

## К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

© Улитин Г.М., 2006

*Розглянуто позовжні, поперечні та крутильні коливання стрижневих систем ступінчато-змінної жорсткості. Досліджено властивості власних функцій відповідних граничних задач.*

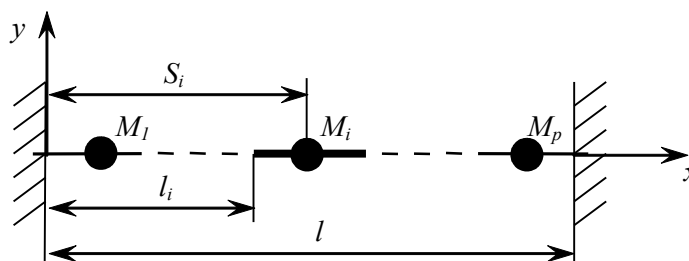
*Доведено їхню ортогональність з вагою. Отримано вираз для квадрата норми власних функцій.*

*Розглянуто підходи до розв'язання задач на власні та вимушені коливання таких систем.*

*In this article transversal, longitudinal and twirl vibrations of rod systems of stepped variable harsh are studied. The properties of eigen functions of border problems are investigated. It is shown that they will be weighted orthogonal. The formula for square norm of eigen functions is obtained. The problems solutions of such systems approaches are shown.*

Поперечные колебания однородных стержней при различных граничных условиях подробно исследованы в монографии [1]. В работе [2] рассмотрены аналогичные вопросы о собственных колебаниях двухступенчатого стержня. Различные задачи из динамики однородных стержней при наличии сосредоточенных масс приведены в работе [3].

Изучим более общую задачу о поперечных колебаниях стержневой системы ступенчато-переменной жесткости при наличии сосредоточенных масс  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) (рисунок).



Расчетная схема стержневой системы

Поперечные колебания сечений такой системы рассмотрим в отдельности на каждом из участков, а затем воспользуемся условиями сопряжения участков системы

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4}, \quad (1)$$

где  $y_i(x, t)$  – поперечные перемещения сечений стержня  $i$ -го участка;  $a_i^2 = \frac{E_i J_i}{m_i}$ ,  $E_i J_i$ ,  $m_i$  –

соответственно изгибная жесткость и погонная масса участка.

Вначале изучим собственные колебания такой системы без учета сосредоточенных масс. Для решения уравнения (1) необходимо задать граничные условия

$$L_1 y_1 \Big|_{x=0} = 0; \quad L_2 y_1 \Big|_{x=0} = 0; \quad L_3 y_p \Big|_{x=l} = 0; \quad L_4 y_p \Big|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Вид линейных дифференциальных операторов  $L_{j(j=1,\dots,4)}$  в условиях (2) соответствует следующим видам закрепления концов стержневой системы: жесткая заделка, шарнирная и свободное опирание.

Кроме того, необходимо задать условия сопряжения участков при  $x = l_i (i = 1, 2, \dots, p-1)$ .

$$\begin{aligned} y_i(l_i, t) &= y_{i+1}(l_i, t); \\ y'_i(l_i, t) &= y'_{i+1}(l_i, t); \\ E_i J_i y''_i(l_i, t) &= E_{i+1} J_{i+1} y''_{i+1}(l_i, t); \\ E_i J_i y'''_i(l_i, t) &= E_{i+1} J_{i+1} y'''_{i+1}(l_i, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Изучим свойства собственных функций, которые необходимы для решения задач на собственные и вынужденные колебания. Собственные функции граничной задачи представим следующим образом

$$X_n(x) = \sum_{i=1}^p (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)) X_{n,i}(x), \quad (4)$$

где  $e(x)$  – единичная функция;  $X_{n,i}(x)$  – собственные функции соответствующих граничных задач (1).

Для каждого участка системы воспользуемся известной формулой [1]

$$\left( \omega_n^2 - \omega_m^2 \right) \int_{l_{i-1}}^{l_i} X_{n,i} X_{m,i} dx = a_i^2 \left( X_{m,i} X'''_{n,i} - X_{n,i} X'''_{m,i} + X'_{n,i} X''_{m,i} - X'_{m,i} X''_{n,i} \right) \Big|_{l_{i-1}}^{l_i}, \quad (5)$$

где  $\omega_n$  – собственные частоты колебаний.

