

Scheller, Frieder; Schubert, Florian: *Biosensors*. Elsevier, Amsterdam, London, New York (1992). 9. Tabib-Azar, Massood: *Integrated Optics, Microstructures, and Sensors*. Kluwer, Boston, Dordrecht, London (1995). 10. Gutierrez Monreal, J., and C M. Man, "The Use of Polymer Materials as Sensitive Elements in Physical and Chemical Sensors", *Sensors and Actuators*, Vol. 12, 1987. 11. R. Jacob Baker, Harry W. li, Daxid Bouce. *CMOS: Circuit Design, layout and Simulation*. Jonh Wiley and Sons publishers. 1988, 902 p. 12. <http://www.mosis.org/Technical/Designsuport/pad-liblaryt-semos.html>. 13. Федорков Б.Г., Телец В.А, *Микросхеми ЦАП и АЦП: функціонування, параметри, застосування*. – М., 1990. 14. Марцінкявичус А.К. и др. *Быстродействующие интегральные микросхеми ЦАП и АЦП и измерение их параметров*. – М., 1988. 15. R. Jacob Baker, Harry W. li, Daxid Bouce. *CMOS: Circuit Design, layout and Simulation*. Jonh Wiley and Sons publishers, 1988. 16. <http://www.mosis.org/Technical/Designsuport/pad-liblaryt-semos.html>. 17. Петренко А.И. *Основы автоматизации проектирования*. – К., 1982. 18. Коваль В.О., Лобур М.В. *Автоматизация технологического моделирования полупроводниковых ИС: Учеб. пособ.* – Львов, 1987. 19. STEP Tool Inc. *The STEP Programmer's Toolkit*. Park, Troy, New York. – 1995. 20. Zhu Guowang. *A survey of feature technology*. *China Mechanical Engineering*. – 1995. – 6(2): 7–10. 21. Bert Lauwers, Jean-Pierre Kruth. *Computer-aided process planning for EDM operations*. *Journal of Manufacturing Systems*. – 1994. – 13 (5): 313–322. 22. Amy J C, Lai C S. *A data representation scheme for sheet metal parts: expressing manufacturing features and tolerance requirements*. *Journal of Manufacturing Systems* – 1995. – 14(6): 393–405. 23. Michael A, Polini Pete, Lazo L. *A STEP-based, Product Model-Robotic Workcell Interface*. AUTOFACT, Detroit, Michigan. – 1996. 552–567. 24. Sohlenius G. *Concurrent engineering*. *Annals of the CIRP*. – 1992. – 41(2): 645–655. 25. Herman Allen, Lawley Mark, Mattox David, et al. *An opportunistic approach to process planning within a concurrent engineering environment*. *Annals of the CIRP*. – 1993. – 42(1): 545–548.

УДК. 519.242

М.П. Дивак, А.В. Пукас, М.Я. Шпінталь

Тернопільська академія народного господарства,
кафедра комп'ютерних наук

ПОСЛІДОВНЕ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

© Дивак М.П., Пукас А.В., Шпінталь М.Я., 2005

Наведено метод побудови оптимальних послідовних планів експерименту для створення інтервальних моделей прийняття рішень, який реалізується у два етапи: проведення насиченого експерименту та планування кожного наступного спостереження за критерієм мінімізації множини нерозпізнаних рішень.

The method of design of sequential experiments for creation decision support interval models is presented in this article. Design procedure is realized in two stages: conducting of the saturated experiment by the criterion of minimization of the domain of unrecognized decisions and design of every next observation.

Постановка проблеми

Математичні моделі прийняття рішень відносяться до особливого класу математичних моделей, які характеризуються сукупністю критеріїв ефективності, наявністю обмежень, властивостями функцій та властивостями області допустимих рішень. Залежно від вказаних характеристик та способів їх побудови виділяють два класи моделей прийняття рішень – детерміновані та за невизначеностями.

Моделі прийняття рішень, які будуються за умов невизначеності, часто отримують в результаті опрацювання експериментальних даних.

Сьогодні для побудови моделей цього класу використовують два підходи – стохастичний та теоретико-множинний – інтервальний [1].

У межах стохастичного підходу критеріями ефективності є стохастичні (регресійні) залежності, знайдені із застосуванням методу найменших квадратів чи методу максимальної вірогідності. Подібним способом формуються і критерії обмежень [1; 2]. У межах цього підходу найчастіше використовують такі критерії ефективності: М-критерій – мінімізація умовного сподіваного середнього значення; MD-критерій – мінімізація суми умовного сподіваного середнього значення та урівноваженої умовної дисперсії; Р-критерій – максимізація ймовірності виконання обмежень; К-критерій – мінімізація ймовірності перевищення заданого рівня вихідною величиною; KD-критерій – мінімізація ймовірності перевищення заданого рівня квадратом відхилення вихідної величини від її сподіваного значення [2].

