

УДК 528.21

Ф. ЗАБЛОЦЬКИЙ, Б. ДЖУМАН*

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, тел. +38(068)7632139, ел. пошта teojuman@gmail.com

ПОБУДОВА ГЕОМЕТРИЧНОЇ СТНА-МОДЕЛІ ГЕОЇДА НА ТЕРИТОРІЮ ЛЬВІВСЬКОЇ ОБЛАСТІ

Сьогодні виникла необхідність модернізації висотної системи України, що потребує її інтеграції в Європейську вертикальну референцну систему EVRS. У зв'язку з цим також виникає потреба побудови регіональної моделі геоїда на територію нашої країни, яка б добре узгоджувалася з моделлю Європейського геоїда EGG2015. Щоб отримати оптимальну модель геоїда, необхідно використовувати як гравіметричну, так і геометричну інформацію, в такому випадку модель називають гравіметрично-геометричною. Такий підхід використано під час побудови як моделі європейського геоїда, так і моделей геоїда на територію різних країн Європи. **Мета.** Мета цієї роботи – побудова регіональної геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області та оцінювання її точності. Надалі заплановано побудову гравіметричної СТНА-моделі геоїда на цю саму територію та порівняння отриманих результатів. **Методика.** Для побудови геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області використано висоти геометричного геоїда, одержані у результаті GNSS-спостережень на пунктах ДГМ I, II та III класів. СКП визначення геодезичної висоти, отриманої із GNSS-нівелювання у статичному режимі, не перевищувала 15 мм. Для побудови моделі геоїда використано 205 значень обчислених висот геоїда. Вісім значень не залучали до побудови моделі, оскільки за ними виконували незалежне оцінювання точності. **Результати.** Отримано регіональну модель геоїда в межах процедури "Вилучення–Відновлення" із введенням параметра регуляризації. СКП отриманої моделі, обчислена на основі даних, використаних для її побудови, становила 12 мм, а на інших даних – 25 мм. **Наукова новизна і практична значущість.** Уперше здійснено апробацію СТНА-функцій для побудови регіональної моделі геоїда. Виконано оцінку точності отриманої моделі на залежних та незалежних даних. СКП одержаної моделі становила близько 2 см, що відповідає точності GNSS-вимірів. Отриману модель можна використовувати як трансформаційне поле на територію Львівської області.

Ключові слова: модель; геоїд; СТНА-метод; GNSS-нівелювання.

Вступ

Сьогодні виникла необхідність модернізації висотної системи України, що потребує її інтеграції в Європейську вертикальну референцну систему EVRS [Kucher et al., 2015; Dzhuman & Zablotzkyi, 2020]. У зв'язку з цим також потрібно побудувати регіональну модель геоїда на територію нашої країни, яка б добре узгоджувалася з моделлю Європейського геоїда EGG2015 [Denker, 2013].

Моделі геоїда класифікують за різними ознаками. Наприклад, за використанням вхідної інформації їх можна поділити на гравіметричну та геометричну моделі. Гравіметричну модель геоїда будують на основі гравіметричної інформації (гравітаційні аномалії у вільному повітрі, відхилення прямовисних ліній тощо), тоді як геометричну модель – на основі GNSS-вимірів на висотних пунктах Державної геодезичної мережі.

На практиці між цими моделями завжди є розходження, які виникають здебільшого внаслідок: а) випадкових похибок вимірів, покладених в основу обчис-

лення моделей; б) невідповідності датумів й інших можливих систематичних спотворень (напр., розходження між поверхнею гравіметричного геоїда та опорною поверхнею нівелювання, що проходить через нуль-пункт відліку висот); в) різних геодинамічних ефектів; г) теоретичних наближень під час моделювання геоїда (напр., неправильна оцінка формули Гельмерта для ортометричних висот із використанням нормальних значень сили тяжіння замість фактичних гравіметричних спостережень). Розбіжності між гравіметричним та геометричним геоїдом виявляють, як правило, емпірично, з використанням алгоритмів, наведених у [Kotsakis & Sideris, 1999].

Щоб отримати оптимальну модель, необхідно використовувати як гравіметричну, так і геометричну інформацію. В такому випадку модель називають гравіметрично-геометричною. Такий підхід використано під час побудови як моделі Європейського геоїда [Denker, 2015], так і моделей геоїда на територію різних країн Європи, напр. [Schwabe, 2016; Szelachowska & Kryński, 2014; Spiroiu et al., 2017].

На основі операційного та модельного підходів фізичної геодезії створено різноманітні методи побудови моделі геоїда. Головним методом операційного підходу можна вважати метод середньої квадратичної колокації, який запропонував Моріц [Moritz, 1962] та уніфікував Краруп [Krarup, 1969]. Серед методів модельного підходу можна виділити метод SCHN [Haines, 1985] та метод використання нецентрального мультиполів [Marchenko, 1998]. В 2017 р. запропоновано СТНА-метод [Dzhuman, 2017], який полягає у використанні сферичних функцій із дробовими індексами, ортогональних на довільній сферичній трапеції. Цей метод має певні переваги над іншими методами, основні з яких полягають в тому, що область визначення цих функцій збігається із досліджуваною областю, а ортогональна властивість дає змогу використовувати квадратурні формули для обчислення невідомих коефіцієнтів [Dzhuman, 2018].

