

УДК 538.22

К.К. Товстюк, К.Д. Товстюк
 Національний університет "Львівська політехніка"
 кафедра напівпровідникової електроніки

КЛАСИФІКАЦІЯ ПОДВІЙНИХ ПЕРЕСТАНОВОК МІЖЕЛЕКТРОННОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Товстюк К.К., Товстюк К.Д., 2003

C.C. Tovstyuk, K.D. Tovstyuk

CLASSIFICATION OF DOUBLE PERMUTATIONS FOR ELECTRON INTERACTION

Tovstyuk C.C., Tovstyuk K.D., 2003

Розроблений математичний формалізм з використанням теорії перестановок у ряді теорії збурення багаточастинкових (міжелектронної у цій роботі) взаємодій. Для цього нами раніше пропонувалася подвійна перестановка (ПП), побудована так, щоби вона відображала закони збереження (енергії та квазіімпульсу) електронів у кожній віртуальній акті взаємодії. Ми також довели, що множина ПП утворює групу. Проаналізовано ПП і знаходимо критерії, за якими можна виділити незв'язані та скомпоновані ПП, що відповідають незв'язаним та звідним діаграмам Фейнмана. Ввівши операцію транспозиції стовпчика знаходимо ПП, які у сумі дають однакові, протилежні за знаками вирази. Виділяємо ПП з прямим об'єднанням пар, за допомогою яких записується ряд теорії збурення для ефективної взаємодії.

We develop the mathematical formalism with using of permutation theory in perturbation series of many-particles (multi electron for this paper) interaction. For this purpose we created earlier a double permutation (DP), which is so constructed that it reflects the energy and momentum conservation in every virtual interaction. We also proved that set of DP form a group. Now we analyze the set of DP and find out the criteria after which we can separate the unbounded and composite DP, which are similar to unbounded and reducible diagrams of Feynman. Introducing the operation of transition in the column, we find DP which give in sum equal expressions with opposite signs. We choose the DP with direct associated pairs with which we form the perturbation series for effective interaction.

1. Вступ. Використання теорії груп перестановок у описові багаточастинкової (для цієї роботи міжелектронної) взаємодії з одного боку здається очевидним, після використання теореми Віка-Блоха-Домінісіса, однак і проблемним, оскільки дуже важливо врахувати що взаємодія ця відбувається із збереженням енергії та імпульсу. Звичайна перестановка ніяк не враховує цих законів збереження. У роботах [1 - 5] будується подвійна перестановка (ПП) для міжелектронної та електрон-фононої взаємодії, так що вона не тільки відображає відповідне попарне усереднення, а і визначає правила відбору (збереження імпульсу та енергії). Роботи [1, 2, 4, 5] присвячені побудові ПП для міжелектронної, а [3, 5], – для електрон-фононої взаємодій. У [4] ми довели, що такі ПП утворюють групу перестановок, що дозволяє використати відому з алгебри класифікацію (схеми Юнга-Ямануті) для наступного аналізу ряду теорії збурення. Але недоліком такого

методу є величезна кількість об'єктів (кількість ПП для n -порядку теорії збурення дорівнює $(2n + 1)$). Окрім того, із теорії Фейнманових діаграм ми знаємо, що цілу сукупність ДП (ДП, що визначають аналітичні вирази як у незв'язаних діаграм, чи, згідно із рівнянням Дайсона [6, 7] вирази як у зв'язаних діаграм Фейнмана. Окрім того, нам вдалося відшукати у множині ДП такі, сума яких дає аналогічні вирази із оберненими знаками. За допомогою класифікації ми також відбираємо і згортаємо перестановки, що визначають ефективну взаємодію.

