z_1}}{1 - \ldots}}}} - \cfrac{z_2}{1 + \cfrac{\cfrac{\pi_{k,k+1}}{1 + z_2}}{1 - \cfrac{\cfrac{z_2}{1 + z_2}}{1 + \cfrac{\cfrac{\pi_{k,k+2}}{1 + z_2}}{1 - \ldots}}}}, \quad k \geq 0.$$

Застосовуючи твердження 1 до ДНД (5), маємо

$$\cfrac{\cfrac{\pi_0}{1 + z_1 + z_2}}{1 - \cfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} + \Psi_0^*(z) + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{j-1,j-1}\pi_{jj} z_1 z_2}{(1 + \pi_{j-1,j-1} + z_1 + z_2)(1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2)}}{1 - \cfrac{z_1 + z_2}{1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2} + \Psi_j^*(z)}},$$

де

$$\Psi_0^*(z) = \frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{j0} z_1}{(1 + z_1)^2}}{1 + \cfrac{\pi_{j0} - z_1}{1 + z_1}} + \frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{0j} z_2}{(1 + z_2)^2}}{1 + \cfrac{\pi_{0j} - z_2}{1 + z_2}},$$

$$\Psi_k^*(z) = \frac{1 + z_1}{1 + \pi_{kk} + z_1 + z_2} \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{j+k,k} z_1}{(1 + z_1)^2}}{1 + \cfrac{\pi_{j+k,k} - z_1}{1 + z_1}} + \frac{1 + z_2}{1 + \pi_{kk} + z_1 + z_2} \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \cfrac{\cfrac{\pi_{k,j+k} z_2}{(1 + z_2)^2}}{1 + \cfrac{\pi_{k,j+k} - z_2}{1 + z_2}}, \quad k \geq 1.$$

Звідси, після еквівалентних перетворень, отримуємо двовимірний неперервний g-дріб (1).

Встановимо оцінки швидкості збіжності двовимірного неперервного g-дробу (1).

Введемо такі позначення:

$$G_{[(s-1)/2]}^{(0)}(z) = 1 + \pi_{[(s-1)/2],[(s-1)/2]} + z_1 + z_2,$$

$$G_0^{(0)}(z) = 1 + z_1 + z_2, \quad G_0^{(1)}(z) = 1,$$

$$G_{[(s-1)/2]}^{(1)}(z) = 1 + \pi_{[(s-1)/2],[(s-1)/2]},$$

$$G_0^{(s-1)}(z) = 1 + z_1 + z_2 + \Psi_0^{(s-1)}(z) + \\ + \underset{r=1}{\overset{[(s-1)/2]}{D}} \frac{\pi_{r-1,r-1}\pi_{rr} z_1 z_2}{1 + \pi_{rr} + z_1 + z_2 + \Psi_r^{(s-1-2r)}(z)},$$

де $s \geq 3$,

$$G_j^{(s-1-2j)} = 1 + \pi_{jj} + z_1 + z_2 + \Psi_j^{(s-1-2j)}(z) +$$

$$+\underset{r=j+1}{\overset{[(s-1)/2]}{D}}\frac{\pi_{r-1,r-1}\pi_{rr}z_1z_2}{1+\pi_{rr}+z_1+z_2+\Psi_r^{(s-j-2r)}(z)},$$

де $s\geq 5$, $1\leq j\leq[(n-1)/2]-1$,

$$G^{(s-1-2j)}_{[(s-1)/2]+1,j}(z_1)=1,$$

$$G^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)=1+\cfrac{\pi_{j+k,j}}{1+z_1-\cfrac{\ddots}{-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{[(s-1)/2],j}}{1+z_1-\cfrac{z_1}{1}}}}},$$

$$G^{(s-1-2j)}_{j,[(s-1)/2]+1}(z_2)=1,$$

$$G^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)=1+\cfrac{\pi_{j,j+k}}{1+z_2-\cfrac{\ddots}{-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{j,[(s-1)/2]}}{1+z_2-\cfrac{z_2}{1}}}}},$$