Мета

Метою цієї роботи є побудова регіональної геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області та оцінювання її точності. Надалі заплановано побудову гравіметричної СТНА-моделі геоїда на цю саму територію та порівняння отриманих результатів.

Методика

Вхідні дані

Для побудови геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області використано висоти геометричного геоїда, отримані з GNSS-спостережень на пунктах ДГМ I, II і III класів. GNSS-спостереження на пунктах ДГМ виконали від мережі базових станцій GeoTectase за допомогою двочастотного GNSS-приймача Trimble серії 5700 працівники галузевої науково-дослідної лабораторії ГНДЛ-18 Інституту геодезії Національного університету “Львівська політехніка” під загальним керівництвом проф. К. Р. Третяка. Встановлено такі параметри роботи GNSS-приймача: режим роботи – статичний; кут відсікання горизонту – 10°; тривалість спостережень – не менше ніж 4 год; інтервал запису –

$$\delta N_m = \frac{GM}{\gamma R} \sum_{k=2}^8 \sum_{m=0}^k \left\{ \bar{C}_{km} \cos \left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \right) + \bar{S}_{km} \sin \left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \right) \right\} \bar{P}_{km}(\theta), \quad (2)$$

де GM – гравітаційна стала; γ – нормальне значення прискорення вільного падіння. Невідомі коефіцієнти $\bar{C}_{km}$ та $\bar{S}_{km}$ знайдено з використанням методу найменших квадратів з введенням параметра регуляризації Тіхонова α для стабілізації розв’язку:

$$V^T V + \alpha X^T X \rightarrow \min. \quad (3)$$

Параметр регуляризації підібрано так, щоб СКП отриманої моделі відповідала точності вхідної інформації.

1 с. Карту спостережуваних пунктів висотної ДГМ подано на рис. 1.

СКП визначення геодезичної висоти, отриманої із GNSS-нівелювання в статичному режимі, не перевищувала 15 мм. Карту обчислених висот геоїда наведено на рис. 2.

Для побудови моделі геоїда використано 205 значень обчислених висот геоїда. Вісім значень не залучали до побудови моделі, оскільки за ними виконували незалежне оцінювання точності (рис. 3).

Основні розрахунки

Для обчислення регіональної моделі геометричного геоїда здебільшого використовують штучну нейронну мережу [Kao, 2014] та розклад у ряд за степеневими функціями [Mishra & Ghosh, 2017; Eteje et al., 2018], причому другий метод використовують, коли досліджувана область доволі малих розмірів. СТНА-метод можна використовувати для сферичної трапеції будь-якого розміру з високою розрізнявальною здатністю.

Побудуємо СТНА-модель геометричного геоїда до 8 ступеня/порядку (що еквівалентно моделі глобального гравітаційного поля Землі ≈ 1000 ступеня/порядку) в межах процедури “Вилучення – Обчислення – Відновлення”. Для цього встановлено такі координати вершин рамки трапеції: $j_{min} = 48,6^\circ$, $j_{max} = 50,7^\circ$, $l_{min} = 22,4^\circ$, $l_{max} = 26,0^\circ$ ($q_{min} = 39,3^\circ$, $q_{max} = 41,4^\circ$, $l_{min} = 22,4^\circ$, $l_{max} = 26,0^\circ$). Як систематичну складову використано глобальну гравітаційну модель EGM2008 [Pavlis et al., 2008; Ince et al., 2019] до 360 ступеня/порядку. Залишкові значення δN висот геоїда отримано за формулою:

$$\delta N = N - N_m, \quad (1)$$

де N – висоти геоїда, обчислені за вимірами; N_m – модельні значення (отримані за моделлю EGM2008 до 360 ступеня/порядку).

Аналітичний вираз СТНА-моделі залишкових значень висот геоїда δN_m має вигляд

Результати

Карту залишкових значень висот геоїда δN подано на рис. 4, карту моделі залишкових значень висот геоїда δN_m – на рис. 5, а їх різниці $\Delta \delta N$ – на рис. 6.

СКП отриманої моделі, обчислена на основі даних, використаних для її побудови, становила 12 мм, тоді як СКП, обчислена на підставі даних, які не використовували для її побудови, – 25 мм.