2. Постановка задачі. Розглядається міжелектронна взаємодія системи, що описується гамільтоніаном

$$H = \sum \varepsilon_{\alpha k} a_{\alpha k}^+ a_{\alpha k} + \sum_{\alpha \alpha' k k' q} V_{\alpha k - q, \alpha' k' + q; \alpha' k'; \alpha k} (q) \times a_{\alpha k - q}^+ a_{\alpha' k' + q}^+ a_{\alpha' k'} a_{\alpha k} \quad (1)$$

Оскільки нас цікавить міжелектронна взаємодія у твердих тілах запис (1) передбачає врахування і симетрії кристала. Зокрема індекс α – сукупність квантових чисел (μ, i, j) . μ – незвідне представлення групи вектора k , i – номер функції в ньому, j – номер еквівалентного незвідного представлення. Звичайно, врахування не тільки групи перестановок, але і просторової групи виглядає дуже привабливо, однак, обмежимося для початку розглядом електронів тільки однієї зони (зони провідності) і в подальшому розгляді пропускатиемо α . Функція Гріна, згідно із [6, 7]

$$G_{kk}(t-t') = -i \left\langle \hat{T} a_k(t) a_k^+(t') \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} H_{\text{int}}(t_1) \cdot H_{\text{int}}(t_2) \dots H_{\text{int}}(t_m) \dots \right\rangle_{H_0} \times \langle S(\infty) \rangle_{H_0}^{-1} \quad (2)$$

із

$$\langle S(\infty) \rangle_{H_0} = \left\langle \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_i dt + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T[H_i(t_1) H_i(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots \right\} \right\rangle_{H_0} \quad (3)$$

Вважаємо кількість часток незмінною

$$\langle \hat{T} a_k(t) a_{k'}(t') \rangle_{H_0} = 0; \quad \langle T a_k^+(t) a_{k'}^+(t') \rangle_{H_0} = 0. \quad (4)$$

а

$$\langle \hat{T} a_k(t) a_{k'}^+(t') \rangle_{H_0} = \delta_{k,k'} G_{k,k}^0(t-t') \quad (5)$$

(5) – одночастинкова функція Гріна ідеального газу електронів.

Використовується подвійна перестановка (ПП) для опису добутків всеможливих середніх, яка відображає попарне усереднення так:

$$\begin{matrix} \dots & a_{k_i}^+ & \dots \\ \dots & a_{k_{j'}} & \dots \\ \dots & a_{k_{i'}}^+ & \dots \\ \dots & a_{k_e} & \dots \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots \\ \dots & j' & \dots \\ \dots & i' & \dots \\ \dots & l & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \langle a_{k_i - q_i}^+ a_{k_{j'}} \rangle \cdot \langle a_{k_{i'} + q_i}^+ a_{k_l} \rangle \quad (6)$$

У [1,2,4] визначено правила, що дають змогу виписати із кожного стовпчика ПП правила відбору на квазіімпульси електронів (k, k') та їх зв'язок із імпульсом взаємодії (q) . А також правила визначення знака аналітичного виразу, який відповідає ПП. Отже, кожний ПП відповідає свій аналітичний вираз. У табл. 1 наведено приклади кількох ПП та відповідні їм аналітичні вирази

**Приклади подвійних перестановок та відповідних
до них аналітичних виразів**

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1' & 2 & 1 \\ & 1' & 2' \\ & 2' & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{(-i)^2}{2!} G_k^0(\omega) \left(\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} V(k_1 - k_2) V(k_2 - k_1) \cdot G_{k_2}^0(\omega_2) \times \right. \\ \left. G_{k+k_1-k_2}^0(\omega + \omega_1 + \omega_2) G_{k_1}^0(\omega_1) \right) G_k^0(\omega)$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 4' & 0 & 2' & 3' \\ & 1' & 2' & 3' & 4' \\ & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$(G_k^0(\omega))^2 \frac{(-i)^4}{4!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} V_{k_1-k_3+k; k+k_3-k; k; k_1}(k_3 - k) \times \\ V_{k; k_4; k'_2; k+k_4-k'_2}(k_4 - k'_2) \cdot V_{k_1+k'_2-k_3; k+k_4-k'_2; k+k_1-k_3; k_4}(k_4 + k_3 - k_1 - k'_2) \times \\ V_{k_1; k'_2; k_1+k'_2-k_3; k_3}(k_3 - k_1) \cdot G_{k_1}^0(\omega_1) G_{k_3}^0(\omega_3) G_{k+k_1-k_3}^0(\omega + \omega_1 - \omega_3) G_{k'_2}^0(\omega'_2) \cdot \\ G_{k_4}^0(\omega_4) G_{k+k_4-k'_2}^0(\omega + \omega_4 - \omega'_2).$

