

МАТЕМАТИЧНО-ІНФОРМАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДАВАЧІВ НА ОСНОВІ РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ПОЛЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ СУМОЮ ЛІНІЙНОЇ І СТЕПЕНЕВО-ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ

© Малачівський П.С., Андруник В.А., 2005

Розглянуто рівномірне наближення сумою лінійної і степенево-показникової функції. Встановлено умову, за якої рівномірне наближення з найменшою абсолютною похибкою таким виразом існує й єдине. Наведено клас функцій, для яких рівномірне наближення цим виразом існує і запропоновано алгоритм для знаходження його параметрів.

Uniform approximation by sum of linear expression and power function is considered. There is established necessary condition for existing and unity such approximation with least absolute error. There are given classes of function, for which uniform approximation by these expressions exist and algorithm for finding of its parameters is offered.

Вступ

Необхідність в наближенні функцій виникає під час проведення теоретичних досліджень і практичних розрахунків в багатьох галузях техніки. Для функції, заданої у вигляді таблиці, це перш за все пов'язано з бажанням отримати аналітичний вираз, оскільки його легше дослідити і інтерпретувати. У випадку аналітично заданої функції часто корисно замінити дуже складний вираз простішим так, щоб основні властивості функції зберігалися. Самостійний інтерес становлять наближення функцій, що є придатними для розрахунку на ЕОМ. У цьому випадку апроксимуючу функцію можна отримати у вигляді полінома, раціонального полінома нелінійного виду, рекуррентної (ітераційної) формули, сегментної апроксимації і т.д.

При наближенні функцій важливими є не тільки точність наближення, але вид і властивості наближеної функції. Це пов'язано з тим, що переважно наближена функція повинна відповідати фізиці досліджуваного процесу. Точнішого відображення фізики процесу часто вдається досягти, якщо наближати функцію разом з похідними або дотримуватись визначених умов. При наближенні експериментальних даних такою умовою може бути мінімізація відхилення самої функції та її центральних моментів. При сегментній апроксимації для цієї мети можна використовувати сплайн-функції, що дає змогу плавно наблизити шукану функцію.

Задача знаходження функціональних залежностей за експериментальними (табличними) даними виникає при розв'язуванні багатьох науково-технічних проблем. Вона полягає в виборі з деякої підмножини такої функції, яка якнайкраще наближає ці дані. При цьому можливі різні підходи в оцінці якості наближення. Наприклад, оцінюють величину середньоквадратичного відхилення, середнього відхилення або використовують іншу оцінку міри відхилення. А найкраще рівномірне наближення забезпечує мінімально можливе відхилення функції від апроксиманти за певної кількості параметрів. Для порівняння зауважимо, що при середньоквадратичному наближенні (метод найменших квадратів) мінімізується сума квадратів похибок відхилення. Метод найменших квадратів часто застосовують для лінеаризації характеристик цифрових вимірювальних засобів, наприклад, давачів тиску, інформаційний сигнал яких залежить від двох величин, наприклад: інформаційного сигналу і температури навколишнього середовища (рисунок).

