

УДК 528.51

П. НЕЄЖМАКОВ¹, Т. ПАНАСЕНКО¹, О. ПРОКОПОВ¹, А. ШЛОМА¹, І. ТРЕВОГО²¹ Національний науковий центр "Інститут метрології", вул. Мироносицька, 42, Харків, 61002, Україна, тел. +380577003409, e-mail: pavel.neyezhnikov@gmail.com² Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Героїв Майдану, 32, Львів, 79026, Україна, тел. +38050370602, e-mail: itrevoho@gmail.com

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЕРЕДНЬОІНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗНИКА ЗАЛОМЛЕННЯ ПОВІТРЯ У ВИСОКОТОЧНІЙ ВІДДАЛЕМЕТРІЇ

Мета. Метою цієї роботи є вдосконалення (підвищення точності) методів урахування впливу земної атмосфери на результати вимірювань великих довжин, що реалізуються за допомогою електромагнітних хвиль на навколосезних трасах. **Методика.** Розглядається вплив земної атмосфери на швидкість поширення електромагнітного сигналу. Цей вплив враховують, вводючи в результат вимірювань поправки на середньоінтегральний показник заломлення повітря вздовж траси, що вимірюється. Для аналізу відібрано методи визначення цієї поправки, основані на заміні точного інтеграла, що визначає її величину, наближеними квадратурними формулами. Вказані квадратурні формули дають змогу подати точний інтеграл від показника заломлення повітря у вигляді функції локальних значень показника заломлення на трасі, що вимірюється. Основну увагу приділено квадратурним формулам, які є основою для нещодавно запропонованого градієнтного методу (який ґрунтується, зокрема, на використанні формули інтегрування Ейлера–Маклорена або многочленів Ерміта). **Результати.** Показано, що в градієнтного методу визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря, який використовує інтерполяційні многочлени Ерміта, кращі точнісні можливості, ніж у градієнтного, основаного на формулах інтегрування Ейлера–Маклорена. **Наукова новизна та практичне значення.** Отримані результати дають змогу визначити найпридатніший для конкретних геодезичних застосувань метод визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря з урахуванням умов вимірювання: геометрії траси та типу підстильної поверхні, кількості точок для вимірювань локальних значень показника заломлення та місць їхнього розташування.

Ключові слова: градієнтний метод; середньоінтегральний показник заломлення повітря; земна атмосфера.

Вступ

Одним із найістотніших чинників, що обмежують точність віддалемірних вимірювань, здійснюваних за допомогою електромагнітних хвиль на навколосезних трасах, є вплив земної атмосфери на швидкість поширення електромагнітного сигналу [Андрусенко А. М., 1987], [Островский А. Л., 1990]. Цей вплив враховують, вводючи поправку на середньоінтегральний показник заломлення повітря $\bar{n}$, точне значення якого визначається формулою [Андрусенко А. М., 1987]:

$$\bar{n} = \frac{1}{L} \int_{\sigma} n(\sigma) d\sigma, \quad (1)$$

де $n(\sigma)$ – залежність показника заломлення повітря n від променевої координати σ , відлічуваної уздовж траєкторії поширення сигналу; L – довжина траси (траєкторії).

Для вимірювань, здійснюваних в оптичному діапазоні на трасах порівняно невеликої довжини (до декількох кілометрів), у наземній геодезії широко застосовують методи визначення $\bar{n}$, основані на заміні точного інтеграла (1) наближеними квад-

ратурними формулами [Андрусенко А. М., 1987], [Островский А. Л., 1990] [Андрусенко А. М., 1991]. Враховуючи велику різноманітність таких формул, а також безперервне зростання вимог до точності методів врахування впливу атмосфери у віддалеметрії, викликає зацікавлення порівняльний аналіз точнісних можливостей найбільш перспективних і обговорюваних нині методів. Це питання розглянуто у статті.

