УДК 528.27

Б. ДЖУМАН

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. Карпінського, 6, Львів, 79013, Україна, тел. +38(068)7632139, ел. пошта: teojuman@gmail.com

ПРО ПЕРЕХІД ВІД ГЛОБАЛЬНИХ ДО ЛОКАЛЬНИХ СФЕРИЧНИХ ГАРМОНІК

Для побудови параметричної моделі регіонального гравітаційного або магнітного поля здебільшого використовують сферичні функції Лежандра цілого порядку і дійсного ступеня. Такий спосіб має певні переваги порівняно з іншими підходами і представлений низкою методів залежно від області визначення базових функцій. Серед основних методів можна виділити такі: SCHA – областю визначення є сферичний сегмент, ASHA – областю визначення є півсфера, STHA – областю визначення є сферична трапеція. Метод STHA має істотні переваги порівняно з іншими методами. Вони полягають не тільки у доволі простих і зручних виразах для обчислення як самих функцій, так і їх похідних, але і в тому, що базова система функцій володіє властивістю ортогональності на довільній сферичній трапеції, що дає змогу використовувати для моделювання регіонального гравітаційного чи магнітного полів модифікований метод Неймана. Важливим питанням є зв’язок між глобальними та регіональними базовими функціями у відповідній їм області визначення. Виявлено такий зв’язок між SCHA-функціями і глобальними сферичними функціями Лежандра, а також між ASHA-функціями і глобальними сферичними функціями Лежандра. Проте і сьогодні залишається актуальним питання про встановлення зв’язку між STHA-функціями та глобальними сферичними функціями Лежандра. **Мета.** Мета роботи полягає у виявленні зв’язку між STHA-функціями і глобальними сферичними функціями Лежандра. **Методика.** Спершу було виконано трансформацію STHA-функцій зі сферичної трапеції на сферу. Для цього ми ввели у ці функції відповідні параметри, а відтак отримали формули переходу від STHA-функцій до глобальних сферичних функцій Лежандра першого роду. **Результати.** Для апробації одержаних формул здійснено розклад глобальної сферичної функції $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ у ряд за STHA-функціями до 4 ступеня/порядку на сферичній трапеції із координатами вершин $\theta_{\min}=20°, \theta_{\max}=70°, \lambda_{\min}=30°, \lambda_{\max}=50°$. Похибка розкладу глобальної сферичної функції Лежандра в ряд за STHA-функціями була меншою за 5 %. **Наукова новизна і практична значущість.** У роботі показано, що STHA-функції у разі задавання певних параметрів можуть трансформуватися у глобальні сферичні функції Лежандра. Також вперше виведено аналітичні формули переходу від глобальних сферичних функцій Лежандра до STHA-функцій. Такий перехід з практичного погляду дає змогу з появою нових даних уточнювати глобальні моделі, які вже існують, з використанням регіональних моделей.

Ключові слова: сферичні функції, STHA-функції, сферична трапеція.