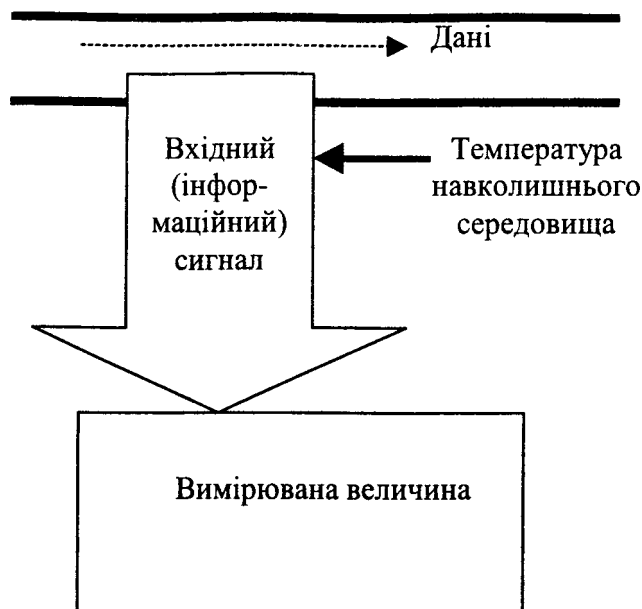


Схема давачів тиску, інформаційний сигнал яких залежить від двох величин

Досі розв'язування задач аналітичної обробки дослідних даних практикується з застосуванням методів інтерполяції або середньо-квадратичного наближення. Це пояснюється не стільки доцільністю застосування саме таких апроксимацій, скільки їх доступністю і традицією. Але, як зазначає відомий український класик з теорії апроксимації Є.Я. Ремез, цитуючи видатного бельгійського спеціаліста з питань обробки дослідних даних Годселя: «Прийшла пора повністю порвати з традицією, відмовитися від спроб відшукування для фізичних величин значень найбільших ймовірних, і обмежитись виключно відшукуванням значень, які найкраще наближають». Наприклад, в багатьох технічних застосуваннях зараз доводиться спостерігати, що дослідники проводять апроксимацію за середньоквадратичним критерієм, а якість наближення оцінюють величиною отриманої максимальної абсолютної похибки, що є недопустимим з точки зору методології і теорії наближення.

Щодо практичного використання найкращого рівномірного наближення, то треба зазначити, що його доцільно використовувати, коли наближувані (експериментальні) дані отримані з систематичною похибкою вимірювальних приладів. Як у першому, так і у другому випадку недоцільно вимагати точного збігу наближуваної й апроксимуючої функцій у заданих точках, тобто інтерполяційні методи для цих випадків не підходять.

Задача знаходження найкращого рівномірного наближення виникає, наприклад, під час:

- проектування контрольно-вимірювальних приладів, зокрема пірометрів або термометрів (градування, лінеаризація статичних характеристик);
- проектування різноманітних функціональних перетворювачів (опис передавальних функцій);
- реалізації алгоритмів обчислення спеціальних функцій на високопродуктивних процесорах обробки даних (апроксимація складних функціональних залежностей простими аналітичними виразами);
- побудови математичних моделей різноманітних неперервних процесів на основі дискретних вимірювань їх значень;
- у машинобудуванні для наведення контурів проекцій деталей із складними геометричними формами, а також аналітичного представлення кривих, які задають траєкторію різальних інструментів в верстатах з програмним керуванням.
- проектування та навчання нейронних мереж (часто використовують метод найменших квадратів).

Крім того, рівномірну апроксимацію даних доцільно застосовувати у різноманітних задачах ущільнення масивів результатів вимірювань, що містять методичну похибку у відомих межах (це може бути телеметрична інформація або масиви геофізичних чи сейсмічних вимірювань і т.д.).

В автоматизованих системах наукових досліджень, які належать до класу розподілених інформаційних систем з яскраво вираженою мережевою структурою, однією з найважливіших проблем є проблема побудови системи адекватних інформаційно-математичних моделей, які дозволяли б апіорі досліджувати як структуру автоматизованих систем наукових досліджень, так і характеристики параметрів всіх її ланок.

В автоматизованих системах наукових досліджень, зокрема, в системах аналізу параметрів матеріалів різної природи, актуальною є задача побудови адекватної математичної моделі, яка б описувала такі характеристики, як яскравість та енергетична світимость металів.

Побудова адекватної математичної моделі енергетичної світимості металів є компонентою для побудови математичних та інформаційних моделей об'єктів складнішої структури та природи в автоматизованих системах наукових досліджень, зокрема йдеться про побудову комплексного математичного опису давачів в інформаційних системах і мережах різних класів та застосувань. У роботі розглянуто один з варіантів наближення – наближення степенево-показниковими виразами

$$Q(x) = A + Bx + Cx^{px}, \quad c \neq 0, \quad p \neq 0 \quad (1)$$

що використовується для представлення фізичних характеристик металів, зокрема, питомого опору, яскравості й енергетичної світимості вольфраму. Значення цих величин використовують для розрахунку тіла розжарення ламп [1]. Розглянемо спочатку наближення сумою константи і степенево-показникового виразу ($b = 0$) [2]

$$A + Bx^{px}, \quad x \geq 0 \quad (1.1)$$

Теорема. Нехай функція $f(x) \in C[\alpha, \beta]$, $\alpha > e^{-1}$. Тоді достатньою умовою існування рівномірного наближення з найменшою абсолютною похибкою вищенаведеним виразом функції $f(x)$ є виконання нерівності:

$$W \equiv \frac{f(z_4) - f(z_2)}{f(z_3) - f(z_1)} > 0, \quad (1.2)$$

де $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ – довільні числа з проміжку $[\alpha, \beta]$.