Постановка проблеми

Відомі формули для визначення $\bar{n}$, отримані на основі переходу від точного інтеграла (1) до квадратури згідно з правилом трапеції (справедливим для рівномірного розміщення уздовж вимірюваної траси точок, в яких визначаються локальні значення показника заломлення повітря $\bar{n}$) [Андрусенко А. М., 1991]. Обговорюються також співвідношення для $\bar{n}$ так званого градієнтного методу [Бражниченко А. В., 1990], [Кравченко М., 1998], [Neyezhnikov P., 2018], [Неєжмаков П., 2018], [Неєжмаков П., 2018], одержані з використанням формул інтегрування Ейлера–Маклорена (для рівномірного розміщення точок

вимірювання показника заломлення уздовж траси) або многочленів Ерміта (для нерівномірного розміщення вказаних точок).

Обидва варіанти градієнтного методу містять у квадратурних формулах, що відповідають їм, додатковий (порівняно з методом трапеції) доданок, що є функцією градієнтів показника заломлення повітря і кутів надходження сигналу в кінцевих точках траси. У зв'язку з цим вони характеризуються вищими точнісними можливостями, ніж метод трапецій. Цей висновок впливає із порівняння залишкових членів, які відкидають у квадратурних формулах: для вказаних вище двох варіантів градієнтного методу відкинуті залишкові члени (що характеризують методичну складову невизначеності вимірювань) виявляються значно меншими від залишкового члена, що відкидається у методі трапецій (за однакової кількості проміжних точок траси, в яких вимірюють локальні значення показника заломлення повітря) [Neyezhnikov P., 2018], [Неежмаков П., 2018].

Водночас варіант градієнтного методу, що ґрунтується на використанні формул інтегрування Ейлера–Маклорена, характеризується більшим значенням залишкового члена порівняно з варіантом, який використовує інтерполяційний многочлен Ерміта [Неежмаков П., 2018]. Для вибору найприйнятнішого варіанта передусім необхідно відповісти на питання: чим це може пояснюватись.

Мета

Мета дослідження – виконати порівняльний аналіз точнісних можливостей відомих варіантів градієнтного методу визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря, необхідного для корекції за вплив атмосфери результатів високоточних віддалених вимірювань.

Виклад основного матеріалу

Як робочу гіпотезу для подальшого аналізу приймемо таке міркування: точніший метод повинен використати більший обсяг інформації про зміну показника заломлення повітря на внутрішніх ділянках траси порівняно з обсягом інформації, що стосується показника заломлення на кінцевих точках траси.

Для перевірки цієї гіпотези розглянемо, чим відрізняються відносні внески результатів вимірювань

локальних значень показника заломлення повітря у проміжних точках траси в підсумкове (що враховує внесок кінцевих точок) середньоінтегральне значення $\bar{n}$ для двох варіантів градієнтного методу, розглянутих вище.

Розглянемо такі три випадки:

– випадок 1, коли вимірювання виконують тільки в двох кінцевих точках траси;

– випадок 2, коли враховують дві кінцеві й одну проміжну точку траси;

– випадок 3, коли розглядають дві кінцеві та дві проміжні точки.

Для градієнтного методу, що використовує інтегральне представлення Ейлера–Маклорена, формулу (1) згідно із загальним відношенням, наведеним у [Бражниченко А. В., 1990], [Neyezhnikov P., 2018], [Неежмаков П., 2018], можна подати у вигляді:

– у випадку 1

$$\bar{n} = \frac{1}{2} [n_0 + n_L] - \frac{L}{12} \cdot [n'_L - n'_0] + R_{1EM} \quad (2)$$

– у випадку 2

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \left[\frac{n_0 + n_L}{2} + n(x_1) \right] - \frac{L}{48} \cdot [n'_L - n'_0] + R_{2EM} \quad (3)$$

– у випадку 3

$$\bar{n} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{n_0 + n_L}{2} + n(x_1) + n(x_2) \right] - \frac{L}{108} \cdot [n'_L - n'_0] + R_{3EM}, \quad (4)$$

де n_0, n_L – значення показника заломлення повітря в кінцевих точках траси ($n(x_1), n(x_2)$ – значення його в проміжних точках, відповідних $x_1 = \frac{L}{2}$ у випадку 2,

коли визначається тільки $n(x_1)$ і $x_1 = \frac{L}{3}, x_2 = \frac{2L}{3}$ у

випадку 3, коли визначають $n(x_1), n(x_2)$); співвідношення для залишкових членів $R_{1EM}, R_{2EM}, R_{3EM}$ визначаються формулами, наведеними в [Бражниченко А. В., 1990], [Neyezhnikov P., 2018], [Неежмаков П., 2018].