Серед обмежень стохастичних моделей прийняття рішень є такі: обмеження в середньому – виконання обмежень в середньому та ймовірнісні обмеження – виконання обмежень із заданою ймовірністю.

За умов обмежених похибок з невідомими законами розподілу для побудови моделей прийняття рішень використовують теоретико-множинний – інтервальний підхід. Найчастіше у моделях прийняття рішень, побудованих на інтервальному підході, використовують такі критерії оптимальності: максимінний – максимізація мінімального значення функції, мінімінний – мінімізація найменшого значення функції, “середній” – між двома попередніми, множинний – вектор однорідних критеріїв.

Моделі подання критеріїв ефективності та обмежень у вигляді функціональних коридорів, для яких задані верхня і нижня межі, називаються інтервальними моделями [2].

Математичні моделі прийняття рішень, побудовані на основі інтервальних моделей критеріїв ефективності та обмежень, призводять до отримання множин нерозпізнаних рішень, тобто рішень, серед яких неможливо вибрати єдине через невизначеність моделі.

Переважаю для побудови вказаних моделей використовують результати пасивного експерименту, коли відома їх вибірка, яка відображає зв'язок між значеннями функції ефективності чи обмежень та керуючими змінними – розв'язками задачі прийняття рішень. На практиці доволі частою є можливість уточнення моделі прийняття рішень і, відповідно, конкретизації множини розв'язків шляхом отримання інформації на основі нових експериментальних даних. Для організації процедур отримання експериментальних даних, які б зменшували невизначеність в моделях прийняття рішень, необхідно застосовувати методи напрямленого отримання експериментальних даних, що ґрунтуються на теорії оптимального планування експерименту [3].

Процедура побудови інтервальних моделей прийняття рішень зводиться до отримання початкової моделі прийняття рішень на основі експериментальних даних за класичними критеріями, наприклад, за критеріями, що мінімізують максимальну ширину коридору моделей, з подальшим уточненням моделі у напрямку зменшення множин нерозпізнаних рішень. Такий спосіб можливо реалізувати шляхом послідовного покрокового планування та реалізації експерименту. Однак у цьому випадку виникає проблема побудови критеріїв оптимальності та розробки методів послідовного планування, яка для задач побудови інтервальних моделей прийняття рішень є абсолютно новою.

Особливість одного класу інтервальних моделей прийняття рішень

Розглянемо одну із математичних моделей прийняття рішень, побудовану на інтервальній моделі критерію ефективності, яка широко використовується в системах контролю допустимих значень характеристик технічних, економічних, екологічних та інших систем. Зокрема, подібні моделі застосовують в системах екологічного моніторингу для задач прийняття рішень щодо наявності перевищень допустимих (порогових) рівнів шкідливих викидів хімічних чи радіоактивних речовин. Доволі часто використання даних експерименту є єдиним способом побудови таких моделей. У цьому випадку для прийняття рішень важливою є точність моделі, яка істотно залежить від похибок експерименту. Можливі варіанти під час прийняття рішень в системах даного класу із урахуванням точності моделі (рис. 1).

Однозначні рішення можна прийняти у випадках а) та б), коли коридори інтервальних моделей ефективності $[\hat{y}(\bar{x})] = [\hat{y}^-(\bar{x}); \hat{y}^+(\bar{x})]$, ширина яких задає точність моделі, знаходяться вище або нижче від рівня порога. Отже, у цих випадках точність моделі на усій області експерименту є задовільною.

У випадку в) та г) рівень порога знаходиться в коридорі прогнозування інтервальних моделей $[\hat{y}(\bar{x})]$ на усій області експерименту (рис. 1, в) або на окремих ділянках (області $[0; x_1]$ та $[x_2; \infty]$ – рис. 1, г). Тоді ситуація прийняття рішень ускладнюється через низьку точність інтервальних моделей.

Отже, для випадків в) та г) з метою зменшення множини нерозпізнаних рішень з точки зору невизначеності у моделі прийняття рішень необхідно провести її уточнення шляхом проведення додаткового експерименту.