Просуммируем интегралы (5) по всему участку системы. Крайние члены в такой сумме будут равны нулю в силу граничных условий (2), и, если воспользоваться условиями сопряжений (3), то получим

$$\begin{aligned} \left( \omega_n^2 - \omega_m^2 \right) \int_0^l X_n X_m dx &= \sum_{i=1}^{p-1} E_i J_i \left( \frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i+1}} \right) (X_{m,i}(l_i) X'''_{n,i}(l_i) - X_{n,i}(l_i) X'''_{m,i}(l_i) + \\ &+ X'_{n,i}(l_i) X''_{m,i}(l_i) - X'_{m,i}(l_i) X''_{n,i}(l_i)). \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что ортогональность собственных функций возможна только при условии равенства погонных масс ( $m_i = m_{i+1}$ ), а они будут ортогональны с весом

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^p m_i (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)). \quad (7)$$

Теперь изучим влияние сосредоточенных масс на ортогональность собственных функций рассматриваемой граничной задачи. Условие наличия сосредоточенных масс  $M_i$  при  $x = S_i$  имеет вид

$$E_i J_i (y'''(s_i + 0, t) - y'''(s_i - 0, t)) = M_i \ddot{y}(s_i, t). \quad (8)$$

Условия (8) представим в соотношениях для собственных функций

$$X'''_{n,i}(s_i + 0) - X'''_{n,i}(s_i - 0) = -\frac{\omega_n^2 M_i}{E_i J_i} X_{n,i}(s_i). \quad (9)$$

Из формул (5) и (9), если интеграл (5) представить как сумму двух интегралов по промежуткам  $[l_{i-1}; s_{i-0}]$  и  $[s_{i+0}; l_i]$ , при условии  $\omega_n \neq \omega_m$  получаем

$$\int_0^l X_n X_m dx = X_{m,i}(s_i) X_{n,i}(s_i). \quad (10)$$

Условие (10) означает ортогональность собственных функций для данного случая с весом

$$\rho_2(x) = 1 + \sum_{i=1}^p M_i (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)) \delta(x - s_i), \quad (11)$$

где  $\delta(x)$  – функция дельта Дирака.

Объединяя результаты (7) и (11) окончательно получаем ортогональность собственных функций рассматриваемой граничной задачи с весом

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^p (m_i + M_i \delta(x - s_i)) (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)). \quad (12)$$

Выражение (12) для веса соответствует общей теории собственных функций [4].

Квадрат нормы с весом определим следующим образом

$$\int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = \sum_{i=1}^p m_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} X_{n,i}^2(x) dx + M_i X_{n,i}^2(s_i). \quad (13)$$

Чтобы воспользоваться известными соотношениями для вычисления квадрата нормы собственных функций [1], введем волновые числа  $k_{n,i}^4 = \omega_n^2 / a_i^2$  и перейдем к дифференцированию по  $z = k_{n,i}x$ . Тогда условия сопряжения (3) для собственных функций примут вид

$$\begin{aligned} X_{n,i}(l_i) &= X_{n,i+1}(l_i); \\ k_{n,i} X'_{n,i}(l_i) &= k_{n,i+1} X'_{n,i+1}(l_i); \\ k_{n,i}^2 E_i J_i X''_{n,i}(l_i) &= k_{n,i+1}^2 E_{i+1} J_{i+1} X''_{n,i+1}(l_i); \\ k_{n,i}^3 E_i J_i X'''_{n,i}(l_i) &= k_{n,i+1}^3 E_{i+1} J_{i+1} X'''_{n,i+1}(l_i), \end{aligned} \quad (14)$$

где в формулах (14) дифференцирование уже проводится по переменной  $z$ .