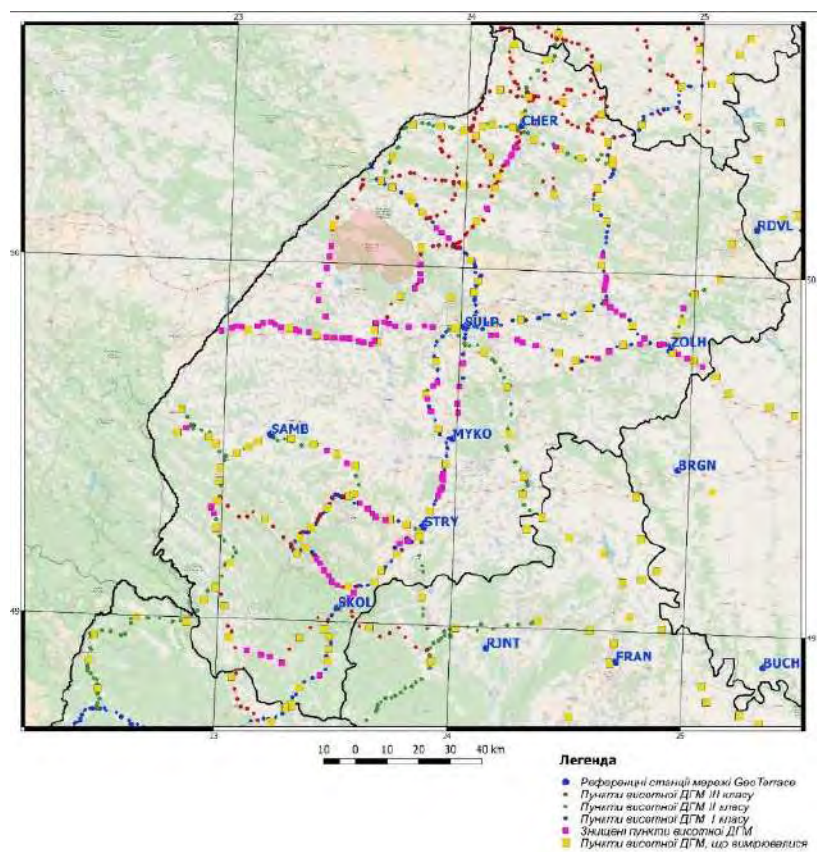


Рис. 1. Спостережувані пункти висотної ДГМ на території Львівської області

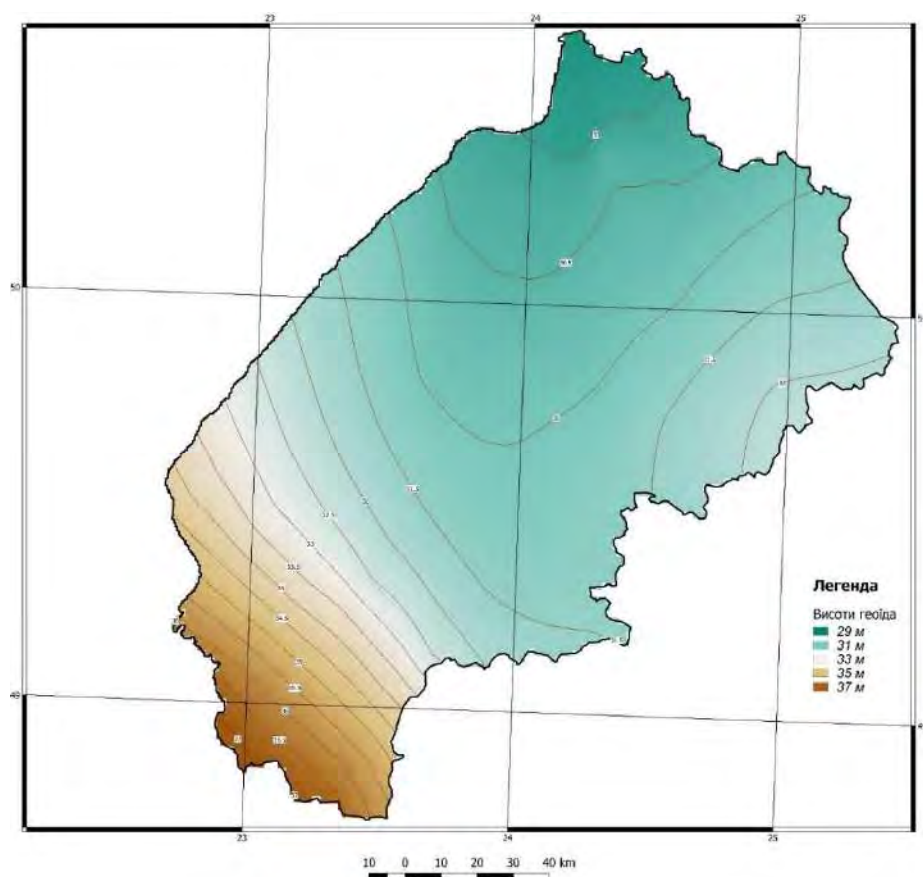


Рис. 2. Карта обчислених висот геоїда на території Львівської області

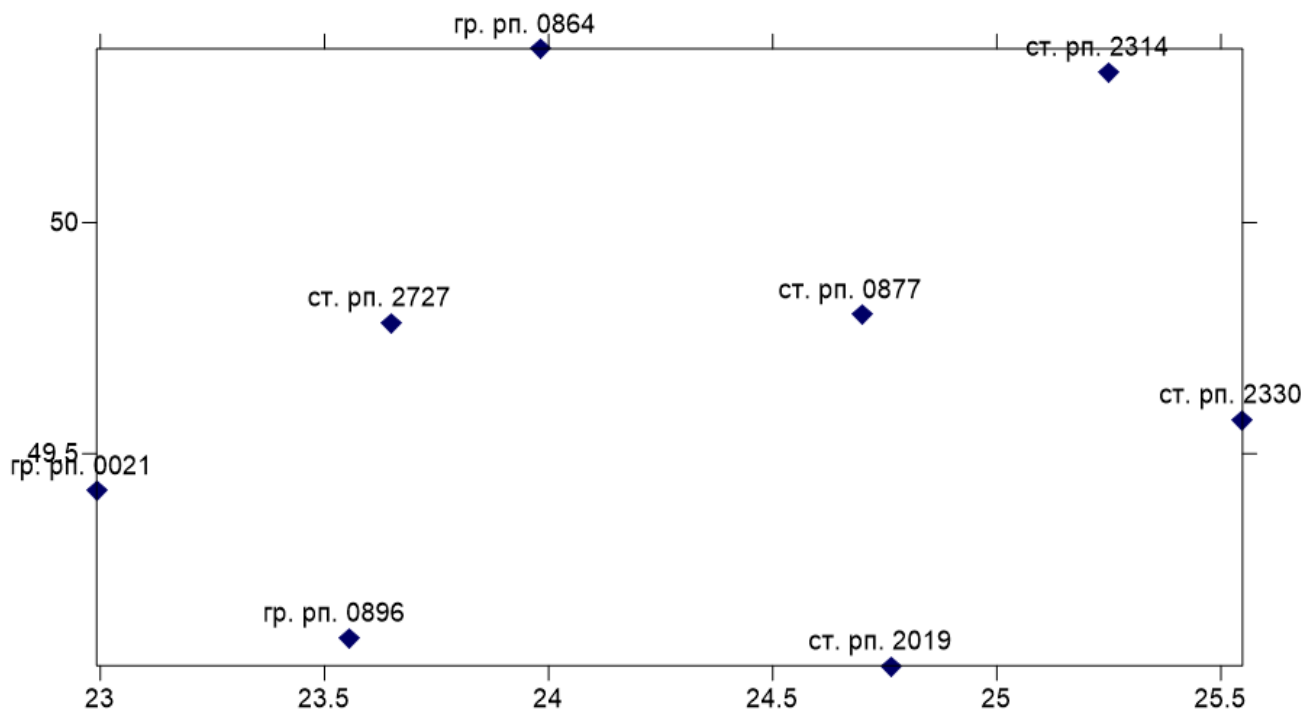


Рис. 3. Схема розташування пунктів, значення висот геоїда з яких не залучали до побудови моделі