Числові значення вагових коефіцієнтів, що характеризують відносний внесок локальних значень n у дискретних точках для поданих вище формул, наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Сумарні значення вагових коефіцієнтів для градієнтного методу, що ґрунтується на формулах інтегрування Ейлера–Маклорена (за рівномірного розбиття інтервалу інтегрування)

№ з/п	N – розбиття інтервалів	Сума вагових коефіцієнтів для кінцевих точок траси (для n_0, n_L)	Сума вагових коефіцієнтів для середніх точок траси (для n_1, n_2)
1	$N=1$	1	0
2	$N=2$	0,5	0,5
3	$N=3$	0,333	0,666

З табл. 1 випливає, що сумарний внесок внутрішніх точок, починаючи з $N=3$, стає більшим від сумарного внеску кінцевих точок.

Для випадку довільного розбиття інтервалу інтеграції скористаємося квадратурною формулою, отриманою з використанням інтерполяційного многочлена Ерміта. На основі формул зі статті [Неєжмаков П., 2018] можна одержати співвідношення, що описують середньоінтегральний показник заломлення повітря і містять його значення у точках, які можуть бути розташовані довільно (нерівномірно) на інтервалі інтеграції $[0, L]$:

– у випадку 1

$$\bar{n} = \frac{1}{L} \cdot [A_{00} \cdot n_0 + A_{10} \cdot n_L] + \frac{1}{L} \cdot [A_{01} \cdot n'_0 + A_{11} \cdot n'_L] + R_{1E}; \quad (5)$$

– у випадку 2

$$\bar{n} = \frac{A_1}{L} \cdot n(x_1) + \frac{1}{L} [A_{00} \cdot n_0 + A_{20} \cdot n_L] + \frac{1}{L} [A_{01} \cdot n'_0 + A_{21} \cdot n'_L] + \frac{R_{2E}}{L}; \quad (6)$$

– у випадку 3

$$\bar{n} = \frac{1}{L} [A_1 \cdot n(x_1) + A_2 \cdot n(x_2)] + [A_{00} \cdot n_0 + A_{30} \cdot n_L] + \frac{1}{L} [A_{01} \cdot n'_0 + A_{31} \cdot n'_L] + R_{3E}; \quad (7)$$

де x_1, x_2 – координати точок, в яких визначають значення n_1 і n_2 ; $A_1, A_2, A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20}, A_{21}, A_{30}, A_{31}$ – вагові коефіцієнти.

Вагові коефіцієнти обчислюють за такими формулами для вищенаведених випадків:

– у випадку 1:

$$A_{00} = \frac{L}{2}; \quad A_{01} = \frac{L^2}{12};$$

$$A_{10} = \frac{L}{2}; \quad A_{11} = -\frac{L^2}{12};$$

– у випадку 2:

$$A_1 = \frac{L^5}{30x^2 \cdot (x-L)^2}; \quad A_{21} = \frac{5xL^2 - 3L}{60(L-x)};$$

$$A_{20} = \frac{24L^3 - 56L^2x + 30L \cdot x^2}{60(L-x)^2};$$

$$A_{01} = \frac{-2L^3 + 5xL^2}{60x}; \quad A_{00} = \frac{-2L^2 \cdot x + 15Lx^2 - L^3}{30x^2};$$