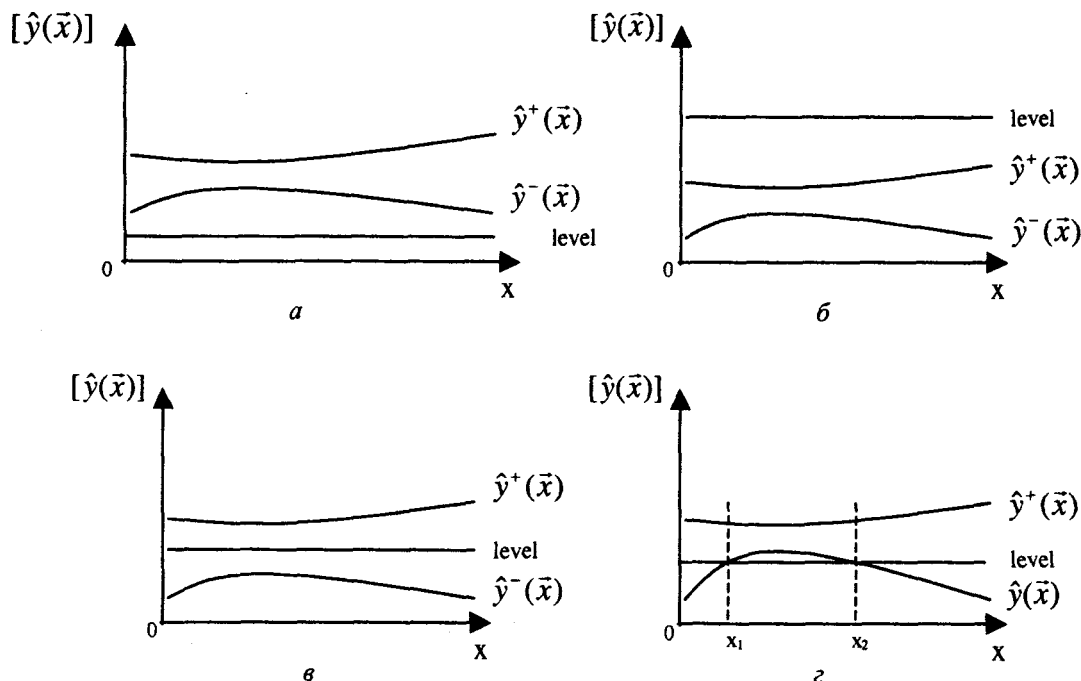


Рис. 1. Зіставлення коридора інтервальних моделей з рівнем порога

Послідовне планування експерименту для уточнення моделі прийняття рішень

Нехай модель прийняття рішень побудована на основі даних експерименту в інтервальному вигляді

$$\bar{x}_i, [y_i^-; y_i^+], y_0(\bar{x}_i) \in [y_i^-; y_i^+], i = 1, \dots, N \quad (1)$$

для функції ефективності

$$y_0(\bar{x}) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{\beta}, \quad (2)$$

де y_i^-, y_i^+ – відповідно нижня і верхня межі інтервалу значень функції ефективності для заданих значень вектора рішень $\bar{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T$ на допустимій множині χ ; $y_0(\bar{x}_i)$ – істинне невідоме значення критерію ефективності; $\bar{\varphi}^T(\bar{x})$ – відомий вектор базисних функцій; $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ – невідомий вектор коефіцієнтів функції ефективності. Припустимо, що інтервальна похибка у кожному спостереженні є незмінною на усій множині допустимих рішень χ , тобто $\Delta(\bar{x}_i) = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-) = \Delta, \forall i = 1, \dots, N, \bar{x}_i \in \chi$.

За цих умов у разі опрацювання результатів спостережень отримаємо інтервальні моделі ефективності

$$\hat{y}(\bar{x}) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}, \quad \bar{b} \in \Omega, \quad (3)$$

вектори оцінок $\bar{b}$ коефіцієнтів $\bar{\beta}$ у яких належать множині

$$\Omega = \left\{ \bar{b} \in \mathbb{R}^m \mid \bar{Y}^- \leq F \cdot \bar{b} \leq \bar{Y}^+ \right\},$$

де $\bar{Y}^- = \{y_i^-, i=1, \dots, N\}$, $\bar{Y}^+ = \{y_i^+, i=1, \dots, N\}$ – вектори, складені із нижніх та верхніх меж інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$ відповідно; $F = \{\varphi_j(\bar{x}_i), i=1, N, j=1, m\}$ – відома матриця значень базисних функцій.

Отримана множина інтервальних моделей ефективності (3) матиме вигляд коридора

$$[\hat{y}(\bar{x})] = [\hat{y}^-(\bar{x}), \hat{y}^+(\bar{x})], \quad (4)$$

де $\hat{y}^-(\bar{x}) = \min_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b})$ та $\hat{y}^+(\bar{x}) = \max_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b})$ – нижня та верхня межі коридора.