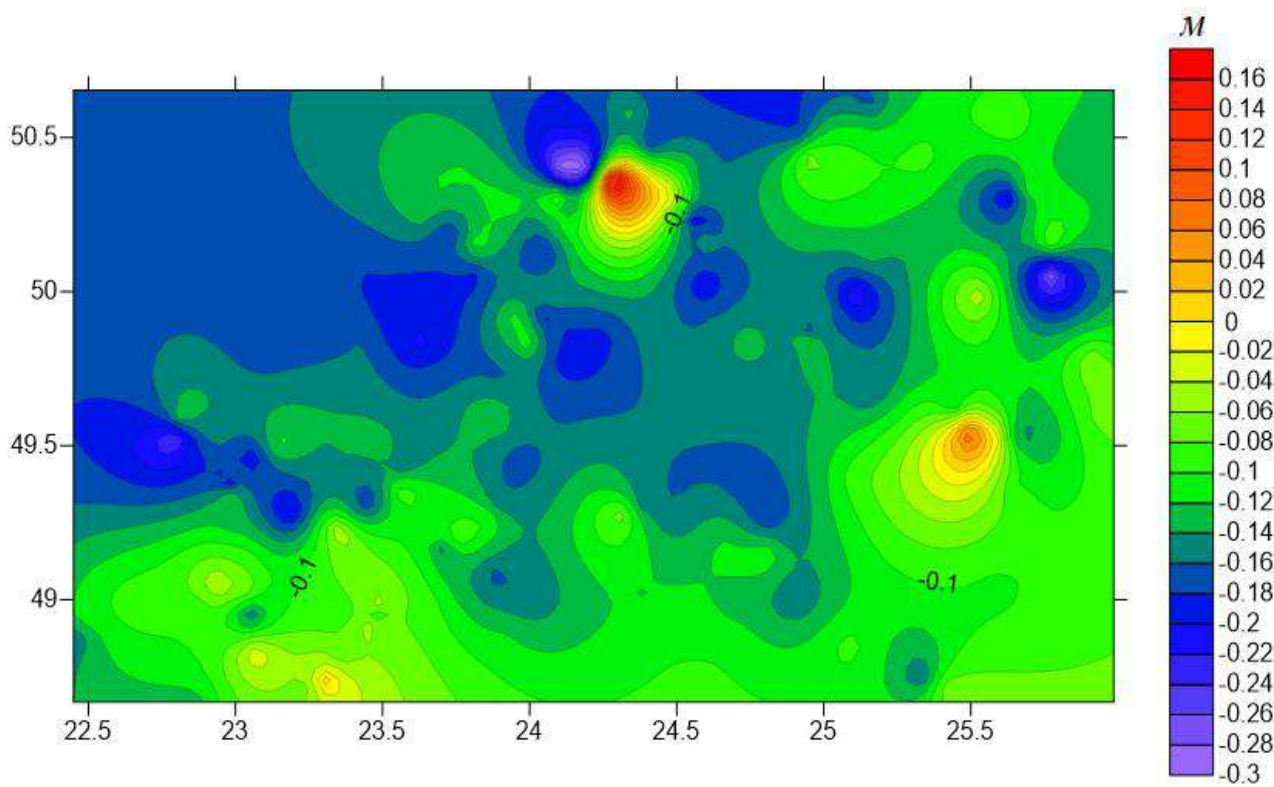
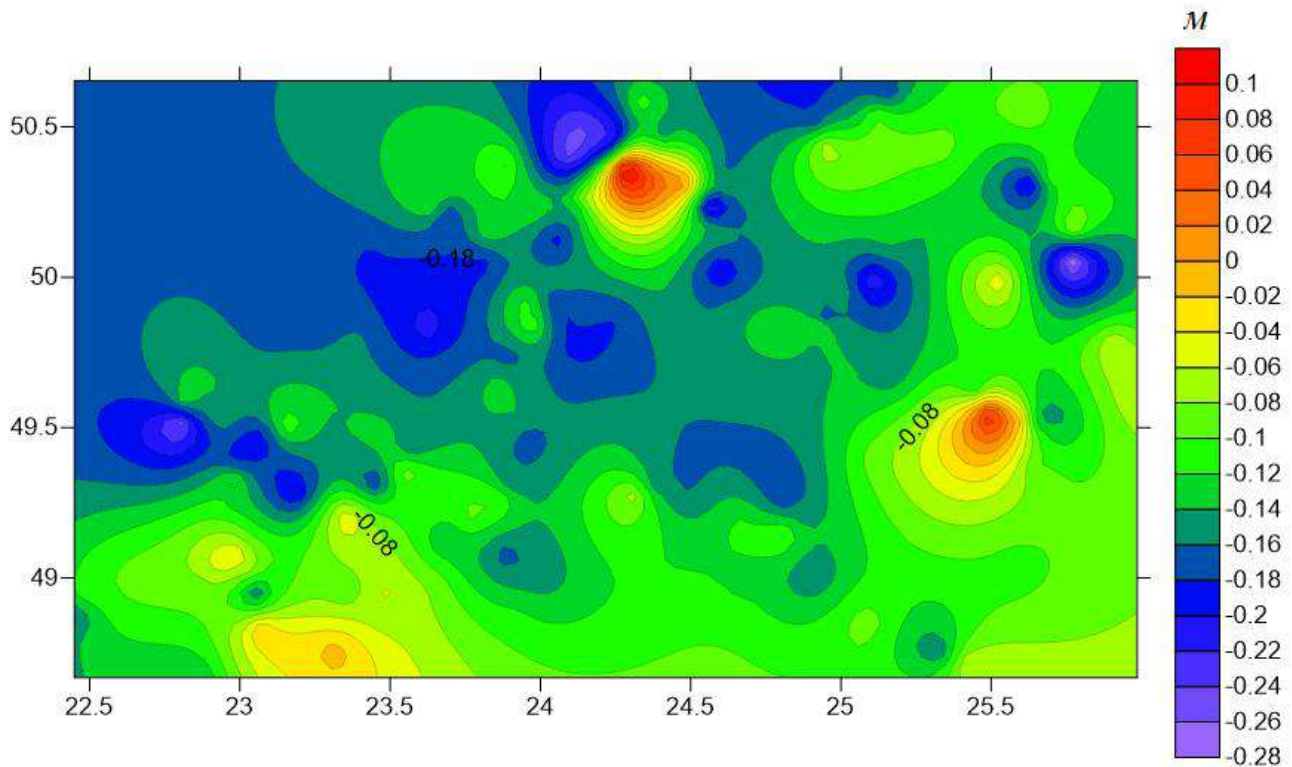