Вступ

Для побудови параметричної моделі глобального гравітаційного чи магнітного полів Землі звичайно використовують як базову систему функцій сферичні функції Лежандра цілого степеня і порядку, які ввели ще Лежандр і Гаусс та властивості яких добре вивчені. Такі моделі поділяють на моделі високої та надвисокої розрізнювальної здатності, які отримують із залученням великої кількості різнорідних наземних та супутникових даних та використовують для практичних і теоретичних геодезичних завдань (наприклад, моделі XGM2019e_2159 [Zingerle et. al., 2019], EGM2008 [Pavlis et. al., 2008] та ін.), та моделі низької та середньої розрізнювальної здатності, які отримують з використанням одного чи двох видів даних і які здебільшого слугують для уточнення деяких гармонічних коефіцієнтів низьких порядків (наприклад, моделі ITSG-Grace2018 [Mayer-Gürr et. al., 2018], GOCO06s [Kvas et. al., 2019] та ін.). Своєю чергою для отримання параметричної моделі регіонального або локального гравітаційного чи магнітного полів здебільшого використовують сферичні функції Лежандра дійсного степеня і цілого порядку, які залежно від області визначення формують різні методи: SCHA (областю визначення є сегмент сфери) [Haines, 1985; De Santis & Torta, 1997; Hwang & Chen, 1997], ASHA (областю визначення є півсфера) [De Santis, 1992; Джуман, 2014; Marchenko &Dzhuman, 2015], STHA – spherical trapezium harmonic analysis (область визначення – сферична трапеція) [Dzhuman, 2017]. Метод STHA має низку переваг над іншими методами. Вони полягають не тільки у доволі простих і зручних виразах для обчислення як самих функцій, так і їх похідних [Dzhuman, 2018], але і в тому, що базова система функцій володіє властивістю ортогональності на довільній сферичній трапеції, що дає змогу використати для моделювання регіонального гравітаційного чи магнітного полів модифікований метод Неймана [Джуман, 2018б]. Наприклад, застосування STHA-функцій для моделювання параметрів іоносфери здійснено в [Янків-Вітковська & Джуман, 2018], тоді як в [Sumaruk et. al., 2019] наведено теоретичне обґрунтування використання цих функцій для моделювання регіонального магнітного поля Землі.

Важливе питання – зв'язок між глобальними та регіональними базовими функціями у відповідній їм області визначення. У [Torta et. al., 1999] показано такий зв'язок між SCHA-функціями і глобальними функціями, тоді як у [Younis et. al., 2013] наведено відповідний зв'язок між ASHA-функціями і глобальними функціями. У роботі [Джуман, 2018а] знайдено аналітичний перехід між ASHA-функціями і глобальними функціями, інакше кажучи, дещо узагальнено формули, отримані у [Younis et. al., 2013]. Проте досі залишається актуальним питання про встановлення зв'язку між STHA-функціями та глобальними сферичними функціями.

Мета

Мета цієї роботи полягає у знаходженні зв'язку між STHA-функціями і глобальними сферичними функціями Лежандра.

Методика

Вигляд STHA-функцій такий [Dzhuman, 2017]:

$$\begin{aligned} R_{km}(\theta,\lambda) &= P_{km}(\theta)h_m^c(\lambda), \\ S_{km}(\theta,\lambda) &= P_{km}(\theta)h_m^s(\lambda), \end{aligned} \tag{1}$$

де $h_m^c(\lambda)$ і $h_m^s(\lambda)$ – це звичайні тригонометричні гармоніки:

$$\left.\begin{aligned} h_m^c &= \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \\ h_m^s &= \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

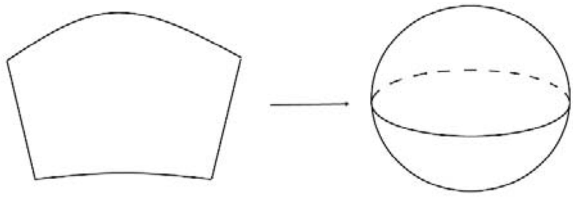

Рис. 1. Зміна області визначення функцій (1)

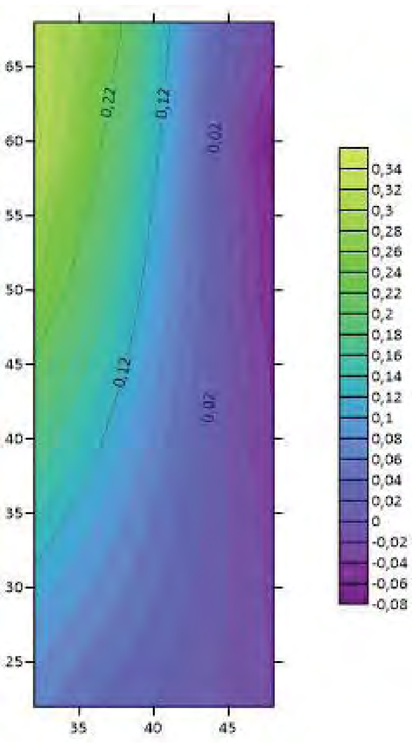

Рис. 2. Глобальна сферична функція $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ на сферичній трапеції $\begin{matrix}\theta_{\min} = 20°, \theta_{\max} = 70°, \\ \lambda_{\min} = 30°, \lambda_{\max} = 50°\end{matrix}$