Доведення. Нехай умова (1.2) виконується для деякої функції $f(x)$. Тоді за властивістю найкращого рівномірного наближення параметри наближення A, B, P задовольнятимуть систему рівнянь:

$$f(z_j) - A - Bz_j^P = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (1.3)$$

де $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ – точки чебишовського альтернансу, а μ – похибка наближення.

Вилучаючи з даної системи невідомі A, B, μ , які входять лінійно, отримаємо трансцендентне рівняння відносно P :

$$g(p) = W, \quad \text{де} \quad g(p) = \frac{z_4^p - z_2^p}{z_3^p - z_1^p}, \quad (1.4)$$

а значення W визначається рівністю (1.2).

Розглянемо ліву частину рівняння (1.4). Застосувавши до неї теорему Лагранжа про кінцеві прирости, отримаємо:

$$g(p) = K \cdot K_1 e^{p\mu}, \quad (1.5)$$

$$K = \frac{Z_4 - Z_2}{Z_3 - Z_1},$$

$$K_1 = \frac{\ln \xi_2 + 1}{\ln \xi_1 + 1},$$

$$u = \xi_2 \cdot \ln \xi_2 - \xi_1 \cdot \ln \xi_1,$$

$$\xi_2 \in [z_2, z_4], \xi_1 \in [z_1, z_3], \xi_1 < \xi_2.$$

Проаналізуємо отримане представлення лівої частини рівняння (1.4). Згідно з властивістю, встановленої в (1.2), величина K буде додатною, тому що $\xi_2 < \xi_1$. Величина K_1 буде визначеною і набуватиме додатних значень за умови

$$\xi_1 > e^{-1}. \quad (1.6)$$

Оскільки ми наближаємо функцію на відрізку $[\alpha, \beta]$, то нерівність (1.6) виконуватиметься, якщо $\alpha > e^{-1}$.

Виходячи з представлення (1.5) лівої частини рівняння (1.4), можемо стверджувати, що ліва частина цього рівняння є експоненціальною функцією щодо p . Допустимі значення функції $g(p)$ визначимо, спрямувавши p до ∞ і до $-\infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = \infty,$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} g(p) = 0.$$

Отже, ліва частина $g(p)$ рівняння (1.4) є монотонно зростаючою функцією на інтервалі $(-\infty, \infty)$ і набуває значення з інтервалу $(0, \infty)$. Тому рівняння (1.4) матиме єдиний дійсний розв'язок при виконанні умови (1.2). Збіжність ітераційної схеми Ремеза [3] вказує на існування найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1.1) на $[\alpha, \beta]$. Теорему доведено.

Зазначимо, що умова (1.2) не є необхідною для існування найкращого рівномірного абсолютного наближення виразом (1.1). Її виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. Для збіжності алгоритму Ремеза необхідно також виконати умову (1.2) у точках усіх наближень до чебишовського альтернансу.

Неважко зауважити, що умова (1.2) виконується, зокрема, для функцій $(f(x) \in C[\alpha, \beta])$ строго монотонних на $[\alpha, \beta]$.

Якщо $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ – точки чебишовського альтернансу, то параметри найкращого рівномірного наближення виразом (1.1) визначаються за формулами:

$$A = \frac{[f(z_1) + f(z_2) - B(z_1^P + z_2^P)]}{2}, \quad (1.7)$$

$$B = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3^P - z_1^P}. \quad (1.8)$$

Оскільки доведенням теореми показано, що ліва частина рівняння (1.3) є експоненціальною функцією щодо p , то розв'язок цього рівняння доцільно шукати як розв'язок прологарифмованого рівняння:

$$g(p) = V, \quad (1.9)$$

$$\text{де } g(p) = \ln g(p), \quad V = \ln W.$$

Розв'язок рівняння (1.9) шукається ітераційним методом Ньютона:

$$P_i = \frac{P_{i-1} - [q(p_{i-1}) - V]}{q'(p_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