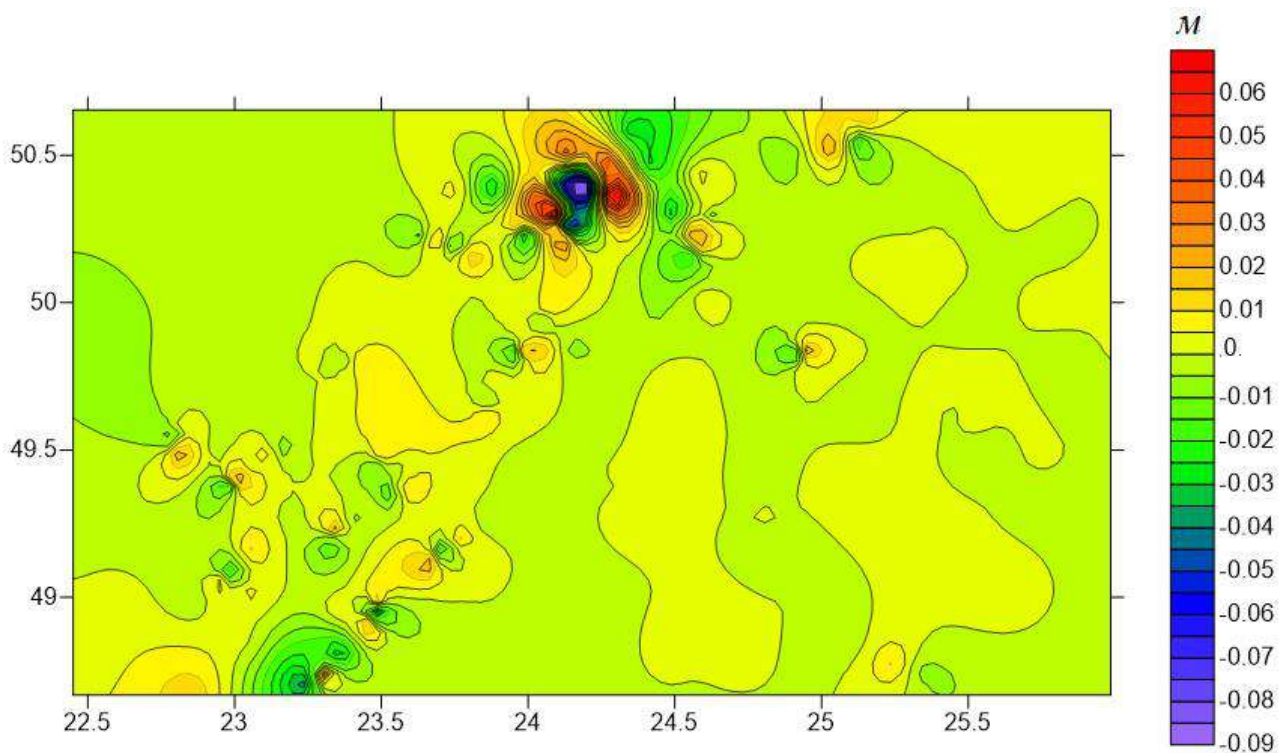