– у випадку 3:

$$A_1 = \frac{L^5 \cdot (L - 2x_2)}{60 \cdot x_1^2 \cdot (x_1 - x_2)(x_1 - L)^2};$$

$$A_2 = \frac{L^5 \cdot (L - 2x_1)}{60 \cdot x_2^2 \cdot (x_2 - x_1)(x_2 - L)^2};$$

$$A_{01} = \frac{L^2(L^2 - 2L(x_1 + x_2) + 5x_1x_2)}{60x_1x_2};$$

$$A_{31} = \frac{L^2(-2L^2 + 3L(x_1 + x_2) - 5x_1x_2)}{60(L - x_1)(L - x_2)};$$

$$A_{00} = \frac{L}{60 \cdot x_1^2 x_2^2} \left[30 \cdot x_1^2 x_2^2 - 2L^2(x_1^2 + x_2^2) + L(x_1 + x_2) \cdot (L^2 - 4x_1x_2) \right];$$

$$A_{30} = \frac{L(20L^4 - 45L^3(x_1 + x_2) + 56L^2x_1x_2)}{60(L - x_1)^2(L - x_2)^2} + \frac{24L^2(x_1 + x_2)^2 - 56Lx_1x_2(x_1 + x_2) + 30x_1^2x_2^2}{60(L - x_1)^2(L - x_2)^2};$$

формули для залишкових членів R_{1E}, R_{2E}, R_{3E} випливають із загальних співвідношень статті [Неєжмаков П., 2018]; інші позначення збігаються із наведеними для формул (2)–(4).

Квадратурні формули, отримані на основі розкладання Ейлера–Маклорена й інтерполяційного многочлена Ерміта, збігаються для випадку 1, коли $N=1$, тобто коли для визначення середньоінтегрального показника заломлення використовують значення показника заломлення лише в кінцевих точках. За наявності проміжних точок ($N=2, 3$) ці формули вже відрізняються.

Для практичної оцінки відносного внеску окремих доданків наведемо формули (5)–(7) до умов, у яких отримано формули (2)–(4). Для цього візьмемо $x_1 = \frac{L}{2}$

для формули (6) і $x_1 = \frac{L}{3}; x_2 = \frac{2L}{3}$ для формули (7).

У результаті отримуємо у випадку 1:

$$\bar{n} = \frac{1}{2} [n_0 + n_L] - \frac{L}{12} [n'_L - n'_0] + R_{1E} \quad (8)$$

– у випадку 2:

$$\bar{n} = \frac{7}{30} [n_0 + n_L] + \frac{16}{30} \cdot n(x_1) + \frac{L}{60} \cdot [n'_0 - n'_L] + R_{2E} \quad (9)$$

– у випадку 3:

$$\bar{n} = \left[\frac{13}{80} \cdot (n_0 + n_L) + \frac{27}{80} \cdot (n(x_1) + n(x_2)) \right] + \frac{L}{120} [n'_0 - n'_L] + R_{3E}. \quad (10)$$

Результати розрахунків значень вагових коефіцієнтів для градієнтного методу, відношення якого отримано з використанням інтерполяційних многочленів Ерміта, наведено в табл. 2.

Таблиця 2

**Сумарні значення вагових коефіцієнтів для градієнтного методу,
що використовує многочлени Ерміта, за рівномірного розбиття інтервалу інтегрування**

№ з/п	N – розбиття інтервалів	Сума вагових коефіцієнтів для кінцевих точок траси (для n_0, n_L)	Сума вагових коефіцієнтів для середніх точок траси (для n_1, n_2)
1	$N=1$	1	0
2	$N=2$	0,466	0,533
3	$N=3$	0,325	0,675