де

$$\begin{aligned} q'(p) &= \frac{v'(p) \cdot u(p) - u'(p) \cdot v(p)}{u(p) \cdot v(p)}, \\ u(p) &= Z_3^P Z_3 - Z_1^P Z_1, \\ u'(p) &= Z_3 \cdot \ln Z_3 \cdot Z_3^P Z_3 - Z_1 \cdot \ln Z_1 \cdot Z_1^P Z_1, \\ v(p) &= Z_4^P Z_4 - Z_2^P Z_2, \\ v'(p) &= Z_4 \cdot \ln Z_4 \cdot Z_4^P Z_4 - Z_2 \cdot \ln Z_2 \cdot Z_2^P Z_2, \\ P_0 &= 2 \cdot \frac{\ln \left(W \cdot \frac{Z_3 - Z_1}{Z_4 - Z_2} \cdot \frac{\ln Z_2 + 1}{\ln Z_3 + 1} \right)}{Z_3 \cdot \ln Z_3 - Z_2 \cdot \ln Z_2}. \end{aligned}$$

Початкове значення P_0 має дорівнювати наближеному значенню, виходячи з рівності (1.6).

Задача знаходження найкращого рівномірного наближення виразом (1) ускладнюється тим, що цей вираз не задовольняє умову Хаара [3], тому необхідно дослідити існування рівномірного наближення даним виразом.

Існування найкращого рівномірного наближення сумою лінійної і степенево-показникової функції

Клас функцій, для якого існує рівномірне наближення сумою лінійного й степенево-показникового виразу (1), встановлює теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$). Тоді достатньою умовою існування рівномірного наближення виразом (1) для функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ при $\alpha > e^{-1}$ є виконання нерівностей

$$0 < W \quad \text{і} \quad W \neq W_0, \quad (2)$$

де

$$W = \frac{\frac{f(Z_5) - f(Z_3)}{(Z_5 - Z_3)} - \frac{f(Z_4) - f(Z_2)}{(Z_4 - Z_2)}}{\frac{f(Z_4) - f(Z_2)}{(Z_4 - Z_2)} - \frac{f(Z_3) - f(Z_1)}{(Z_3 - Z_1)}}, \quad (3)$$

$$W_0 = \frac{\frac{Z_5 \ln Z_5 - Z_3 \ln Z_3}{Z_4 - Z_2} - \frac{Z_4 \ln Z_4 - Z_2 \ln Z_2}{Z_3 - Z_1}}{\frac{Z_4 \ln Z_4 - Z_2 \ln Z_2}{Z_4 - Z_2} - \frac{Z_3 \ln Z_3 - Z_1 \ln Z_1}{Z_3 - Z_1}}, \quad (4)$$

а $Z_1 < Z_2 < Z_3 < Z_4 < Z_5$ – довільні числа з відрізка $[\alpha, \beta]$.

При цьому значення параметра p задовольняє умову:

$$p > \frac{-1}{(\beta(\ln \beta + 1)^2)}. \quad (5)$$

Доведення. Нехай неперервна функція $f(x)$ задовольняє умову теореми. Тоді за характеристичною теоремою [3] для існування рівномірного наближення виразом (1) функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ достатньо, щоб система рівнянь

$$f(z_j) - a - b z_j - c z_j^p = (-1)^j \mu, \quad j = \overline{1, 5}, \quad (6)$$

де z_k – довільні впорядковані за зростанням числа $z_k < z_{k+1}$, $k = \overline{1, 4}$ з $[\alpha, \beta]$, мала єдиний розв'язок щодо невідомих параметрів a, b, c, p і похибки μ . Покажемо, що при виконанні умови (2) система рівнянь (6) має єдиний розв'язок.

Вилучаючи з даної системи невідомі a, b , і μ щодо невідомих c і p отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c \left(\frac{z_5^p z_5 - z_3^p z_3}{z_5 - z_3} - \frac{z_4^p z_4 - z_2^p z_2}{z_4 - z_2} \right) = \frac{f(z_5) - f(z_3)}{z_5 - z_3} - \frac{f(z_4) - f(z_2)}{z_4 - z_2} \\ c \left(\frac{z_4^p z_4 - z_2^p z_2}{z_4 - z_2} - \frac{z_3^p z_3 - z_1^p z_1}{z_3 - z_1} \right) = \frac{f(z_4) - f(z_2)}{z_4 - z_2} - \frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1} \end{cases} \quad (7)$$

Ця система матиме ненульовий розв'язок щодо c , якщо коефіцієнти цієї системи біля невідомого c і вільні члени рівнянь відмінні від нуля. Згідно з першою нерівністю $W < 0$ умови теореми (2) вільні члени рівнянь цієї системи не набувають нульових значень. Коефіцієнти біля невідомого c в системі (7) дорівнюють приросту степенево-показникової функції $\varphi(p; x) = x^{px}$ за x .