3. Класифікація подвійних перестановок

3.1. Незв'язана подвійна перестановка. Незв'язана ПП задає правила відбору, які розпадаються на дві або більше незалежні системи рівнянь. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3' & 1' & 2' & 5' & 6' & 4' \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3' & 1' & 2' \\ 1' & 2' & 3' \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5' & 6' & 4' \\ 4' & 5' & 6' \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

правила відбору для якої можна записати у вигляді двох систем із різними незалежними змінними

$$\begin{aligned} k_1 + k_{1'} &= k_3 + k_{3'} & k_4 + k_{4'} &= k_5 + k_{5'} \\ k_2 + k_{2'} &= k_1 + k_{1'} & k_5 + k_{5'} &= k_6 + k_{6'} \\ k_3 + k_{3'} &= k_2 + k_{2'} & k_6 + k_{6'} &= k_4 + k_{4'} \\ \sum_i k_i &= \sum_i k_{i'} & \sum_i k_j &= \sum_i k_{j'} \end{aligned} \quad (8)$$

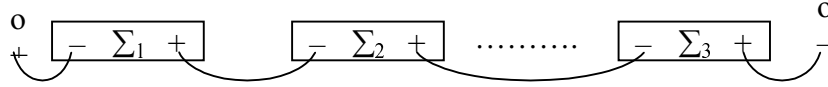
Критерієм для визначення незв'язаної перестановки є рівність ліво- та правосторонніх сум у системі рівнянь, означеній правилами відбору.

Аналітичний вираз, який визначають незв'язаною ПП, входить у ряд, що визначає S-матрицю [6,7]. Це вирази, які мовою діаграм Фейнмана визначаються незв'язаними діаграмами. Ряд, створений аналітичними виразами незв'язаних ПП, скорочується із знаменником $(2n+1)!$ ПП ми відкидаємо підмножину незв'язаних ПП.

3.2 Скомпонована подвійна перестановка. Скомпонована ПП складається із двох або більше матриць із щонайбільше однією парою чисел, спільною для будь-якої пари матриць. Прикладом скомпонованої ПП є

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3' & 1' & 2' & 5' & 6' & 4' \\ & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

яка складається з двох підмножин чисел $(0,1,1',2,2',3,3',4)$; $(4,4',5,5',6,6',0)$ із спільною парою чисел $(0$ та $4)$. Скомпоновану ПП, у спільну пару чисел для будь-яких її підмножин входить 0 (будемо називати їх скомпонованими ПП, що зв'язуються через 0) символічно зображає рисунок



Символічне зображення скомпонованої ПП, де прямокутники зображають матриці чисел, а зв'язуючі лінії – спільну пару чисел для підмножин. Таке зображення справедливе для скомпонованої ПП, яка містить цифру 0 у будь-яких двох її підмножинах.

Оскільки всередині кожного прямокутника зберігається рівність між імпульсами, зображеними лініями, що входять, та імпульсами, зображеними лініями, що виходять, очевидно, що лініям на рисунку відповідають квазіімпульси k . Аналітичний вираз, що визначає (9), можна записати

$$G_k^0(\omega) \Sigma_k^{(1)}(\omega) G_k^0(\omega) \Sigma_2^{(2)}(\omega) G_k^0(\omega) \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Sigma_k^{(1)}(\omega) = & \frac{(-i)^3}{3!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k_1'}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \cdot V_{k_1+k_3-k_1'; k_3; k_1'; k_1} (k_3 - k_1') \cdot V_{k_1'; k_1+k_1'-k_3; k} (k - k_1') \\ & \cdot V_{k_1'+k_1-k_3; k_1+k_1'-k_3; k_3} (k_3 - k_1' - k_1 - k) G_{k_1}^0(\omega_1) \cdot G_{k_1'}^0(\omega_1') G_{k_3}^0(\omega_3) \cdot \\ & G_{k_1+k_1'-k_3}^0(\omega_1 + \omega_1' - \omega_3) \cdot G_{k_1+k_1'-k}^0(\omega_1 + \omega_1' - \omega) \end{aligned} \quad (11)$$