Для примера рассмотрим случай жесткой заделки концов стержневой системы. С учетом граничных условий и выражения для квадрата нормы (14) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{3}{4} X_{n,i}(l_i) \left( \frac{m_i}{k_{n,i}} X'''_{n,i}(l_i) - \frac{m_{i+1}}{k_{n,i+1}} X'''_{n,i+1}(l_i) \right) - \frac{l_i}{2} (m_i X'_{n,i}(l_i) X'''_{n,i}(l_i) - \\ &- m_{i+1} X'_{n,i+1}(l_i) X'''_{n,i+1}(l_i)) + \frac{l_i}{4} (m_i X_{n,i}^2(l_i) - m_{i+1} X_{n,i+1}^2(l_i)) - \\ &- \frac{1}{4} \left( \frac{m_i}{k_{n,i}} X'_{n,i}(l_i) X''_{n,i}(l_i) - \frac{m_{i+1}}{k_{n,i+1}} X'_{n,i+1}(l_i) X''_{n,i+1}(l_i) \right) + \\ &+ \frac{l_i}{4} \left( m_i (X''_{n,i}(l_i))^2 - m_{i+1} (X''_{n,i+1}(l_i))^2 \right) + \frac{l m_p}{4} (X''_{n,p}(l_i))^2 + \sum_{i=1}^p M_i X_{n,i}^2(s_i). \end{aligned} \quad (15)$$

Если воспользоваться условиями сопряжения (14) и перейти к дифференцированию по  $x$ , то формула (15) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{E_i J_i l_i}{4 \omega_n^2} \left( 1 - \frac{E_i J_i}{E_{i+1} J_{i+1}} \right) \left( (X''_{n,i}(l_i))^2 - 2 X'_{n,i}(l_i) X'''_{n,i}(l_i) \right) + \\ &+ \frac{m_i l_i}{4} X_{n,i}^2(l_i) \left( 1 - \frac{m_{i+1}}{m_i} \right) + \frac{E_p J_p l}{4 \omega_n^2} (X''_{n,p}(l))^2 + \sum_{i=1}^p M_i X_{n,i}^2(s_i). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично определяется квадрат нормы собственных функций для других условий закрепления концов стержневой системы, например, для случая шарнирного опирания концов предпоследний член в выражении (16) необходимо заменить на  $-\frac{E_p J_p l}{2\omega_n^2} X'_{n,p}(l) X''_{n,p}(l)$ , для

свободного опирания концов – соответственно на  $\frac{1}{4} m_p l X_{n,p}^2(l)$ .

Для однородного стержня из формулы (16) получаем известное выражение для квадрата нормы собственных функций с весом  $\rho(x) = 1$  [1].

Аналогично можно рассмотреть соответствующие вопросы для продольных колебаний ступенчато-переменной стержневой системы при наличии сосредоточенных масс. Здесь уравнение продольных колебаний  $i$ -го участка имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},$$

где  $u(x, t)$  – продольные перемещения;  $a_i^2 = E_i F_i / m_i$ ,  $E_i F_i, m_i$ , – соответственно продольная жесткость и погонная масса системы.

Из условий сопряжения участков при  $x = l_i$  получаем соотношения для собственных функций:

$$\begin{aligned} X_{n,i}(l_i) &= X_{n,i+1}(l_i); \\ E_i F_i X'_{n,i}(l_i) &= E_{i+1} F_{i+1} X'_{n,i+1}(l_i). \end{aligned} \quad (17)$$

Свойство собственных функций для рассматриваемого случая имеет вид

$$\left( \omega_n^2 - \omega_m^2 \right) \int_0^l X_n X_m dx = \sum_{i=1}^{p-1} E_i F_i \left( \frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_{i+1}} \right) (X_{n,i}(l_i) X'_{m,i}(l_i) - X_{m,i}(l_i) X'_{n,i}(l_i)). \quad (18)$$

Из выражения (18) с учетом условий сопряжений (17) следует, что собственные функции, если учесть наличие сосредоточенных масс, также будут ортогональны с весом (12).

Для квадрата нормы получаем формулу

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{E_i F_i}{\omega_n^2} X'_{n,i}(l_i) \left( l_i X'_{n,i}(l_i) \left( 1 - \frac{m_i}{m_{i+1}} \right) - X_{n,i}(l_i) \left( 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \right) + \\ &+ m_i l_i X_{n,i}^2(l_i) \left( 1 - \frac{m_{i+1}}{m_i} \right) + \frac{E_p F_p l}{2\omega_n^2} \left( X'_{n,p}(l) \right)^2 + \sum_{i=1}^p M_i X_{n,i}^2(s_i). \end{aligned} \quad (19)$$

Формула (19) соответствует заделке концов стержневой системы. В случае свободного конца предпоследний член в (19) необходимо заменить на  $\frac{l}{2} X_{n,p}^2(l)$ .