Рис. 4. Залишкові значення висот геоїда dN


 Рис. 5. Модель залишкових значень висот геоїда dN_m

 Рис. 6. Різниця $DdN = dN - dN_m$

Для всіх вищеописаних полів обчислено їхні основні характеристики, а саме мінімальне та максимальне значення і стандартне відхилення. Ці характеристики відображено в табл. 1.

З використанням одержаної моделі обчислено висоти геоїда на пунктах нівелювання I класу лінії Львів – Шегині, що здійснено для приєднання висотної мережі України до Об'єднаної європейської нівелірної

мережі UELN [Zablotskyi et al., 2021]. У табл. 2 подано значення висот геоїда, отриманих із GNSS-вимірів та з моделі, а також їх різниці.

Таблиця 1

Основні характеристики розглянутих полів

	Мінімальне значення, м	Максимальне значення, м	Стандартне відхилення, м
dN	-0,30	0,21	0,14
dN_m	-0,28	0,13	0,14
DdN	-0,12	0,08	0,01

Таблиця 2

Порівняння модельних і обчислених висот геоїда

Назва пункту	Висоти геоїда із GNSS-нівелювання, м	Модельні висоти геоїда, м	Різниці, м
14	31,276	31,398	0,12
A0124	31,480	31,628	0,15
A0637	30,762	30,879	0,12
A0705	32,050	32,210	0,16
A0739	32,492	32,637	0,15
A0788	31,061	31,175	0,11
A0871	32,508	32,655	0,15
A0989	32,331	32,452	0,12
A1499	31,020	31,140	0,12
A1951	31,210	31,351	0,14
A2030	31,791	31,928	0,14
A2562	30,683	30,790	0,11
A2618	30,971	31,113	0,14
A2714	30,686	30,801	0,11
A4806	31,497	31,633	0,14
Zatoka	30,812	30,944	0,13
5290	30,729	30,839	0,11

Середнє значення отриманих різниць становить 13,02 см, що повністю узгоджується зі значенням різниці між Балтійською та Європейською системами висот по лінії Львів – Шегині, яке становить на основі геометричного нівелювання 12,96 см.

Наукова новизна та практична значущість

Уперше здійснено апробацію СТНА-функцій для побудови регіональної моделі геоїда. Обчислено геометричну модель геоїда на територію Львівської області та виконано оцінку точності отриманої моделі на залежних та незалежних даних. СКП одержаної моделі становила близько 2 см, що відповідає точності GNSS-вимірів. Отриману модель можна використовувати як трансформаційне поле на територію Львівської області.