та

$$\begin{aligned} \Sigma_k^{(2)}(\omega) = & \frac{(-i)^3}{3!} \int \frac{d^4 k_5}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k_4'}{(2\pi)^4} \cdot \frac{d^4 k_6}{(2\pi)^4} \cdot V_{k-k_5+k_4'; k_5; k_4'; k} (k_5 - k_4') \cdot V_{k_4'+k-k_6; k_6; k+k_4'-k_5; k} (k_6 - k_4') \cdot \\ & V_{k_4'; k+k_4'-k_6; k_6} (k_5 - k_4' - k + k_6) G_{k_5}^0(\omega_5) \cdot G_{k_4'}^0(\omega_4') G_{k_6}^0(\omega_6) \cdot G_{k+k_4'-k_5}^0(\omega + \omega_4' - \omega_5) \cdot \\ & G_{k+k_4'-k_6}^0(\omega + \omega_4' - \omega_6) \end{aligned} \quad (12)$$

Аналізуючи (10), запишемо

$$G_k^{(1)}(\omega) = G_k^0(\omega) \Sigma_2^{(2)}(\omega) G_k^0(\omega) \quad (13)$$

Тоді (10) перепишеться

$$G_k^0(\omega) \Sigma_k^{(1)}(\omega) G_k^1(\omega) \quad (14)$$

Тому, згідно із рівнянням Дайсона [7,8], скомпоновані ПП, що зв'язуються через 0 , ми не братимемо до уваги при аналізі ряду теорії збурення для визначення функції Гріна, як такі, що визначають наступні порядки цього ряду. Зазначимо, що скомпоновані ПП, що зв'язуються через 0 задають вирази, аналогічні до виразів, що відповідають звідним діаграмам Фейнмана [6, 7]. Скомпоновані ПП, які не зв'язуються через 0 і визначають вираз ефективної взаємодії, ми проаналізуємо нижче.

3.3 Операція транспозиції стовпчика. Транспозиція n -стовпчика ПП означає заміну місцями цифр у допоміжних рядках цього стовпчика. Наприклад, транспозиція третього стовпчика у ПП (9), перетворить її у ПП (15)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 4' & 0 & 1 & 3' \\ & 1' & 2' & 3' & 4' \\ & 3 & 4 & 2' & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Важливо, що [3,4]

- транспозиція змінить знак у відповідному аналітичному виразі, оскільки вона переставляє місцями цифри, що відносилися до нештрихованих цифр основного рядка (що стоять на непарних місцях) та цифри, що відносилися до штрихованих цифр основного рядка (що стоять на парних місцях). Отже, транспозиція з необхідністю змінить кратність ПП;

- транспозиція залишить незмінними правила відбору для квазіімпульсів електронів (k, k' у (1));

- транспозиція змінить вираз квазіімпульсу взаємодії (q у (1)), записаного через відповідні квазіімпульси електронів.

У табл. 2 наведені правила відбору для квазіімпульсів електронів та квазіімпульсів взаємодії, що відповідають ПП (9) та (15).

Таблиця 2

Правила відбору

№	ПП (9)	ПП (15)
Правила відбору (ПВ) для квазі-імпульс. електр. (k_i)	$k = k'_1, \quad k'_4 = k + k_1 - k_3,$ $k_2 = k + k_4 - k'_2,$ $k'_3 = k_1 + k'_2 - k_3$	$k = k'_1, \quad k'_4 = k + k_1 - k_3,$ $k_2 = k + k_4 - k'_2,$ $k'_3 = k_1 + k'_2 - k_3$
ПВ для квазі імпл. взаємодії (q_i)	$q_1 = k_3 - k$ $q_2 = k_4 - k'_2$ $q_3 = k_3 - k'_2$ $q_4 = k_4 + k_3 - k_1 - k'_2$	$q_1 = k_3 - k$ $q_2 = k_4 - k'_2$ $q_3 = k_3 - k_1$ $q_4 = k_4 + k_3 - k_1 - k'_2$

Правила відбору для ПП (12) та ПП (13).