Порівнюючи дані табл. 1, 2, необхідно враховувати, що зі зростанням кількості точок, в яких вимірюють локальні значення показника заломлення повітря n , внесок залишкових членів і градієнтних доданків у величину $\bar{n}$ зменшується. Тобто зростає внесок точок, в яких вимірюються вищезгадані локальні значення n для усіх розглянутих методів. Одночасно зменшується сума вагових коефіцієнтів для n_0 і n_L (тобто для значень показника заломлення у кінцевих точках) і збільшується сума вагових коефіцієнтів для проміжних точок n_1, n_2 . До того ж перевищення сумарного внеску вагових коефіцієнтів, що досягається для проміжних точок, щодо сумарного внеску вагових коефіцієнтів для кінцевих точок у разі квадратурної формули, отриманої за допомогою многочленів Ерміта, виявляється більшим, ніж для квадратури Ейлера–Маклорена. Це означає, що формули, справедливі для довільного (зокрема нерівномірного) розбиття інтервалу інтегрування, навіть у разі їх використання за рівномірного розбиття, потенційно точніше враховують інформацію про зміну показника заломлення всередині інтервалу інтегрування, тобто фактично дають можливість визначити $\bar{n}$ із меншою невизначеністю.

Висновки

Отже, результати виконаних досліджень дають підстави зробити висновок про те, що використання многочленів Ерміта переносить центр тяжіння інформативних даних у внутрішні області аналізованої траси, зі зменшенням відносного внеску кінцевих точок. Ця обставина свідчить про доцільність практичного використання саме квадратурних формул, отриманих для нерівномірного розбиття траси точками, в яких визначають локальні значення показника заломлення повітря. Для трас із неоднорідною підстильною поверхнею і значними змінами показника заломлення уздовж траси в цьому випадку можна розміщувати точки, в яких вимірюють локальні значення показника заломлення повітря, в тих місцях, де ці зміни найсуттєвіші.

Проте ухвалення остаточного рішення вимагає урахування умов вимірювань (геометрії траси і типу підстильної поверхні, кількості точок для вимірювання локальних значень показника заломлення

тощо). Тому потрібні додаткові дослідження, зокрема, числовий експеримент, який дасть змогу зіставити результати визначення $\bar{n}$ градієнтним методом у разі довільного розміщення точок вимірювання на трасі з точним значенням $\bar{n}$, отримуваним згідно з формулою (1) для експериментальних або модельних профілів $n(\sigma)$. Такий експеримент повинен бути предметом окремого самостійного дослідження.

Література

- Андрусенко А. М., Данильченко В. П., Прокопов А. В., Пономарев В. И., Лукин И. В. (1987). Методы и средства прецизионной лазерной дальнометрии. Москва: Издательство стандартов, 224 с.
- Андрусенко А. М., Прокопов А. В., Ремаев Е. В. (1991). Методика оценки погрешности определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха на поверочной установке высшей точности УВТ5-84. Метрология в лазерной дальнометрии: сб. науч. тр. Харьков: НПО “Метрология”, С. 34–42.
- Бражниченко А. В., Прокопов А. В., Ремаев Е. В. (1990). Новые методы учета влияния земной атмосферы на точность дальномерных измерений. *Измерительная техника*. – №10. – С. 15–17.
- Кравченко М., Неежмаков П., Прокопов О. (1998). Лазерна віддалемірна система вищої точності для лінійних вимірювань на геодинамічних полігонах України. *Геодинаміка*, Вип. 1, С. 37–44.
- Неежмаков П., Прокопов А., Тревого И. (2018). К теории градиентного метода определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха при дальномерных измерениях на приземных трассах. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, Вип. II (36), С. 28–31.
- Неежмаков П., Прокопов О. (2018). Аналіз точності градієнтного методу визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря. *Український метрологічний журнал*, № 4, С. 43–48. DOI: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.4.2018.155754>
- Островский А. Л., Джуман Б. М., Заблочкий Ф. Д., Кравцов Н. И. (1990). Учет атмосферных влияний на астрономо-геодезические измерения. Москва: Недра, 235 с.