Висновки

Загалом у результаті виконання роботи:

- вперше апробовано для побудови регіональної моделі геоїда СТНА-метод;
- обчислено геометричну модель геоїда на територію Львівської області та виконано оцінку точності цієї моделі (СКП – приблизно 2 см);
- з використанням отриманої моделі обчислено висоти геоїда на пунктах нівелювання I класу лінії Львів – Шегині, що здійснено для приєднання висотної мережі України до Об'єднаної європейської нівелірної мережі UELN. Середнє значення одержаних різниць дорівнює 13,02 см, тоді як різниця, отримана з геометричного нівелювання, становить 12,96 см;
- обґрунтовано необхідність побудови моделі гравіметричного геоїда на цю територію для порівняння отриманих результатів.

Література

- Denker H. (2013). Regional gravity field modeling: Theory and practical results: monograph in G. Xu (ed.), Sciences of Geodesy – II, Chapter 5, 185–291, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-28000-9_5.
- Denker H. (2015). A new European gravimetric (quasi)geoid EGG2015. Poster presented at XXVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), Earth and Environmental Sciences for Future Generations, 22 June – 02 July 2015, Prague, Czech Republic.
- Dzhuman B. B. (2017). Modeling of the Earth gravitational field using spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 86, 5–10.
- Dzhuman B. B. (2018) Application of the second Neumann's method to spherical functions on a spherical trapezium. *Modern achievements in geodetic science and production. No. II(36)6* 21–24. (in Ukrainian).
- Dzhuman B., Zablotskyi F. (2020). About the need of modernization the Ukrainian height system. *GeoTerrace-2020-004*, Lviv, 5.
- Eteje S. O., Oduyebo O. F., Olulade Sunday A. (2018). Procedure for the determination of Local Gravimetric-Geometric Geoid Model. *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering, IJASRE*, 4 (8), 206–214.
- Haines G. V. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 90, 2583–2591.
- Ince E. S., Barthelmes F., Reißland S., Elger K., Förste C., Flechtner F., Schuh H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans. *Earth System Science Data*, 11, 647–674. DOI: <http://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>.
- Kao S., Chen S., Huang H., Shen Y. (2014). Using a least squares support vector machine to estimate a local

- geometric geoid model. *Bol. Ciênc. Geod., sec. Artigos, Curitiba, Vol. 20, No 2*, 427–443.
- Kotsakis C., Sideris M. (1999). On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks. *Journal of Geodesy* 73, 412–421. URL: <https://doi.org/10.1007/s001900050261>
- Krarup T. (1969). A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Geodætisk Institut, Meddelelse No. 44*, Copenhagen
- Kucher O. V., Starovierov V. S., Akchurina H. S. (2015). The direction of development of the height base of Ukraine. *Scientific and technical collection "Urban and spatial planning"*. K.: KNUBA, Vyp. 15, 236–240. (in Ukrainian)
- Marchenko A. N. (1998). Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities. Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. Lviv, Ukraine, 210.
- Mishra, U. N., Ghosh, J.K. (2017) Development of a Geoid Model by Geometric Method. *J. Inst. Eng. India Ser. A* 98, 437–442. URL: <https://doi.org/10.1007/s40030-017-0250-y>
- Moritz H. (1962). Interpolation and prediction of gravity and their accuracy. *Report Department of Geodetic Science, No. 24*, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA
- Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, 10, EGU2008-A-01891, EGU General Assembly,
- Schwabe J., Liebsch G., Schirmer U. (2016). Refined computation strategies for the new German Combined Quasigeoid GCG2016. Symposium on Geoid, Gravity and Height Systems (GGHS2016). 19–23 September 2016, Thessaloniki, Greece.
- Spiroiu I., Criuan R., Erhan C., Avramiuc N., Fluerau M. (2017). Geo-gravimetric Quasi-geoid Determination over Romania. *Journal of Geodesy, Cartography and Cadastre, No: 22*, 65–74.
- Szelachowska M., Kryński J. (2014). GDQM-PL13 – the new gravimetric quasigeoid model for Poland. *Geoinformation Issues, Vol. 6, No. 1 (6)*, 5–19.
- Zablotskyi F., Dzhuman B., Brusak I. (2021). On the accuracy of (quasi)geoid models relatively UELN/EVRS2000 height systems. *Modern achievements in geodetic science and production, No. 1(41)*, 21–31. (in Ukrainian).