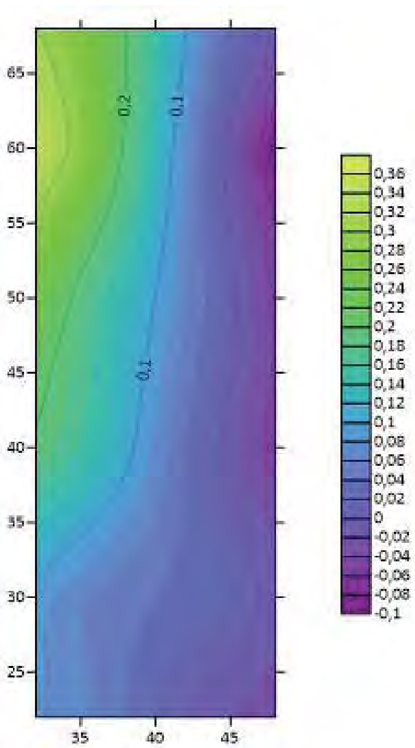

Рис. 3. Модель глобальної сферичної функції $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ на сферичній трапеції
$\theta_{\min} = 20°, \theta_{\max} = 70°,$
$\lambda_{\min} = 30°, \lambda_{\max} = 50°$
до 4 ступеня/порядку

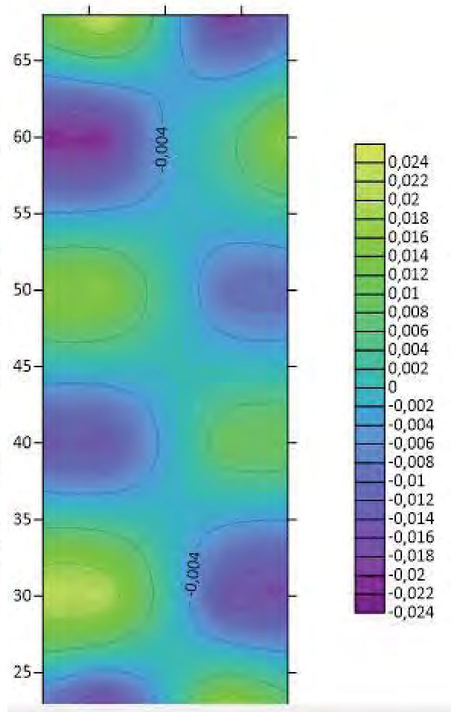

Рис. 4. Карта різниць між глобальною сферичною функцією $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ і її модельними значеннями

У формулі (2) λ_1 і λ_2 – мінімальне і максимальне значення азимутального кута досліджуваної сферичної трапеції відповідно. Своєю чергою функції $P_{km}(\theta)$ можна подати так:

$$\left.\begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta-\theta_{\min})\cdot F\left(m-n_k, n_k+m+1, 1+m, \frac{1-\cos(\theta-\theta_{\min})}{2}\right),\ if\ \theta_{\min}\le\theta\le\theta_{mean} \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m}\sin^m(\theta_{\max}-\theta)\cdot F\left(m-n_k, n_k+m+1, 1+m, \frac{1-\cos(\theta_{\max}-\theta)}{2}\right),\ if\ \theta_{mean}\le\theta\le\theta_{\max}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

де $\theta_{\min}$ і $\theta_{\max}$ – мінімальне і максимальне значення зенітної відстані досліджуваної сферичної трапеції відповідно, k і m – цілі числа; θ_{mean} – середнє значення, а саме $\theta_{mean} = (\theta_{\min}+\theta_{\max})/2$. Своєю чергою, значення n_k залежать від k, m і θ_0.