Як бачимо ПП (9) та (15) визначають однакові рівняння для квазіімпульсів електронів (верхній рядок табл. 2). Для квазіімпульсів взаємодії ми отримали різні залежності для q_3 (оскільки провели транспозицію саме третього стовпчика).

Сума аналітичних виразів ПП (9) та ПП (15) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & (G_k^0(\omega))^2 (-i)^4 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} W(k, k_1, k'_2, k_3, k_4) \cdot (V_{k_1, k'_2, k_1 + k'_2 - k_3, k_3} (k_3 - k_1) - \\ & - V_{k'_2, k_1, k_1 + k'_2 - k_3, k_3} (k_3 - k'_2)) \cdot F(k, k_1, k'_2, k_3, k_4) \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} W(k, k_1, k'_2, k_3, k_4) = & V_{k_1 - k_3 + k; k + k_3 - k; k; k_1} (k_3 - k) V_{k; k_4, k'_2, k + k_4 - k'_2} (k_4 - k'_2) \cdot \\ & V_{k_1 + k'_2 - k_3; k + k_4 - k'_2, k + k_1 - k_3, k_4} (k_4 + k_3 - k_1 - k'_2) \end{aligned} \quad (17)$$

i

$$F(k, k_1, k'_2, k_3, k_4) = G_{k_1}^0(\omega_1) G_{k_3}^0(\omega_3) G_{k+k_1-k_3}^0(\omega + \omega_1 - \omega_3) G_{k'_2}^0(\omega'_2) \cdot G_{k_4}^0(\omega_4) G_{k+k_4-k'_2}^0(\omega + \omega_4 - \omega'_2). \quad (18)$$

Оскільки змінні інтегрування k_1, k'_2 є незалежними і змінюються в однакових межах (у межах зони Бріллюена), бачимо з (16), що внесок таких перестановок взаємно компенсується. Однак різниця (16) характерна для перестановок, що містять стовпчики із трьома незалежними змінними. Тому ПП, що містять хоча б один стовпчик, у який входять три незалежні змінні разом із ПП із транспонованим цим стовпчиком, дають нульовий внесок у ряд теорії збурення. Отже, такі ПП ми не розглядатимемо.

3.4 Подвійні перестановки з об'єднаними парами. ПП з об'єднаними парами не входять до класу перестановок, які ми виключили з розгляду у 3.1 – 3.3. Пряме об'єднання пар у ПП трапляється коли одна і та ж пара цифр зустрічається у ПП двічі (у відповідних основних та допоміжних рядках ПП. Наприклад, якщо об'єднується пара цифр (i, j) , це означає, що цифра j знаходиться у допоміжному рядкові під цифрою i основного рядка, і навпаки, цифра i , знаходиться у допоміжному рядкові під цифрою j основного рядка.

Приклад подвійної перестановки із прямим об'єднанням пар

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1' & 0 & 4' & 2' & 3' & 6' & 7' & 8' & 5' \\ & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' \\ & 2 & 3 & 1 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (17)$$

містить пряме об'єднання пар $(2'3)$, $(56')$, $(67')$, $(78')$. Аналізуючи правила відбору для квазіімпульсів взаємодії, згідно з їх означенням будуть такими, що здійснюються для стовпчиків, у яких містяться об'єднані пари. Зокрема, для ПП (17) це

$$q_2 = q_3 = k_1 - k'_3; \quad (18)$$

Тобто у ПП (17) записано взаємодію, із передаванням одного і того ж імпульсу, яка вже відрізняється від початкової і утворилася внаслідок міжелектронної взаємодії. Будемо називати її ефективною взаємодією. Тоді ПП (17) згорнеться до перестановки нижчого порядку, якщо ми “викинемо” пряму, записавши її у взаємодію. Однак, отже, ефективну взаємодію задає цілий стовпчик. Будь-який стовпчик ПП визначає у аналітичному виразі дві нульові функції Гріна і 1 взаємодію. Отже, для розглядуваного нами другого стовпчика ПП (17)

$$V_{eff}(q_2) = -V^2(q_2) \int G_{k_2'+q_2}^0 G_{k_2}^0 \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \quad (19)$$

в (19) враховано початкову взаємодію, яка залишається в стовпчику.