Точність кожної із моделей визначається похибкою прогнозування

$$\Delta \hat{y}(\bar{x}, F) = \hat{y}^+(\bar{x}) - \hat{y}^-(\bar{x}), \quad (5)$$

що залежить від розмірів множини Ω , тобто від вибору матриці F .

Точність інтервальної моделі ефективності безпосередньо впливає на точність моделі прийняття рішень, яка задаватиметься потужністю множини нерозпізнаних рішень. Знайдемо кількісну оцінку цієї точності.

Як бачимо із рис. 1, в та з для випадку $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n=1}$, потужність множин нерозпізнаних рішень можна кількісно оцінити довжинами відповідних відрізків. За аналогією для загального випадку $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ розмір областей нерозпізнаних рішень оцінюватимемо наближеним значенням їх об'єму V , обчисленого як сума одиничних об'ємів n -вимірних прямокутних паралелепіпедів, отриманих апроксимацією області нерозпізнаних рішень. Вказаний спосіб апроксимації показано на рис. 2 для випадку $n=2$.

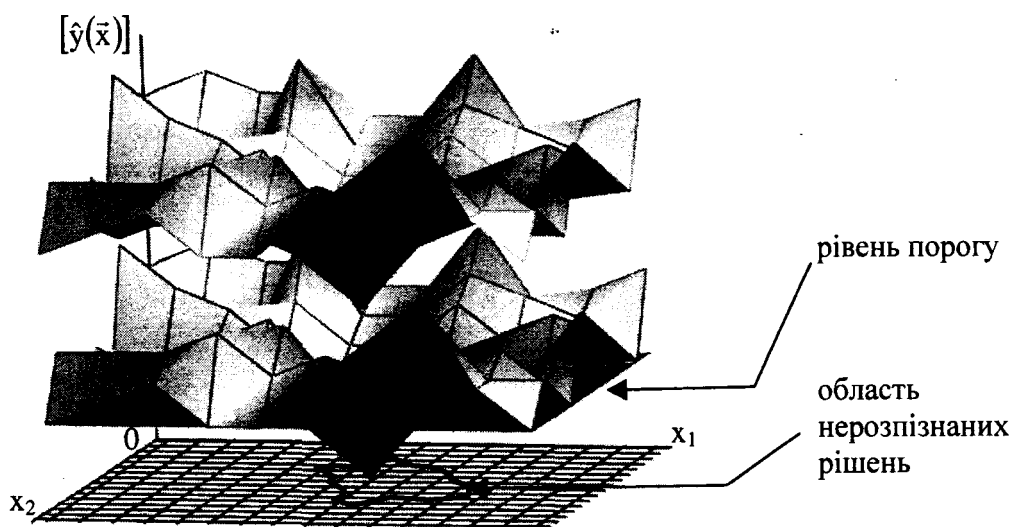


Рис. 2. Ілюстрація способу апроксимації області нерозпізнаності

Зауважимо, що області нерозпізнаних рішень не обов'язково мають бути зв'язаними. Надалі, не порушуючи загальності, припускатиемо наявність однієї області нерозпізнаності.

Очевидно, що для визначення точності моделі прийняття рішень спочатку необхідно провести експеримент як мінімум із $N=m$ спостережень, коли $\det(F) \neq 0$. За цих умов виникає задача вибору $N=m$ спостережень у такий спосіб, щоб мінімізувати область нерозпізнаності моделі прийняття рішень, тобто задача планування насиченого експерименту. Враховуючи, що властивості

інтервальних моделей (3) визначаються матрицею F [4], формально задачу планування насиченого експерименту можна записати у такому вигляді:

$$V(F_m) \xrightarrow{F_m} \min, \quad (6)$$

де $F_m = \{\varphi_j(\bar{x}_i), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}\}$ – квадратна матриця значень базисних функцій, яка задаватиме план насиченого експерименту.

Якщо ж точність побудованої на основі насиченого експерименту моделі прийняття рішень виявиться незадовільною, то необхідно побудувати та реалізувати послідовний план експерименту, який на кожному $k+1$ кроці передбачає планування та реалізацію одного спостереження. Послідовний план можна побудувати на основі розв’язку такої задачі:

$$V(F, \bar{x}_{k+1}) \xrightarrow{\bar{x}_{k+1} \in \chi} \min, \quad (7)$$

де

$$F = \begin{pmatrix} F_m \\ \bar{\varphi}^T(\bar{x}_{m+1}) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}^T(\bar{x}_k) \end{pmatrix}.$$

Аналіз задач (6) та (7) показав їх надзвичайно високу обчислювальну складність, яка передусім обумовлена неможливістю задання в аналітичному вигляді зв’язку між об’ємом V області нерозпізнаності та матрицями планів експерименту F_m та F . За цих умов прийнятнішим варіантом є знаходження не точних розв’язків цих задач, а деяких їх наближень.