Знайдемо, як змінюватимуться функції (1), якщо їх область визначення змінити зі сферичної трапеції у сферу (рис. 1).

Для цього в рівняння (2) потрібно ввести таку заміну:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= 0\\ \lambda_2 &= 2\pi\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Тоді після незначних математичних перетворень отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}h_m^c &= \cos(m\lambda)\\ h_m^s &= \sin(m\lambda)\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Також необхідно ввести заміну в рівняння (3). Приймемо, що середина сферичної трапеції збігається з екватором, тобто $\theta_{mean} = \frac{\pi}{2}$, а різниця максимальної і мінімальної зенітних відстаней дорівнює $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Тоді отримаємо

$$\left.\begin{aligned}\theta_{\min} &= 0\\ \theta_{\max} &= \pi\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Підставивши заміну (6) у формулу (3), одержимо

$$\left.\begin{aligned} P_{nm}(\theta) &= \sin^m(\theta)\cdot F\left(m-n, n+m+1, 1+m, \frac{1-\cos\theta}{2}\right),\ if\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ P_{nm}(\theta) &= (-1)^{n+m}\sin^m(\pi-\theta)\cdot F\left(m-n, n+m+1, 1+m, \frac{1-\cos(\pi-\theta)}{2}\right),\ if\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

або остаточно

$$P_{nm}(\theta) = \sin^m(\theta)\cdot F\left(m-n, n+m+1, 1+m, \frac{1-\cos\theta}{2}\right),\ if\ 0\le\theta\le\pi \tag{8}$$

Із формул (5) і (8) очевидно, що ми отримали глобальні сферичні функції Лежандра.

Розглянемо перехід між глобальними і STHA-функціями на довільній сферичній трапеції. Для цього за аналогією з [Torta et. al., 1999] і [Younis et. al., 2013] розкладемо глобальну сферичну функцію у ряд за STHA-функціями:

$$P_{nm}(\cos\theta)\frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{k}\left(A_{k\mu}^{n,m,c(s)}\cos\left(2\pi\mu\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) + B_{k\mu}^{n,m,c(s)}\sin\left(2\pi\mu\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\right).P_{k\mu}(\theta). \tag{9}$$

Результати

Виконаємо розклад (9) для глобальної функції $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ на сферичній трапеції $\theta_{\min} = 20°, \theta_{\max} = 70°, \lambda_{\min} = 30°, \lambda_{\max} = 50°$ до 4 ступеня/порядку методом найменших квадратів.

Функцію $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ зображено на рис. 2, модельні значення цієї функції подано на рис. 3, а їх різниці – на рис. 4.

Похибка розкладу глобальної функції Лежандра в ряд за STHA-функціями становить менше ніж 5 %.

Наукова новизна і практична значущість

У роботі показано, що STHA-функції у разі задавання певних параметрів можуть трансформуватися у глобальні сферичні функції Лежандра. Також вперше виведено аналітичні формули переходу від глобальних сферичних функцій Лежандра до STHA-функцій. Такий перехід з практичного погляду дає змогу із появою нових даних уточнювати вже сформовані глобальні моделі з використанням регіональних моделей.

Висновки

Викладене вище дає підстави зробити такі висновки:

- вперше виведено аналітичні формули переходу від глобальних сферичних функцій Лежандра до STHA-функцій;
- здійснено апробацію отриманих формул на основі розкладу глобальної сферичної функції Лежандра в ряд за STHA-функціями. Похибка такого розкладу менша за 5 %;
- показано, що STHA-функції в граничному випадку можуть конвертуватися у глобальні сферичні функції Лежандра першого роду.

Література

Джуман Б. Б. (2014). Апроксимація аномалій сили ваги методом ASHA на територію Арктики. *Геодезія, картографія та аерофотознімання*, 80, С. 62–68.