Аналогічно для іншого прямого об'єднання, дістанемо

$$q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = k_4 - k'_5. \quad (20)$$

ПП із прямим об'єднанням пар доходимо висновку, що стовпчики із прямим об'єднанням можна згорнути, якщо записати в утвореному стовпчику ефективну взаємодію замість початкової. Зокрема (17) згорнеться до

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1' & 0 & 4' & 3' & 5' \\ & 1' & 3' & 4' & 5' \\ & 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad (18)$$

У (18) другий (як ми вже зазначили) та четвертий стовпчики містять ефективну взаємодію. Для четвертого стовпчика це

$$V_{eff}(q_4) = V^4(q_4) \int \frac{d^4 k_5}{(2\pi)^4} (G_{k5}^0 G_{k5+q4}^0) \int \frac{d^4 k_6}{(2\pi)^4} (G_{k6}^0 G_{k6+q4}^0) \int \frac{d^4 k_7}{(2\pi)^4} (G_{k7}^0 G_{k7+q4}^0) \quad (19)$$

Перепознаємо $4 \rightarrow 3$, $8 \rightarrow 4$, отримаємо ПП, яка може бути “розгорнутою” до звичайної перестановки [9].

4. Висновки. Проводячи класифікацію ПП, ми знайшли критерії, які дають змогу

- виділити із множини ПП підмножину незв’язних ПП, які, як показано у [6,7], у сумі дають вираз для $S(\infty)$ (3) і у наступному аналізі не враховуються.
- знайти скомпоновані ПП, які відповідають наступним порядкам ряду теорії збурення і, згідно із рівнянням Дайсона, не беруть участі у обчисленні масового оператора.
- виділити у кожній перестановці стовпчики, що визначають ефективну взаємодію і провести згортку (зменшити порядок ПП).

Отже, у розробленому формалізмі усереднення розділяється на два етапи. На першому етапі ряд усереднюється не повністю, виділяється ефективна взаємодія, що еквівалентно виділенню ефективного гамільтоніана. Повне усереднення і знаходження функції Гріна та власної енергетичної частини – наступний етап роботи, який опирається на запропоновану класифікацію.

Така поетапність впливає з фізичних міркувань. Ефективна взаємодія є усередненням окремих попарних актів взаємодії між електронами, повна – відноситься до встановлення термодинамічної рівноваги [10,11].

1. Теория межэлектронного взаимодействия в кристаллах / М.Ф. Олексеева, К.Д. Товстюк // Теорет. и мат. физика. – 1976. – Т.27, № 2. – С.222-232.
2. Теоретико-групповой диаграммный метод для решения задачи Хаббарда / М.Ф. Олексеева, К.Д. Товстюк // Теорет. и мат. физика. – 1976 №3. – С.386-391.
3. Данилевич-Товстюк К.К. Новый метод определения полной функции Грина для электрон-фононного взаимодействия. – К., 1979. – 13 с. – (АН УССР. Ин-т теор. физ. – Препринт ИТФ – 79 – 7Р).
4. К.К. Товстюк. Теорія симетричних груп у багаточастинкових задачах. Вісник НУ Львівська політехніка «Електроніка», № 423, 2001, с.121 – 125.
5. Полупроводниковое материаловедение / К.Д.Товстюк. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.
6. Методы квантовой теории поля в статистической физике / А.А. Абрикосов, А.П. Горьков, М.Е. Дзялошинский. – М.: Госиздат, 1942. – 358с.
7. Статистическая физика / Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. – М.: Наука, 1978. – 447 с.
8. Проблема многих тел в квантовой механике/ Н.Марч, У.Янг, С.Сампантхар. – М.: Мир 1969. – 493 с.
9. Дж.Г. Каплан. Симметрия многоэлектронных систем. – М.: Наука, 1969. – 435 с.
10. C.D. Tovstyuk and C.C. Tovstyuk New trends in intercalation compounds for energy storage. 2002, Kluwer Academic Publishers p. 629-632.
11. C.C. Tovstyuk. Thermodynamical values of Electron Gas in Layered Crystals. Molecular Physics Reports. 1999, vol. 23., pp 197 –199.