Як бачимо із виразів

$$\hat{y}^-(\bar{x}) = \min_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}), \quad \hat{y}^+(\bar{x}) = \max_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}), \quad \Omega = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^m \mid \bar{Y}^- \leq F \cdot \bar{b} \leq \bar{Y}^+\}$$

та рис. 2, залежність між матрицями плану F_m чи F та об’ємом області нерозпізнаності задачі прийняття рішень відслідковується за посередництвом форми та ширини коридора інтервальних моделей $[\hat{y}(\bar{x})] = [\hat{y}^-(\bar{x}), \hat{y}^+(\bar{x})]$ і, зокрема, кускової функції похибки прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F)} = \hat{y}^+(\bar{x}) - \hat{y}^-(\bar{x})$ інтервальної моделі ефективності [5]. Цей факт також призводить до істотного підвищення обчислювальної складності задач (6), (7). З метою забезпечення неперервності функції похибки прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m)}$ для насиченого експерименту використаємо наближення коридора інтервальних моделей (4), наведене у [4]

$$[\hat{y}^-(\bar{x}), \hat{y}^+(\bar{x})]_{\bar{b} \in Q_m} = \left[\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} - \frac{1}{2} \Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}; \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} + \frac{1}{2} \Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \right], \quad (8)$$

з функцією похибки прогнозування

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot m}, \quad (9)$$

де $E = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$ – діагональна матриця інтервальних похибок.

Апроксимація функції похибки прогнозування у вигляді (9) отримана на основі локалізації області параметрів Ω_m для насиченого експерименту m -вимірним еліпсоїдом з мінімальними розмірами [6]

$$Q_m = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^m \mid (\bar{b} - \bar{\bar{b}})^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m \cdot (\bar{b} - \bar{\bar{b}}) = m\}, \quad (10)$$

де $\bar{\bar{b}}$ – центр еліпсоїда, який збігається з центром ваги m -вимірного паралелепіпеда (для насиченого експерименту) Ω_m і визначається за формулою $\bar{\bar{b}} = F_m^{-1} \cdot \bar{\bar{Y}}$; $\bar{\bar{Y}}$ – вектор з компонентами – середніми інтервальними значеннями $\bar{y}_i = (y_i^+ + y_i^-)/2$, $i = 1, \dots, m$.

Локалізація еліпсоїдом (10) забезпечить включення $\Omega_m \subset Q_m$ і, відповідно, гарантування коридора інтервальних моделей, тобто $[\hat{y}^-(\bar{x}); \hat{y}^+(\bar{x})] \subseteq [\bar{y}^-(\bar{x}); \bar{y}^+(\bar{x})]_{\bar{b} \in Q_m} \quad \forall \bar{x} \in \chi$.

Спираючись на вищевикладене, отримаємо такі важливі властивості функціоналу $V(F_m)$:

- 1) функціонал $V(F_m) \geq 0 \quad \forall F_m$ не зростає, при $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{\bar{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \longrightarrow \min$;
- 2) достатньою умовою для $V(F_m) = 0$ є умова $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{\bar{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 0$.

Наведені властивості функціоналу $V(F_m)$ дають змогу знайти наближення розв'язку задачі (6) із розв'язку такої задачі:

$$\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{\bar{y}(\bar{x}, F_m)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \xrightarrow{F_m} \min, \quad (11)$$

яка еквівалентна досить розроблений в теорії планування оптимальних експериментів задачі знаходження наближених I_G -оптимальних насичених планів інтервального експерименту [7; 8].

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (7), тобто побудови послідовного плану, модифікуємо підхід, запропонований у [9].

Суть підходу полягає у розміщенні точок $\bar{x}_{k+1}$ послідовного плану у точках спектра насиченого плану $\bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i=1, \dots, m\}$, знайденого із розв'язку задачі (11). Тоді формально знаходження наближеного розв'язку задачі (7) можна записати у вигляді

$$V(F, \bar{x}_{k+1}) \xrightarrow{\bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i=1, \dots, m\}} \min. \quad (12)$$

У такому разі матриця F є еквівалентною матриці F_m . Відповідно властивості функціоналу $V(F, \bar{x}_{k+1})$ збігатимуться з властивостями функціоналу $V(F_m)$. З іншого боку, під час повторних вимірювань у точках спектра насиченого плану формула для похибки прогнозування (9) набуде такого вигляду [9]:

$$\Delta_{\bar{y}(\bar{x}, F_m, k+1)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F_m^T \cdot \hat{E}_{k+1}^{-2} \cdot F_m)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot m}, \quad (13)$$