Джуман Б. Б. (2018а). Зв'язок між глобальним та регіональним гравітаційним полем. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, Вип. І (35), С. 79–82.

Джуман Б. Б. (2018б). Застосування другого методу Неймана до сферичних функцій на сферичній трапеції. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, Вип. ІІ (36), С. 21–24.

Янків-Вітковська Л. М. Джуман Б. Б. (2018). Апроксимація параметрів іоносфери з використанням сферичних функцій. *Космічна наука і технологія*, Вип. 6 (115), С. 74–79.

De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.,* 19, 1065–1067.

De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *J. of Geodesy,* 71, 526–532.

Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. Geodesy, cartography and aerial photography, Vol. 86, pp. 5–10.

Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the regional gravitational field using first and second derivative of spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography,* Vol. 88, pp. 5–12.

Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 90, 2583–2591.

Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophys. J. Int*., 129, 450–460.

Kvas, Andreas; Mayer-Gürr, Torsten; Krauss, Sandro; Brockmann, Jan Martin; Schubert, Till; Schuh, Wolf-Dieter; Pail, Roland; Gruber, Thomas; Jäggi, Adrian; Meyer, Ulrich (2019): The satellite-only gravity field model GOCO06s. GFZ Data Services. http://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.002

Marchenko A., Dzhuman B. (2015). Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project. *Geodynamics*, Vol. 1(18), pp. 7–17.

Mayer-Gürr, T., Behzadpour, S., Ellmer, M., Klinger, B., Kvas, A., Strasser, S., & Zehentner, N. (2018). *ITSG-Grace2018: The new GRACE time series from TU Graz*. Abstract from GRACE / GRACE-FO Science Team Meeting 2018, Potsdam, Germany.

Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, 10, EGU2008-A-01891, EGU General Assembly.

Sumaruk, Yu. P., Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2019). Modeling of regional magnetic field applying spherical functions: theoretical aspect. *Geofizicheskiy zhurnal*, Vol. 41(1), pp. 180–191.

Torta J. M., De Santis A., Lowes F. J. (1999). Spherical cap harmonics revisited and their relationship to ordinary spherical harmonics. *Phys. Chem. Earth*., Vol. 24, pp. 935–941.

Younis A., Jager R., Becker M. (2013). Transformation of global spherical harmonic models of the gravity field to a local adjusted spherical cap harmonic model. *Arab. J. Geosci*., Vol. 6, pp. 375–381.

Zingerle Ph., Pail R., Gruber Th., Oikonomidou X. The experimental gravity field model XGM2019e. GFZ Data Services, 2019, http://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.007

B. DZHUMAN

Department of Higher Geodesy and Astronomy, Lviv Polytechnic National University, 6, Karpinsky str., Lviv, 79013, Ukraine, +38(068)7632139, e-mail teojuman@gmail.com

ABOUT THE TRANSITION FROM GLOBAL TO LOCAL SPHERICAL HARMONICS

In order to construct a parametric model of a regional gravitational or magnetic fields spherical Legendre functions of integer order and real degree are mainly used. Such way has several advantages over other approaches and is represented by a number of methods depending on the definition area of basic functions. Among the main methods are the following: SCHA – definition area is a spherical segment, ASHA – definition area is hemisphere, STHA – definition area is spherical trapezium. The STHA-method has significant advantages over other methods. These advantages are not only in simple enough and convenient expressions for calculating both the functions themselves and their derivatives, but also in fact that the basic system of functions has the orthogonality on an arbitrary spherical trapezium, which allows to use the modified Neumann method for modeling the regional gravitational or magnetic fields. An important issue is the relationship between global and regional basic functions in their respective area of definition. This relationship is found between SCHA-functions and Legendre global spherical functions, as well as between ASHA-functions and Legendre global spherical functions. However the question of finding a relationship between STHA-functions and Legendre's global spherical functions remains relevant today. **Aim.** The purpose of this work is to find the relationship between the