Розглянемо другу похідну функції $\varphi(p; x) = x^{px}$ за x .

$$\varphi''(p; x) = p \left(p(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) x^{px}. \quad (8)$$

Ця похідна для значень параметра p , відмінних від нуля і $p > \frac{-1}{(\beta(\ln \beta + 1)^2)}$ не набуває нульового значення для $x \in (e^{-1}, \infty)$. Тому перша похідна степенево-показникової функції $\varphi(p; x) = x^{px}$ при

$$p \in \left(\frac{-1}{\beta(\ln \beta + 1)^2}, 0 \right) \cup (0, \infty) \quad (9)$$

строго монотонна за x для $x > e^{-1}$ і відповідно будь-які прирости її значення відмінні від нуля. Отже, ми визначили множину допустимих значень параметра p , для яких система рівнянь (7) має ненульовий розв'язок щодо c .

Поділивши перше рівняння системи (7) на друге, отримаємо відносно p трансцендентне рівняння

$$\omega(p) = W, \quad (10)$$

де

$$\omega(p) = \frac{\frac{z_5^p - z_3^p}{z_5 - z_3} - \frac{z_4^p - z_2^p}{z_4 - z_2}}{\frac{z_4^p - z_2^p}{z_4 - z_2} - \frac{z_3^p - z_1^p}{z_3 - z_1}}, \quad (11)$$

а значення W визначається рівністю (2).

Розглянемо ліву частину рівняння (10). Застосувавши до чисельника та знаменника (11) теорему Лагранжа [4] про кінцеві прирости, отримаємо:

$$\omega(p) = \frac{\xi_3^p (\ln \xi_3 + 1) - \xi_2^p (\ln \xi_2 + 1)}{\xi_2^p (\ln \xi_2 + 1) - \xi_1^p (\ln \xi_1 + 1)}, \quad (12)$$

де $\xi_i \in [z_i, z_{i+1}]$, $i = \overline{1, 3}$. До отриманого виразу ще раз застосуємо теорему Лагранжа

$$\omega(p) = K \lambda(p) e^{p(\eta_2 \ln \eta_2 - \eta_1 \ln \eta_1)}, \quad (13)$$

де

$$K = \frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1},$$

$$\lambda(p) = \frac{p(\ln \eta_2 + 1) + 1/\eta_2}{p(\ln \eta_1 + 1) + 1/\eta_1}.$$

$$\eta_1 \in [\xi_1, \xi_2], \eta_2 \in [\xi_2, \xi_3].$$

Для існування єдиного розв'язку рівняння (10) необхідно, щоб функція $\omega(p)$ була строго монотонною. З врахуванням того, що $\alpha > e^{-1}$ експонента в (13) є монотонно зростаючою функцією. Тому для того, щоб $\omega(p)$ була строго монотонною функцією, необхідно, щоб функція $\lambda(p)$ була не спадною. Справді, функція $\omega(p)$ (11) є строго монотонною за p , тому що перша похідна функції $\lambda(p)$

$$\lambda'(p) = \frac{\frac{(\ln \eta_2 + 1)^2}{\mu_1} - \frac{(\ln \mu_1 + 1)^2}{\mu_2}}{\left(p(\ln \mu_1 + 1)^2 + \frac{1}{\eta_1} \right)^2} \quad (14)$$

у разі $\eta_1 < \eta_2$ додатна для всіх p , що відповідають (9).

Для встановлення існування єдиного розв'язку рівняння (10) і відповідно рівномірного наближення неперервної функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізок $[\alpha, \beta]$ визначимо множину допустимих значень функції $\omega(p)$. Значення K не залежить від p і є додатним, тому що згідно з [5] справджується співвідношення $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Оскільки для значень параметра p , що задовольняють нерівності (5), функція $\lambda(p)$ додатна, то відповідно і $\omega(p)$ (11) також буде додатною. Тому для від'ємних p

$$p \in \left(\frac{-1}{\beta(\ln \beta + 1)^2}, 0 \right), \quad (15)$$

враховуючи, що

$$\lim_{p \rightarrow 0} \omega(p) = W_0,$$

функція $\omega(p)$ набуває значення з інтервалу $(0, W_0)$. Відповідно для додатних p функція $\omega(p)$ набуває значення з інтервалу (W_0, ∞) . З цього випливає, що достатньою умовою існування рівномірного наближення функцій $f(x)$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$) з найменшою абсолютною похибкою виразом (1) для допустимих від'ємних значеннях p (15) є справдження нерівності $0 < W < W_0$, а для додатних p – нерівності $W > W_0$.