де $\hat{E}_{k+1} = \text{diag}(\Delta_{N(\bar{x}_1)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_i)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_m)})$ – діагональна матриця; $\Delta_{N(\bar{x}_i)}$ – ширина результуючого перетину $s=1, \dots, N(\bar{x}_i)$ випадкових інтервалів повторних вимірювань у точці $\bar{x}_i$ насиченого плану, яка визначається за співвідношенням $\Delta_{N(\bar{x}_i)} = \min_{s=1, \dots, N(\bar{x}_i)} \{y_{s(\bar{x}_i)}^+\} - \max_{s=1, \dots, N(\bar{x}_i)} \{y_{s(\bar{x}_i)}^-\}$; $y_{s(\bar{x}_i)}^+, y_{s(\bar{x}_i)}^-$ – верхня та нижня межі повторно виміряних інтервалів.

Аналізуючи формулу (13) та спираючись на властивості функціоналу $V(F_m)$, додатково отримаємо такі властивості функціоналу $V(F, \bar{x}_{k+1})$:

- 1) функціонал $V(F, \bar{x}_{k+1}) \geq 0 \quad \forall F, \forall \bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i=1, \dots, m\}$ не зростає, при $\Delta_{N(\bar{x}_i)} \longrightarrow \min$;
- 2) достатньою умовою для $V(F, \bar{x}_{k+1}) = 0 \quad \forall \bar{x}_i, i=1, \dots, m$.

Спираючись на отримані властивості функціоналу $V(F, \bar{x}_{k+1})$, можемо стверджувати, що послідовна мінімізація елементів $\Delta_{N(\bar{x}_1)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_i)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_m)}$ матриці $\hat{E}_{k+1}$ забезпечує мінімізацію області нерозпізнаних рішень. Оскільки неможливо точно спрогнозувати значення $\Delta_{N(\bar{x}_i)}$, яке буде отримане в результаті реалізації повторного спостереження в одній із точок спектра плану на $k+1$ кроці, то найприйнятнішим вибором оптимальної згідно з (12) точки $\bar{x}^0$ спектра плану для повторного вимірювання є її вибір із розв'язку

$$\bar{x}^0 = \arg \min_{\bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i=1, \dots, m\}} \{V(F, \bar{x}_{k+1})\}, \quad (14)$$

за умови рівноімовірного зменшення значень ширини результуючих інтервалів $\Delta_{N(\bar{x}_1)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_i)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_m)}$ на однакову абсолютну чи відносну величину δ , тобто за умови $\Delta_{N(\bar{x}_i)} - \delta$ чи $\Delta_{N(\bar{x}_i)} \cdot \delta$. Такий підхід уможливить послідовно оцінювати зміну коридора інтервальних моделей (8) з шириною $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m, k+1)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$, обчисленою за формулою (13), залежно від можливої зміни величини $\Delta_{N(\bar{x}_i)}$ на $k+1$ кроці до величини $\Delta_{N(\bar{x}_i)} - \delta$ чи $\Delta_{N(\bar{x}_i)} \cdot \delta$ і на цій основі прогнозувати можливу зміну значення $V(F, \bar{x}_{k+1})$. Процедура прогнозування об'єму області нерозпізнаних рішень $V(F, \bar{x}_{k+1})$ на $k+1$ кроці передбачає виконання такої операції

$$V(F, \bar{x}_{k+1}) = \sum_{p=1}^P V_p, \quad (15)$$

де P – величина, значення якої визначає загальну кількість n -вимірних прямокутних паралелепіпедів, отриманих в результаті апроксимації допустимої області рішень χ , і залежить від точності апроксимації цієї області; V_p – величина, значення якої визначається за умовою

$$V_p = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y_{lev} \in [\hat{y}^-(\bar{x}_p); \hat{y}^+(\bar{x}_p)] \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \\ 0, \text{ якщо } y_{lev} \notin [\hat{y}^-(\bar{x}_p); \hat{y}^+(\bar{x}_p)] \Big|_{\bar{b} \in Q_m}. \end{cases} \quad (16)$$

де $\bar{x}_p$ – центр p -того n -вимірного прямокутного паралелепіпеда; y_{lev} – рівень допустимого значення контрольованої величини (поріг). При цьому похибка прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}, F_m, k+1)} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ для визначення інтервалу прогнозу $[\hat{y}^-(\bar{x}_p); \hat{y}^+(\bar{x}_p)] \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ обчислюватиметься за формулою (13), де

$$\hat{E}_{k+1} = \text{diag}(\Delta_{N(\bar{x}_1)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_i)} - \delta, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_m)}), \quad \bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i = 1, \dots, m\} \quad (17)$$

чи

$$\hat{E}_{k+1} = \text{diag}(\Delta_{N(\bar{x}_1)}, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_i)} \cdot \delta, \dots, \Delta_{N(\bar{x}_m)}), \quad \bar{x}_{k+1} \in \{\bar{x}_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (18)$$

Очевидно, що складність обчислень за формулами (15), (16) залежатиме від розмірності вектора $\bar{x} \in R^n$, точності апроксимації області нерозпізнаних рішень та кількості точок у спектрі плану m .