STHA-functions and Legendre's global spherical functions. **Method.** The transformation of STHA-functions from a spherical trapezium to a sphere was first performed. For this purpose the corresponding parameters were entered into these functions. The next step is to obtain formulas for the transition from STHA-functions to Legendre global spherical functions of first kind. **Results.** To validate the obtained formulas, the global spherical function $P_{22}(\cos\theta)\cos(2\lambda)$ was extended in a series of STHA-functions up to 4 degrees/order on a spherical trapezium with vertices $\theta_{min}=20°, \theta_{max}=70°, \lambda_{min}=30°, \lambda_{max}=50°$. The error of the extention of the Legendre's global spherical function into a series of STHA-functions was less than 5 %. **Scientific novelty and practical significance.** This paper shows that STHA-functions can be transformed into Legendre global spherical functions when given certain parameters. Analytical formulas for the transition from Legendre's global spherical functions to STHA-functions were also found for the first time. This transition, from a practical point of view, makes it possible to refine existing global models using regional models as new data emerge.

Key words: spherical functions, STHA-functions, spherical trapezium.

References

Dzhuman B. B. (2014). Aproksymatsiia anomalii syly vahy metodom ASHA na terytoriiu Arktyky. *Heodeziia, kartohrafiia ta aerofotoznimannia,* 80, pp. 62–68.

Dzhuman B. B. (2018a). Zviazok mizh hlobalnym ta rehionalnym hravitatsiinym polem. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva,* Vyp. I (35), pp. 79–82.

Dzhuman B. B. (2018б). Zastosuvannia druhoho metodu Neimana do sferychnykh funktsii na sferychnii trapetsii. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva*, Vyp. II (36), pp. 21–24.

Yankiv-Vitkovska L. M., Dzhuman B. B. Aproksymatsiia parametriv ionosfery z vykorystanniam sferychnykh funktsii. *Kosmichna nauka i tekhnolohiia*, Vyp. 6 (115), 2018, pp. 74–79.

De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.,* 19, 1065–1067.

De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *J. of Geodesy*, 71, 526–532.

Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. *Geodesy, cartography and aerial photography*, Vol. 86, pp. 5–10.

Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the regional gravitational field using first and second derivative of spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography,* Vol. 88, pp. 5–12.

Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res*., 90, 2583–2591.

Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophys. J. Int.*, 129, 450–460.

Kvas, Andreas; Mayer-Gürr, Torsten; Krauss, Sandro; Brockmann, Jan Martin; Schubert, Till; Schuh, Wolf-Dieter; Pail, Roland; Gruber, Thomas; Jäggi, Adrian; Meyer, Ulrich (2019): The satellite-only gravity field model GOCO06s. GFZ Data Services. http://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.002

Marchenko, A. Dzhuman, B. (2015). Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project. *Geodynamics*, Vol. 1(18), pp. 7–17.

Mayer-Gürr, T., Behzadpour, S., Ellmer, M., Klinger, B., Kvas, A., Strasser, S., & Zehentner, N. (2018). *ITSG-Grace2018: The new GRACE time series from TU Graz*. Abstract from GRACE / GRACE-FO Science Team Meeting 2018, Potsdam, Germany.

Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, 10, EGU2008–A–01891, EGU General Assembly.

Sumaruk, Yu. P., Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2019). Modeling of regional magnetic field applying spherical functions: theoretical aspect. *Geofizicheskiy zhurnal,* Vol. 41(1), pp. 180–191.

Torta J. M., De Santis A., Lowes F. J. (1999). Spherical cap harmonics revisited and their relationship to ordinary spherical harmonics. *Phys. Chem. Earth.*, Vol. 24, pp. 935–941.

Younis A., Jager R., Becker M. (2013). Transformation of global spherical harmonic models of the gravity field to a local adjusted spherical cap harmonic model. *Arab. J. Geosci*., Vol. 6, pp. 375–381.

Zingerle Ph., Pail R., Gruber Th., Oikonomidou X. (2019). The experimental gravity field model XGM2019e. GFZ Data Services, http://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.007