Отже, достатньою умовою існування рівномірного наближення виразом (1) для неперервних функцій $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ при $\alpha > e^{-1}$ є справдження нерівностей (2). При цьому відмінне від нуля значення параметра p задовольняє умову (5). Теорему доведено.

Умову теореми задовольняють, зокрема, функції $f(x)$, перша похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, а сама функція відмінна від $\bar{a} + \bar{b}x + \bar{c}x \ln x$, де $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – довільні дійсні числа.

Визначення параметрів найкращого рівномірного наближення сумою лінійної і степенево-показникової функції

Якщо деяка функція $f(x)$ задовольняє умови теореми, а $z_i < z_{i+1}$, $i = \overline{1, 4}$ – точки чебишовського альтернансу, то параметри a , b і c рівномірного наближення виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою визначають за формулами:

$$a = (f(z_1) + f(z_2) - b(z_1 + z_2) - c(z_1^{p_{z_1}} + z_2^{p_{z_2}})) / 2, \quad (16)$$

$$b = (f(z_3) - f(z_1) - c(z_3^{p_{z_3}} - z_1^{p_{z_1}})) / (z_3 - z_1), \quad (17)$$

$$c = \frac{\frac{f(z_5) - f(z_3)}{z_5 - z_3} - \frac{f(z_4) - f(z_2)}{z_4 - z_2}}{\frac{z_5^{p_{z_5}} - z_3^{p_{z_3}}}{z_5 - z_3} - \frac{z_4^{p_{z_4}} - z_2^{p_{z_2}}}{z_4 - z_2}}. \quad (18)$$

Значення параметра p є коренем рівняння (7). Розв'язок цього рівняння шукатимемо з врахуванням його властивостей, виявлених при доведенні теореми. Якщо $0 < W < W_0$, то значення p знаходиться в інтервалі $p \in \left(\frac{-1}{\beta(\ln \beta + 1)^2}, 0 \right)$. Розв'язок рівняння (10) у цьому випадку можна визначити методом половинного ділення або Довелла [6].

Якщо $W > W_0$, то розв'язок рівняння (10) знаходиться в інтервалі $(0, \infty)$. У цьому випадку для його знаходження можна використати ітераційну схему, побудовану з врахуванням подання його лівої частини у вигляді (13). Згідно з цим поданням ліва частина рівняння (10) є добутком експоненти на функцію $\lambda(p)$ і константу K , яка від p не залежить. Якщо допустити, що значення функції $\lambda(p)$ в (13) приблизно дорівнює одиниці, то ліву частину нашого рівняння можна

розглядати як експоненційну функцію щодо p , і тоді його розв'язок доцільно шукати як корінь прологарифмованого рівняння

$$g(p) = V, \quad (19)$$

де

$$g(p) = \ln \omega(p), \quad V = \ln W,$$

$\omega(p)$ – визначається формулою (11), а значення W – рівністю (3).

Розв'язок рівняння (19) можна знайти за допомогою ітераційного методу Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g'_n(p_i)}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} g'(p) &= \frac{v'(p)}{v(p)} - \frac{u'(p)}{u(p)}; \\ u(p) &= \frac{z_4^{pz_4} - z_2^{pz_2}}{z_4 - z_2} - \frac{z_3^{pz_3} - z_1^{pz_1}}{z_3 - z_1}; \\ v(p) &= \frac{z_5^{pz_5} - z_3^{pz_3}}{z_5 - z_3} - \frac{z_4^{pz_4} - z_2^{pz_2}}{z_4 - z_2}; \\ u'(p) &= \frac{z_4 \ln z_4 z_4^{pz_4} - z_2 \ln z_2 z_2^{pz_2}}{z_4 - z_2} - \frac{z_3 \ln z_3 z_3^{pz_3} - z_1 \ln z_1 z_1^{pz_1}}{z_3 - z_1}; \\ v'(p) &= \frac{z_5 \ln z_5 z_5^{pz_5} - z_3 \ln z_3 z_3^{pz_3}}{z_5 - z_3} - \frac{z_4 \ln z_4 z_4^{pz_4} - z_2 \ln z_2 z_2^{pz_2}}{z_4 - z_2}; \\ p_0 &= \operatorname{sign}(W - W_0) \frac{\left| V - \ln \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2} \right|}{z_3 \ln z_3 - z_2 \ln z_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Початкове значення p_0 (21) приймають як наближене значення, отримане з врахуванням (13). При цьому η_1 має дорівнювати z_2 , $\eta_2 - z_3$, $\xi_1 - z_2$, $\xi_2 - z_3$, $\xi_3 - z_4$, а $\lambda(p) \approx 1$.