Підсумовуючи вищевикладене, отримаємо такий алгоритм побудови послідовного плану:

Крок 1. Вибір (синтез) насиченого I_G -оптимального плану, користуючись каталогами, наведеними в [8–10].

Крок 2. Реалізація насиченого плану експерименту.

Крок 3. Розрахунок об'єму області нерозпізнаності рішень на основі виразів (15), (16). Якщо $V(F, \bar{x}_k) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \chi$, то кінець процедури. В протилежному випадку, перехід на крок 4. Зауважимо, що для $k=0$ справедливе $V(F, \bar{x}_k) = V(F_m)$.

Крок 4. Планування $\bar{x}_{k+1}$ точки спостереження (14).

Крок 5. Реалізація експерименту в точці $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}^0$ і перехід на крок 3.

Оцінка ефективності запропонованого методу

Для оцінки ефективності побудови послідовних планів згідно з запропонованим методом проводилося комп'ютерне моделювання з порівнянням різних процедур вибору точки $\bar{x}^0$. В основу першої процедури був покладений рівномірний розподіл вимірювань в точках спектра насиченого плану – “рівномірний спектр” (ravn). В основу другої процедури – метод випадкового генерування точок спостережень на множині $\bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, m$) – “випадкова точка” (rand). Третій варіант передбачав реалізацію процедури (14) (abs) за умови (17), а четвертий – за умови (18) (vidn).

Для прикладу вибрано модель об'єкта з одним виходом і двома входами: $y_0(x_1, x_2) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_1^2 + b_4 \cdot x_2^2$. Межі інтервальних значень вихідної змінної генерувалися у випадковий спосіб за формулами $y_i^- = y_0(x_{ji}, x_{2j}) + e_i - \Delta$; $y_i^+ = y_0(x_{ji}, x_{2j}) + e_i + \Delta$, де $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = 1$, e_i – випадкова рівномірно розподілена обмежена похибка $|e_i| \leq 1$; $y_0(x_1, x_2) = 9.248 - 1.535 x_1 + 0.139 x_2 - 5.042 x_1^2 - 1.8 x_2^2$. Область експерименту задавалась у вигляді квадрата: $-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1$. Матриця I_G -оптимального насиченого плану для цієї моделі, знайдена в каталозі, мала такий вигляд: $X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0.386 \\ 1 & -0.227 & 0.227 & -1 & -0.386 \end{pmatrix}$.

Оцінка області нерозпізнаних рішень на всій області зміни вхідних масштабованих величин $[-1;1]$ проводилась методом сіток з точністю $\Delta x = 0.01$. Об'єм цієї області поданий у кількості одиничних паралелепіпедів (для випадку $n=2$ – квадратів).

У таблиці результатів реалізації послідовного плану наведено об'єм області нерозпізнаних рішень для різної кількості спостережень у перерізі різних процедур вибору точок спостережень у послідовному плані. Для перевірки стійкості результатів моделювання проводилося із десятима різними вибірками випадкових даних для кожного експерименту.

Результати комп'ютерного моделювання підтверджують високу ефективність запропонованого методу побудови послідовних планів.

Результати реалізації послідовних планів

Спосіб послідовного планування	Кількість вимірювань						
	5	10	50	100	500	1000	2000
“Випадкова точка”	14216	11265	3788	1487	339	150	74
“Рівномірний спектр”	14689	11309	2693	1236	301	155	65
Запропонована процедура (14) за умови (17)	14008	10564	2916	1013	257	119	56
Запропонована процедура (14) за умови (18)	13773	9464	2136	971	245	104	57

Графічне подання отриманих результатів показано на рис. 3.

