

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕФЕРЕНЦ-ЕЛІПСОЇДА ДЛЯ ТЕРИТОРІЇ УКРАЇНИ

Усі результати геодезичних вимірювань під час обчислення координат геодезичних пунктів потрібно відносити на певну визначену математичну поверхню. Найкраще за таку поверхню брати референц-еліпсоїд – земний еліпсоїд обертання визначених розмірів, певним чином орієнтований в тілі Землі.

За вимірами геодезичних координат точок квазігеоїда на території України $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ у загальноземній системі координат WGS-84 побудуємо референц-еліпсоїд, осі якого будуть паралельні осям загальноземного еліпсоїда. Для цього достатньо знайти координати центру референц-еліпсоїда, які можна задати зміщенням його центру відносно центру загальноземного еліпсоїда dx, dy, dz , а також його розміри (півосі a і b).

Побудуємо систему координат $O'X'Y'Z'$ з початком в центрі референц-еліпсоїда, яка збігається з його осями. Очевидно, що зв'язок між нею і системою координат загальноземного еліпсоїда $Oxyz$ буде таким:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (1)$$

Рівняння еліпсоїда обертання у системі координат $O'x'y'z'$ матиме вигляд

$$\frac{X'^2 + Y'^2}{a^2} + \frac{Z'^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Підставивши у (2) виміряні координати точок, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\frac{(X_i - dx)^2 + (Y_i - dy)^2}{a^2} + \frac{(Z_i - dz)^2}{b^2} - 1 = v_i \quad (3)$$

де $i = \overline{1, n}$ (n – кількість точок); v_i – це похибки, зумовлені тим, що виміряні точки не лежать на референц-еліпсоїді.

Оскільки система (3) є недовизначеною, розв'яжемо її за допомогою методу найменших квадратів. Для цього складемо функцію F :

$$F = [vv] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(X_i - dx)^2 + (Y_i - dy)^2}{a^2} + \frac{(Z_i - dz)^2}{b^2} - 1 \right]^2 = \min \quad (4)$$

Розкладемо поправки в ряд Тейлора

$$v_i = f_i = f_i(dx_0, dy_0, dz_0, a_0, b_0) + \sum_{j=1}^5 \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right)_0 \tau_j \quad (5)$$

За параметри $t_j (j = \overline{1,5})$ прийемо dx, dy, dz, a, b , а за їх наближені значення прийемо характеристики загальноземного еліпсоїда, тобто $dx_0 = 0, dy_0 = 0, dz_0 = 0, a_0 = 6378137 \text{ м}, b_0 = 6356752 \text{ м}$.

Тепер можна встановити вигляд матриць параметричного способу методу найменших квадратів :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_1} \right)_0 &= a_i = -\frac{2}{a_0^2} (X_i - dx_0); \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_2} \right)_0 &= b_i = -\frac{2}{a_0^2} (Y_i - dy_0); \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_3} \right)_0 &= c_i = -\frac{2}{b_0^2} (Z_i - dz_0); \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_4} \right)_0 &= d_i = -\frac{2}{a_0^3} [(X_i - dx_0)^2 + (Y_i - dy_0)^2]; \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_5} \right)_0 &= e_i = -\frac{2}{b_0^3} (Z_i - dz_0)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, матриця A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & e_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & e_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Свою чергою матриця L матиме вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \dots \\ f_{n0} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Оскільки всі виміри рівноточні, матрицю поправок τ можна знайти за формулою

$$\tau = -(A^T A)^{-1} (A^T L) \quad (9)$$

Проте знайдений так референц-еліпсоїд значно відрізняється від загальноземного еліпсоїда. Тому необхідно ввести параметр регуляризації α в матрицю N :

$$N = A^T A \quad (10)$$

Отже, елементи матриці $\tilde{N}$ (з уведеним параметром регуляризації) можна знайти так:

$$\tilde{N}_{ij} = \begin{cases} N_{ij} + \alpha, i = j \\ N_{ij}, i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

Матриця поправок $\tilde{\tau}$ набуде вигляду

$$\tilde{\tau} = -(\tilde{N})^{-1} (A^T L) \quad (12)$$

Отже, було одержано характеристики референц-еліпсоїда на територію України, які наведено в таблиці.

Характеристики референц-еліпсоїда

$dx=$	46,32786984
$dy=$	-47,03438163
$dz=$	10,83096761
$a=$	6378147,886
$b=$	6356759,063

Отже, у роботі запропоновано методику знаходження параметрів референц-еліпсоїда і знайдено референц-еліпсоїд на територію України, а також проведено його регуляризацію відповідно до загальноземного еліпсоїда WGS-84.