$$F^{(s-1-2j)}_{[(s-1)/2]+1,j}(z_1)=1+z_1,$$

$$F^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)=1+z_1-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{j+k+1,j}}{1+z_1-\cfrac{\ddots}{-\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\pi_{[(s-1)/2],j}}{1+z_1-\cfrac{z_1}{1}}}}}},$$

$$F^{(s-1-2j)}_{j,[(s-1)/2]+1}(z_2)=1+z_2,$$

$$F^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)=1+z_2-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{j,j+k+1,j}}{1+z_2-\cfrac{\ddots}{-\cfrac{z_2}{1+\cfrac{\pi_{j,[(s-1)/2]}}{1+z_2-\cfrac{z_2}{1}}}}}},$$

де $s\geq 2r$, $r\geq 2$, $0\leq j\leq[(s-1)/2]-1$, $1\leq k\leq\leq[(s-1)/2]-j$. При цьому справджуються рекурентні співвідношення

$$G_0^{(s-1)}(z)=1+z_1+z_2+\Psi_0^{(s-1)}(z)+\frac{\pi_{11}z_1z_2}{G_1^{(s-3)}(z)}$$

для $s\geq 3$,

$$G_j^{(s-1-2j)}(z)=1+\pi_{jj}+z_1+z_2+\Psi_j^{(s-1-2j)}(z)+ +\frac{\pi_{jj}\pi_{j+1,j+1}z_1z_2}{G_{j+1}^{(s-3-2j)}(z)}$$

для $s\geq 5$, $r\geq 2$, $1\leq j\leq[(n-1)/2]-1$,

$$G^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)=1+\frac{\pi_{j+k,j}}{F^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)},\quad G^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)=1+\frac{\pi_{j,j+k}}{F^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)},\tag{6}$$

$$F^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)=1+z_1-\frac{z_1}{G^{(s-1-2j)}_{j+k+1,j}(z_1)},\quad F^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)=1+z_2-\frac{z_2}{G^{(s-1-2j)}_{j,j+k+1}(z_2)}\tag{7}$$

для $s\geq 2r$, $r\geq 2$, $0\leq j\leq[(s-1)/2]-1$, $1\leq k\leq\leq[(s-1)/2]-j$.

Теорема 1. *Двовимірний неперервний g-дріб (1) збігається до голоморфної функції $g(z)$ в області*

$$D=\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)}\left(P_\alpha\bigcap G_\alpha\right),$$

де P_α визначається формулою (1),

$$G_\alpha=\left\{z:\sqrt{|z_1z_2|}\cos\alpha<\cos^2\alpha-\left(|z_1z_2|-\mathrm{Re}\left(\mathrm{z_1z_2e^{-2i\alpha}}\right)\right)\right\},$$

і для похибок наближення в області $P_\alpha\bigcap G_\alpha$, $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ при $n\geq 3$ справджуються такі оцінки:

$$|g(z)-g_n(z)|\leq\frac{s_0}{(1-\omega(z_1)-\omega(z_2)-\omega(z))^2\cos^2\alpha}\left(L_{n0}(z)+\sum_{j=1}^{n-3}\frac{L_{nj}(z)|z_1z_2|^j}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2j}}+\right. \left.+\frac{\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)|z_1z_2|^{n-2}}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-4}\cos^2\alpha}+\frac{(|z_1|+|z_2|)|z_1z_2|^{n-1}}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-2}\cos\alpha}+\frac{|z_1z_2|^n}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-1}}\right),\tag{8}$$