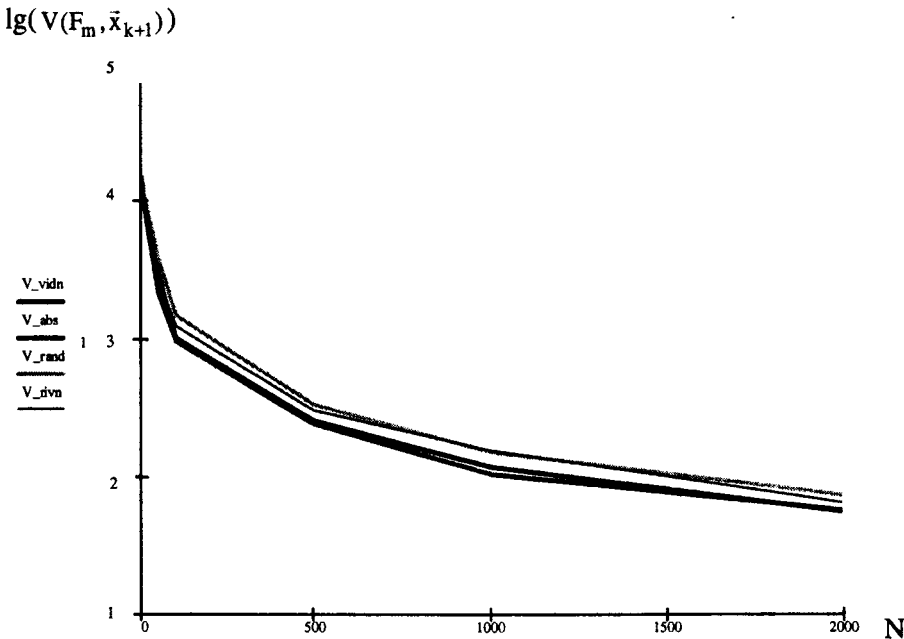


Рис. 3. Залежність інтервальної похибки прогнозування від кількості спостережень для різних методів послідовного планування експерименту

Варто зауважити, що розвиток запропонованого методу вимагатиме досліджень взаємозв'язку точності апроксимації області рішень χ та точності знаходження області нерозпізнаності, оскільки від цього залежатиме складність алгоритму реалізації методу.

Висновки

1. Проведений аналіз задачі побудови інтервальних моделей прийняття рішень дав змогу обґрунтувати процедуру послідовного планування експерименту для їх побудови, яка виконується у два етапи: перший – планування і проведення оптимального насиченого експерименту, другий – уточнення моделі шляхом планування та проведення додаткових спостережень за критерієм мінімізації розмірів області нерозпізнаних рішень.

2. Дослідження поставленої задачі побудови оптимальних послідовних планів на першому етапі показали, що її розв'язки наближено можна подати розв'язками задачі побудови насиченого I_G -оптимального плану.

3. Для знаходження розв'язків задачі послідовного вибору оптимальних точок плану на другому етапі запропоновано наближений метод, який полягає у плануванні та проведенні повторного спостереження на множині точок I_G -оптимального насиченого плану за критерієм мінімізації об'єму множини нерозпізнаних рішень.

4. Ефективність запропонованого методу послідовного планування експерименту досліджувалась шляхом імітаційного моделювання. Результати імітаційних експериментів показали перевагу запропонованого алгоритму реалізації методу над алгоритмами рівномірного та випадкового вибору точок повторних спостережень у послідовному плані.

1. *Design of experiments and data analysis – new trends and results*, Edited by E.K.Letsky. – Moscow, 1993. 2. Воцинин А.П., Сотиров Г.Р. *Оптимизация в условиях неопределенности*. – М. – НРБ, 1989. 3. Налимов В.В. *Теория эксперимента*. – М., 1971. 4. Воцинин А.П., Дывак М.П. *Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей* // Заводская лаборатория. – 1993. – №1. – С. 56–59. 5. Дывак М.П. *Аналіз точності лінійної інтервальної моделі в задачах статичної ідентифікації* // Вісник ДУ “Львівська політехніка” “Автоматика, вимірювання та керування”. – 1999. – № 366. – С. 31–35. 6. Дывак Н.П. *Оптимальное планирование эксперимента в случае локализации области параметров интервальной модели* // Кибернетика и вычислительная техника. – 2001. – Вып. 132. – С. 39–47. 7. Дывак М.П. *Використання властивостей інтервальних моделей у задачах послідовного планування оптимальних експериментів* // Вісник НУ “Львівська політехніка”. “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – 2001. – № 418. – С. 53–58. 8. Дывак Н.П. *Планирование I_G - и I_E -оптимальных экспериментов в задачах идентификации интервальных моделей* // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 2. – С. 42–49. 9. Дывак Н.П., Пукас А.В. *Последовательное планирование I_G -оптимальных экспериментов для построения интервальных моделей статических систем* // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 5. – С. 31–38. 10. Дывак М.П., Пукас А.В. *Таблиці оптимальних планів експерименту у випадку локалізації області параметрів інтервальної моделі* // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2002. – № 2. – С. 181–190.