- Neyezhnikov P., Prokopov A., Skliarov V. (2018). On the accounting for the influence of the Earth's atmosphere on the results of distance measurement realized by lasers. *Journal of Physics: Conf. Series* 1065(2018) 142008. DOI: 10.1088/1742-6596/1065/14/142008

P. NEYEZHNIKOV¹, T. PANASENKO¹, O. PROKOPOV¹, A. SHLOMA¹, I. TREVOHO²

¹ National Scientific Center "Institute of Metrology", 42, Mironositskaya str., Kharkiv, 61002, Ukraine, tel. +380577003409, E-mail: pavel.neyezhnikov@gmail.com

² Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy, 32, Heroes of the Maidan str., Lviv, 79026, Ukraine, tel. 38050370602, e-mail: itrevoho@gmail.com

COMPARATIVE ANALYSIS OF QUADRATURE FORMULAS FOR THE MEAN INTEGRAL REFRACTIVE INDEX OF AIR IN HIGH-PRECISION RANGING

Aim. The purpose of this work is to improve (improve accuracy) methods of taking into account the influence of the Earth's atmosphere on the results of measurements of large lengths carried out by electromagnetic waves on the near-earth tracks. **Method.** The influence of the earth's atmosphere on the speed of propagation of the electromagnetic signal is considered. This effect is taken into account by introducing the correction of the mean refractive index of the air along the measured track in result of the measurements. Methods for determining this correction are selected for analysis, based on the replacement of the exact integral, which determines its value, by approximate quadrature formulas. These quadrature formulas allow us to represent the exact integral for the mean integral refractive index of air as a function of the local values of the refractive index on the track being measured. The focus is on the quadrature formulas that underlie the recently proposed gradient method (based in particular on the use of the Euler–Maclaurin integration formula or the Hermite polynomials). **Results.** It is shown that the gradient method of determining the mean integral refractive index of air, which uses the Hermite interpolation polynomials, has the better precision capabilities, than the gradient method based on the Euler–Maclaurin integration formulas. **Scientific novelty and practical importance.** The obtained results make it possible to determine the most appropriate method for determining the mean integral refractive index of air in geodetic applications taking into account the measurement conditions: track geometry and the type of underlying surface, the number of points to measure the local values of the refractive index and their locations.

Key words: gradient method; mean integral refractive index of air; earth's atmosphere.

References

- Andrusenko A. M., Danilchenko V. P., Prokopov A. V., Ponomarev V. I., Lukin I. V. (1987). *Methods and means of precision laser distance measurement*. Moscow: Publishing Standarts, 224 p. (in Russian).
- Andrusenko A. M., Prokopov A. V., Remyayev E. V. (1991). Method of estimation of error of determination of the mean integral index of refraction of the air on the verification installation of the highest accuracy UVT5-84. *Metrology in Laser Rangefinder: Sat. scientific tr.* Kharkiv: Metrology NGO, pp. 34–42.
- Brazhnikchenko A. V., Prokopov A. V., Remyayev E. V. (1990). New methods for taking into account the influence of the Earth's atmosphere on the accuracy of long-range measurements. *Measuring equipment*, No. 10, pp. 15–17.
- Kravchenko M., Neyezhnikov P., and Prokopov O. (1998). A laser rangefinder of higher accuracy for linear measurements on geodynamic polygons of Ukraine. *Geodynamics*, Vol. 1, pp. 37–44.
- Neyezhnikov P., Prokopov A., Skliarov V. (2018). On the accounting for the influence of the Earth's atmosphere on the results of distance measurement realized by lasers. *Journal of Physics: Conf. Series* 1065, 142008. DOI: 10.1088/1742-6596/1065/14/142008.
- Neyezhnikov P., Prokopov A., and Trevogo I. (2018). Toward a theory of the gradient method for determining the mean-integral index of air refraction in long-range measurements on surface routes. *Modern achievements of geodetic science and production*, Vol. II (36), pp. 28–31.
- Neyezhnikov P., Prokopov O. (2018). Analysis of the accuracy of the gradient method for determining the mean integral refractive index of air. *Ukrainian Metrological Journal*, No. 4, pp. 43–48. DOI: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.4.2018.155754>.
- Ostrovsky A. L., Dzhuman B. M., Zablotsky F. D., Kravtsov N. I. (1990). *The accounting for atmospheric effects in astronomical and geodetic measurement*. Moscow: Nedra, 235 p. (in Russian).