де $g_n(z)$ – n-й підхідний дріб двовимірного неперервного g-дробу(1),

$$\omega\left(z\right)=\frac{|z_1z_2|-\mathrm{Re}\left(\mathrm{z_1z_2e^{-2i\alpha}}\right.}{}\left.\right)\cos^2\alpha,\quad \omega\left(z_p\right)=\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\left(\mathrm{z_pe^{-2i\alpha}}\right)}{2\cos^2\alpha},\quad p=1,2,$$

$$L_{nk}\left(z\right)=\sum_{j=1}^{2}L_j\left(z_j\right)\left|\frac{1-\sqrt{1+z_j}}{1+\sqrt{1+z_j}}\right|^{n-2-k},\quad 0\leq k\leq n-3,$$

$$L_j\left(z_j\right)=\max\left\{1,\mathrm{tg}\,\frac{|\arg\left(1+\mathrm{z_j}\right)|}{2}\right\}\frac{|z_j|\left(\cos\alpha+|z_j|\right)}{\cos^2\alpha\mathrm{Re}\sqrt{1+\mathrm{z_j}}}\left|\sqrt{1+z_j}-\frac{1}{\sqrt{1+z_j}}\right|,j=1,2.$$

У виразах для всіх $L_{nk}\left(z\right)$ береться головне значення $\sqrt{1+z_j}$, $j=1,2$.

$\square$ *Доведення.* Збіжність двовимірного неперервного g-дробу (1) до голоморфної функції $g\left(z\right)$ в області D доведена в роботі [3]. Нехай $\alpha-$довільне число з інтервалу $(-\pi/2,\pi/2)$. На підставі твердження 2 $g_n\left(z\right)=f_{2n}\left(z\right)$, $n\geq 1$. Оцінимо модуль різниці підхідних дробів $|f_{2m}\left(z\right)-f_{2n}\left(z\right)|$ двовимірного неперервного π-дробу (4) при $m>n\geq 3$.

Із (1) випливає виконання нерівностей

$$|z_p|-\mathrm{Re}(\mathrm{z_pe^{-2i\alpha}})<2\cos^2\alpha,\quad \mathrm{p}=1,2, \tag{9}$$

$$|z_1|+|z_2|-\mathrm{Re}((\mathrm{z_1+z_2})\mathrm{e^{-2i\alpha}})<2\cos^2\alpha,$$

$$|z_1z_2|-\mathrm{Re}(\mathrm{z_1z_2e^{-2i\alpha}})<\frac{1}{2}\cos^2\alpha.$$

Крім того, із доведення леми 4.41 з [6] випливає, що при $x\geq c>0$ і $v^2\leq 4u+4$

$$\min_{-\infty<y<\infty}\mathrm{Re}\frac{\mathrm{u+iv}}{\mathrm{x+iy}}=-\frac{\sqrt{\mathrm{u^2+v^2}}-\mathrm{u}}{2\mathrm{x}}. \tag{10}$$

Доведемо виконання таких нерівностей:

$$\mathrm{Re}(\mathrm{F^{(s-1-2j)}_{j+k,k}}(\mathrm{z_1})\mathrm{e^{-i\alpha}})\geq(1-\omega(\mathrm{z_1}))\cos\alpha, \tag{11}$$

$$\mathrm{Re}(\mathrm{F^{(s-1-2j)}_{k,j+k}}(\mathrm{z_2})\mathrm{e^{-i\alpha}})\geq(1-\omega(\mathrm{z_2}))\cos\alpha \tag{12}$$

для $s=2r$, $r\geq 2$, $0\leq j\leq[(s-1)/2]-1$, $1\leq k\leq [(s-1)/2]-j$,

$$\mathrm{Re}(\mathrm{G^{(s-1)}_0}\left(\mathrm{z}\right)\mathrm{e^{-i\alpha}})\geq(1-\omega(\mathrm{z_1})-\omega(\mathrm{z_2})-\omega\left(\mathrm{z}\right))\cos\alpha \tag{13}$$

для $s\geq 2j$, $j\geq 2$ і

$$\mathrm{Re}(\mathrm{G^{(s-1-2j)}_j}\left(\mathrm{z}\right)\mathrm{e^{-i\alpha}})\geq\pi_{\mathrm{jj}}(1-\omega\left(\mathrm{z}\right))\cos\alpha \tag{14}$$

для $s=2r$, $r\geq 3$, $1\leq j\leq[(s-1)/2]$.