Програмна реалізація [7,8] та виконання тестових прикладів показали, що ітераційна схема Ньютона (20) збігається за 3–4 ітерації.

Висновок

До знаходження найкращого рівномірного наближення зводиться розв'язування багатьох наукових і конструкторсько-проектних задач. Такі задачі виникають, наприклад, під час:

- проектування контрольно-вимірювальних приладів, зокрема термометрів [9], пірометрів, вологомірів, манометрів та ін., для градуювання їх статичних характеристик або розрахунку схем лінеаризації вимірювальних перетворювачів [10];
- проектування різноманітних функціональних перетворювачів для опису передавальних функцій;
- реалізації алгоритмів обчислення спеціальних функцій на високопродуктивних процесорах обробки даних для апроксимації складних функціональних залежностей простими аналітичними виразами, зручнішими для обчислення [11];

– побудові математичних моделей різноманітних неперервних процесів на основі дискретних вимірювань їх значень;

– проектування та навчання нейронних мереж.

У зв'язку з цим розглядалось рівномірне наближення сумою лінійної і степеневопоказникової функції, достатньою умовою існування рівномірного (чебишовського) наближення сумою лінійної і степеневопоказникової функції з найменшою абсолютною похибкою є виконання нерівностей (2), які задовольняють, зокрема, неперервні функції $f(x)$, перша похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, а сама функція відмінна від $\bar{a} + \bar{b}x + \bar{c}x \ln x$, де $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – будь-які дійсні числа. У разі виконання цієї умови параметри наближення сумою лінійної і степеневопоказникової функції визначають за формулами (16 – 18). Значення нелінійного параметра знаходять як розв'язок трансцендентного рівняння (10).

1. Ливинов В. Рохлин Г. *Тепловые источники оптического излучения*. – М.: Энергия, 1975. – 246 с.
2. Малахівський П. С., Яремчук С. Б. Рівномірне наближення степеневопоказниковим виразом // *Вісник ДУ "Львівська політехніка"*. – 1998. – № 337. – С. 353–356.
3. Попов Б. А., Теслер Г. С. *Приближение функций для технических приложений*. – Киев: Наукова думка, 1980. – 352 с.
4. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников*. – М.: Мир, 1977. – 831 с.
5. Попов Б. А., Малахівський П. С. *Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций*. – Львов, 1984. – 79 с. – (Препр. / АН УССР, Физико-мех. ин-т им. В. Г. Карпенко, N 85).
6. Попов Б. О., Монцибович Б. Р. *Розв'язування задач на машинах для інженерних розрахунків*. – К.: Наукова думка, 1978. – 346 с.
7. Монцибович Б. Р., Малахівський П. С., Тыкайло С. В. *Диалоговый пакет программ для равномерной аппроксимации табличных данных на языке Бейсик (ППП Радан)*. – Львов: Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, 1985. – 383 с.
8. Монцибович Б. Р., Криворучко Г. Ф., Малахівський П. С. // *Диалоговый пакет программ для аналитической обработки табличных данных (ППП Радан – 2)*. – Львов, 1988. – 135 с.
9. Малахівський П. С., Андруник В. А. Рівномірне сплайн-наближення // *Комп'ютерні технології друкарства*. – 2002. – №7. – С. 107–115.
10. Василюк В. М., Ленюченко А. М., Малахівський П. С. *Лінеаризація характеристик цифрових вимірювальних засобів, інформаційний сигнал яких залежить від двох величин* // *Вимірювальна техніка та метрологія*. – 2001. – № 58. – С. 48–43.
11. Балашов А. М., Селищев С. В. *Экспоненциальная коррекция нелинейности температурного коэффициента напряжения р-п перехода для прецизионных источников опорного напряжения* // *Известия вузов. "Электроника"*. – 2002. – №5 – С. 40–44.