F. ZABLOTSKYI, B. DZHUMAN*

Department of Higher Geodesy and Astronomy, LvivPolytechnic National University, 12, S. Bandery str., Lviv, 79013, Ukraine, tel. +38 (068) 7632139, email teojuman@gmail.com

CONSTRUCTION OF STHA-MODEL OF GEOMETRIC GEOID ON THE LVIV REGION AREA

Nowadays there is a need to modernize the high system of Ukraine, which requires its integration in the European Vertical Reference System EVRS. In this regard there is also a need to build a regional model of the geoid on the territory of our country, which would be well consistent with the model of the European geoid EGG2015. To obtain the optimal model, it is necessary to use both gravimetric and geometric data. In this case, the model is called gravimetric-geometric. This approach is used both when building a model of the European geoid and when building geoid models on the territory of different European countries. **Aim.** The purpose of this work is to build a regional geometric STHA-model of the geoid on the Lviv region area and assess its accuracy. In the future it is planned to build a gravimetric STHA-model of the geoid in the same area and compare the results. **Methods.** To build a geometric STHA-model of the geoid on the Lviv region area, the heights of the geometric geoid, obtained from GNSS-observations at the points of SGN of I, II and III classes, were used. RMS error of determination of geodetic heights, obtained from GNSS leveling in static mode, did not exceed 15 mm. 205 values of the calculated heights of the geoid were used to build the geoid model. 8 values were not involved in the construction of the model, because they were used for an independent assessment of model accuracy. **Results.** The regional model of geoid within the "Remove-Compute-Restore" procedure with introduction of regularization parameter is obtained. RMS error of the obtained model, calculated on the basis of the data used in its construction, is 12 mm, and on other independent data is 25 mm. **Scientific novelty and practical significance.** For the first time STHA-functions were tested to build a regional geoid model. The geometric model of the geoid on the Lviv region area is calculated and the accuracy of the obtained model is estimated on the basis of dependent

and independent data. The RMS error of the obtained model was about 2 cm, which corresponds to the accuracy of GNSS-measurements. The obtained model can be used as a transformation field on the Lviv region area.

Key words: model, geoid, STHA-method, GNSS-leveling.

References

- Denker H. (2013). Regional gravity field modeling: Theory and practical results. Monograph in G. Xu (ed.), *Sciences of Geodesy – II*, Chapter 5, 185–291, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-28000-9_5
- Denker H. (2015). A new European gravimetric (quasi)geoid EGG2015. Poster presented at XXVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), Earth and Environmental Sciences for Future Generations, 22 June – 02 July 2015, Prague, Czech Republic.
- Dzhuman B. B. (2017). Modeling of the Earth gravitational field using spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 86, 5–10.
- Dzhuman B. B. (2018) Application of the second Neumann's method to spherical functions on a spherical trapezium. *Modern achievements in geodetic science and production*, II(36), 21–24. (in Ukrainian).
- Dzhuman B., Zablotskyi F. (2020). About the need of modernization the Ukrainian height system. *GeoTerrace-2020-004*. Lviv, 5.
- Eteje S. O., Oduyebo O. F., Olulade Sunday A. (2018). Procedure for the determination of Local Gravimetric-Geometric Geoid Model. *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering, IJASRE*, 4 (8), 206–214.
- Haines G. V. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 90, 2583–2591.
- Ince E. S., Barthelmes F., Reißland S., Elger K., Förste C., Flechtner F., Schuh H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans. *Earth System Science Data*, 11, 647–674. DOI: <http://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>.
- Kao S., Chen S., Huang H., Shen Y. (2014). Using a least squares support vector machine to estimate a local geometric geoid model. *Bol. Ciênc. Geod., sec. Artigos, Curitiba*, Vol. 20, No 2, 427–443.
- Kotsakis, C., Sideris, M. (1999). On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks. *Journal of Geodesy*, 73, 412–421. <https://doi.org/10.1007/s001900050261>
- Krarup T. (1969). A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Geodætisk Institut, Meddelelse*, No. 44, Copenhagen
- Kucher O. V., Starovierov V. S., Akchurina H. S. (2015). The direction of development of the height base of Ukraine. K.: KNUBA. *Scientific and technical collection "Urban and spatial planning"*, Vyp. 15, 236–240. (in Ukrainian).
- Marchenko A. N. (1998). Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities. Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. Lviv, 210.
- Mishra U. N., Ghosh J. K. (2017). Development of a Geoid Model by Geometric Method. *J. Inst. Eng. India Ser. A* 98, 437–442. <https://doi.org/10.1007/s40030-017-0250-y>
- Moritz H. (1962). Interpolation and prediction of gravity and their accuracy. *Report Department of Geodetic Science*, No. 24, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA
- Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, 10, EGU2008-A-01891, EGU General Assembly.
- Schwabe J., Liebsch G., Schirmer U. (2016). Refined computation strategies for the new German Combined Quasigeoid GCG2016. *Symposium on Geoid, Gravity and Height Systems (GGHS2016)*. 19–23 September 2016, Thessaloniki, Greece.
- Spiroiu I., Crișian R., Erhan C., Avramiuc N., Fluerau M. (2017). Geo-gravimetric Quasi-geoid Determination over Romania. *Journal of Geodesy, Cartography and Cadastre*, No: 22, 65–74.
- Szelachowska M., Kryński J. (2014). GDQM-PL13 – the new gravimetric quasigeoid model for Poland. *Geoinformation Issues*, Vol. 6, No 1 (6), 5–19.
- Zablotskyi F., Dzhuman B., Brusak I. (2021). On the accuracy of (quasi)geoid models relatively UELN/EVRS2000 height systems. *Modern achievements in geodetic science and production*, I(41), 21–31. (in Ukrainian)