При $k=[(s-1)/2]-j$ нерівності (11) є очевидними. Нехай (11) виконуються при $k=p+1<$ $<[(s-1)/2]-j$. Тоді для $k=p$ маємо

$$F^{(s-1-2j)}_{j+p,j}(z_1)\mathrm{e^{-i\alpha}}=(1+\mathrm{z_1})\mathrm{e^{-i\alpha}}-\frac{\mathrm{z_1e^{-i\alpha}}}{\mathrm{G^{(s-1-2j)}_{j+p+1,j}}(\mathrm{z_1})}=\mathrm{e^{-i\alpha}}+\frac{\pi_{\mathrm{j+p+1,j}}\mathrm{z_1e^{-2i\alpha}}}{(\pi_{\mathrm{j+p+1,j}}+\mathrm{F^{(s-1-2j)}_{j+p+1,j}}(\mathrm{z_1}))\mathrm{e^{-i\alpha}}}.$$

Використовуючи співвідношення (9) і (10), отримаємо

$$\mathrm{Re}(\mathrm{F^{(s-1-2j)}_{j+p,j}}(\mathrm{z_1})\mathrm{e^{-i\alpha}})\geq\cos\alpha-\frac{\pi_{\mathrm{j+p+1,j}}(|\mathrm{z_1}|-\mathrm{Re}(\mathrm{z_1e^{-2i\alpha}}))}{2(\pi_{\mathrm{j+p+1,j}}\cos\alpha+\mathrm{Re}(\mathrm{F^{(s-1-2j)}_{j+p+1,j}}(\mathrm{z_1})\mathrm{e^{-i\alpha}}))}>(1-\omega(\mathrm{z_1}))\cos\alpha.$$

Аналогічно доведенню нерівностей (11), можна довести виконання нерівностей (12)–(14). Із співвідношень (6)–(14) випливає, що всі $F^{(s-1-2j)}_{j+k+1,j}(z_1)\neq 0$, $F^{(s-1-2j)}_{j,j+k+1}(z_2)\neq 0$, $G^{(s-1-2j)}_{j+k,j}(z_1)\neq 0$, $G^{(s-1-2j)}_{j,j+k}(z_2)\neq 0$, $G^{(s-1-2j)}_{j}\left(z\right)\neq 0$. Використовуючи формулу різниці між підхідними дробами ДНД [1,2] для різниці двох підхідних дробів $f_{2m}\left(z\right)-f_{2n}\left(z\right)$ двовимірного неперервного π-дробу (4) при $m>n\geq 2$, маємо

$$f_{2m}\left(z\right)-f_{2n}\left(z\right)=-\frac{\pi_0(\Psi^{(2m-1)}_0\left(z\right)-\Psi^{(2n-1)}_0\left(z\right))}{G^{(2m-1)}_0\left(z\right)G^{(2n-1)}_0\left(z\right)}+\frac{\pi_0(-1)^n\prod\limits_{k=1}^{n}\pi_{k-1,k-1}\pi_{k,k}z_1z_2}{\prod\limits_{k=0}^{n}G^{(2m-1-2k)}_k\left(z\right)\prod\limits_{k=0}^{n-1}G^{(2n-1-2k)}_k\left(z\right)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^{j+1}(\Psi_j^{(2m-1-2j)}(z)-\Psi_j^{(2n-1-2j)}(z))\pi_0\prod_{k=1}^{j}\pi_{k-1,k-1}\pi_{kk}z_1z_2}{\prod_{k=0}^{j}G_k^{(2m-1-2k)}(z)\,G_k^{(2n-1-2k)}(z)}.$$

З теореми 1 з [8] випливає виконання нерівностей

$$\left|\Psi_k^{(2m-1-2k)}(z)-\Psi_k^{(2n-1-2k)}(z)\right|\le L_{nk}(z),\qquad(15)$$

де $m>n\ge 3$, $0\le k\le n-3$. На основі співвідношень (6)–(12), виконуються такі нерівності:

$$\left|\Psi_k^{(2m-1-2k)}(z)-\Psi_k^{(2n-1-2k)}(z)\right|\le\left|\frac{z_1}{\cos\alpha}\right|^{n-k}+\left|\frac{z_2}{\cos\alpha}\right|^{n-k},\qquad(16)$$

де $m>n\ge 3$, $k=n-2,n-1$.