Так как математическая модель для крутильных колебаний полностью совпадает с моделью для продольных колебаний, то для этого случая остаются справедливыми формулы (18) и (19) с заменой механических параметров на соответствующие при крутильных колебаниях.

Для изучения собственных колебаний рассмотренных систем, после того, как определены собственные функции, необходимо воспользоваться условиями сопряжений (3) (для продольных и крутильных колебаний (17)) и граничными условиями. В результате получим однородную систему линейных алгебраических уравнений с  $4p$  ( $2p$ ) неизвестными. Приравняв определитель такой системы к нулю, получаем уравнение для определения собственных частот колебаний, как, например, это сделано в работе [2].

При решении задач на вынужденные колебания можно пользоваться методом Фурье для собственных функций с весом (12), а применение формул (16) и (19) упрощает эту процедуру.

Полученные результаты можно использовать для приближенного метода в динамике стержневых систем переменного сечения, если форму продольного сечения стержня аппроксимировать ступенчатой фигурой. Однако здесь нужно рассмотреть вопрос о сходимости этого процесса.

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 449 с. 2. Улитин Г.М., Петтик Ю.В. Собственные колебания балки ступенчато-переменного сечения: Зб. наук. праць. Серія: Галузеве машинобудування, будівництво. – Полтава: ПолтНТУ, 2005. – Вип. 16. – С. 279–283. 3. Шевченко Ф.Л. Динаміка пружних стержневих систем. – Донецьк: ДонНТУ, 2000. – 293 с. 4. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 433 с.

УДК 531.36 : 62-752+62-755

Г.Б. ФІЛІМОНІХІН, А.В. КОВАЛЕНКО

Кіровоградський національний технічний університет

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ РОТОРА ДВОМАЯТНИКОВИМ АВТОБАЛАНСИРОМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРОГРАМИ SOLID WORKS І МОДУЛЯ MOTION

© Філімоніхін Г.Б., Коваленко А.В., 2006

*Використано підпрограму Solid Motion для моделювання динаміки зрівноважування ротора на симетричних в'язко-пружних опорах двомаятниковим автобалансиром. Визначено різні режими руху системи залежно від величин сил в'язкого опору, що діють на маятники.*

*Solid Motion subprogram for the design of dynamics of balancing of rotor on symmetric viscid-resilient supports is used by a two-pendulum autobalanser. Different modes of motion of the system depending on the sizes of forces of viscid resistance, operating on pendulums, are definite.*

**Вступ.** Пасивні автобалансири застосовуються для зрівноважування на ходу на закритичних швидкостях обертання роторів, чий дисбаланс змінюється під час експлуатації. Конструкція, принцип дії і динаміка пасивних автобалансирів досліджувалися в [1–3]. Однак через проведення досліджень в аналітичному вигляді в роботах не вдалося дослідити ряд задач, пов'язаних з дослідженням перехідних процесів системи, підбором величин параметрів системи, що забезпечують настання балансування за мінімальний проміжок часу тощо. У цій роботі розглянуто комп'ютерне моделювання й аналіз динаміки ротора, що зрівноважується на ходу двомаятниковим автобалансиром. При цьому досліджується вплив сил опору, що діють на маятники, на швидкість настання автобалансування. Для цього використовується програма Solid Works (SW) корпорації UGS (США) і її модуль – Motion. Зазначимо, що SW дає змогу моделювати динаміку зв'язаних абсолютно твердих тіл, у тому числі підйомних механізмів, твердих роторів з автобалансирами, штучних супутників Землі разом з демпферами для гасіння кута нутації тощо. Слід зазначити, що подібні задачі можуть бути розв'язані із використанням програм Matlab/Simulink, Adams, Pro/ENGINEER, UNIGRAPHICS, CATIA тощо. Але програма SW уможливорює в єдиному інтерфейсі користувача: проектувати об'єкт, що складається з безлічі деталей; досліджувати його динаміку в припущенні про абсолютну жорсткість окремих деталей; досліджувати міцність окремих деталей у припущенні про їх деформівність.