Далі, використовуючи співвідношення (13)–(16), при $m>n\ge 3$ маємо

$$|f_{2m}(z)-f_{2n}(z)|\le\frac{\pi_0}{(1-\omega(z_1)-\omega(z_2)-\omega(z))^2\cos^2\alpha}\left(L_{n0}(z)+\sum_{j=1}^{n-3}\frac{L_{nj}(z)\ \ |z_1z_2|^j}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2j}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)|z_1z_2|^{n-2}}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-4}\cos^2\alpha}+\frac{(|z_1|+|z_2|)\,|z_1z_2|^{n-1}}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-2}\cos\alpha}+\frac{|z_1z_2|^n}{((1-\omega(z))\cos\alpha)^{2n-1}}\right).$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $m\to\infty$, отримуємо (8). ■

Зазначимо, що із оцінок (8) випливає, що для кожного α, $-\pi/2<\alpha<\pi/2$, двовимірний неперервний g-дріб (1) збігається до голоморфної функції $g(z)$ в області $P_\alpha\bigcap G_\alpha$ швидше ніж ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n+1)q^{n-2}$, де $0<q<1$, $q=q(K)$, $K-$довільна компактна підмножина цієї області.

Висновки

Двовимірні неперервні π- і g-дроби можна використовувати для дослідження мероморфних і голоморфних функцій двох змінних. Залишається невирішеним питання збіжності двовимірного неперервногоπ-дробу.

Література

[1] Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наукова думка, 1986. – 176 с.

[2] Боднар Д.И., Кучминская Х.И. Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 30–34.

[3] Возна С.М. Збіжність двовимірного неперервного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – *47*, №3. – С. 39–43.

[4] Возна С.М., Кучмінська Х.Й. Ознаки збіжності для двовимірного неперервного дробу спеціального вигляду // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Зб. наукових праць. Математика. – Чернівці: Рута. – 2004. – Вип.191–192. – С. 22–32.

[5] Дмитришин Р.І. Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1998. – 128 с.

[6] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

[7] Bodnar D.I., Dmytryshyn R.I. On the convergence of multidimensional$g$-fraction // Математичні студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 115–126.

[8] Gragg W.B. Truncation error bounds for g-fractions // Numer. Math. – 1968. – Vol. 11. – P. 370–379.

[9] Kuchmins'ka Kh.Yo. Some properties of two-dimensional continued fractions // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1999. –105, № 1–2. –P. 347-353.

[10] Runckel H. Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line // J. reine angew. Math – 1976. – Vol. 281 – P. 97–125.

[11] Thale J.S. Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 7. № 2, – P. 232–244.

[12] Tsygvintsev A.V. On the connection between g-fractions and solutions of the Feigenbaum-Cvitanoviж equation // Communications in the analytic theory of continued fractions. – 2003. – Vol. XI. – P. 103–112.

[13] Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

TRUNCATION ERROR BOUNDS FOR THE TWO-DIMENSIONAL CONTINUED g-FRACTION

S. Vozna*, Kh. Kuchmins'ka

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The two-dimensional continued π-fraction has been proposed. It also has been proved that the even part of such fraction is a two-dimensional continued g-fraction. Using this fact we have established truncation error bounds for the two-dimensional continued g-fraction.

Keywords: π-fraction, g-fraction, convergence, truncation, error bounds.

PACS: 40A15; 30B70

UDK: 517.524

*Corresponding author