

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ТІЛІ З ДЕФЕКТОМ

© Станкевич О., 2021

Наведено розв’язок динамічної задачі про визначення хвильового поля переміщень на поверхні пружного півпростору, спричиненого розкриттям внутрішньої тріщини під дією крутих зусиль. На основі розв’язків крайових інтегральних рівнянь показано зміну амплітудно-частотних характеристик пружних коливань на поверхні твердого тіла залежно від розмірів дефекту.

Ключові слова: пружні хвилі; тріщина скруту; граничні інтегральні рівняння.

Вступ

Динамічна локальна перебудова структури матеріалів під дією внутрішніх напружень призводить до зміни кристалічної решітки, утворення та руху мікро- і макродефектів. Цей процес супроводжується поширенням у тілі пружних акустичних хвиль збурень. Джерелами випромінювання хвиль можуть бути вихід дислокацій на поверхню, утворення скупчень дислокацій, процеси утворення, підростання і руху тріщиноподібних дефектів тощо. Досягши поверхні тіла, пружні хвилі спричиняють переміщення точок поверхні, що можна відповідно зареєструвати.

Дослідження параметрів хвильового поля переміщень, спричиненого внутрішніми структурними змінами у тілах, насамперед, важливе для сейсмології, геофізики, неруйнівного контролю [1–5]. Поля напружень і переміщень, породжені дифрагованими на тонких неоднорідностях хвилями, досліджено у працях [6–10]. Високоєфективним для розв’язування тривимірних динамічних задач для тіл із тріщинами і включеннями виявився метод граничних інтегральних рівнянь [8, 10, 11].

Постановка задачі

Розглянемо пружний ізотропний півпростір із вільною поверхнею S_0 , матеріал якого характеризується густиною ρ , модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν . Півпростір містить дискову тріщину радіусом a , яка займає область S_1 , паралельну до поверхні S_0 тіла та розташовану на глибині d . Протилежні поверхні $S_1^\pm$ дефекту зазнають дії самозрівноважених у часі t крутих зусиль $N_j^+(\mathbf{x}, t) = -N_j^-(\mathbf{x}, t) =$

$$= (-1)^{j+1} x_{j+1} \frac{\tau_0}{a} T(t), \quad j=1, 2, \quad \text{де } \tau_0 - \text{інтенсивність при-}$$

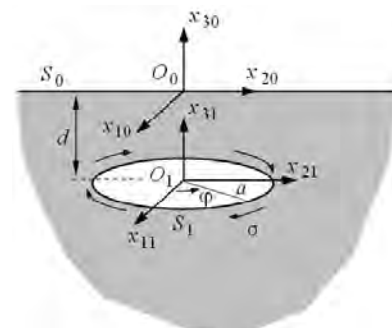


Рис. 1. Схема зміщення поверхонь тріщини у півпросторі

кладених зусиль, $T(t)$ – часова функція навантаження. Вибрано декартові системи координат $O_k x_1 x_2 x_{3k}$ ($k=0,1$), як показано на рис. 1. Контур тріщини вважаємо нерухомим.

Задача визначення хвильового поля переміщень на поверхні тіла в перетвореннях Фур'є за часом з урахуванням принципу причинності та нульових початкових умов зводиться до розв'язування диференціального рівняння руху відносно компонент вектора $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ пружних переміщень

$$\omega_2^{-2} \Delta_3 \tilde{\mathbf{u}} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) \text{grad div } \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

із крайовими умовами на поверхні півпростору

$$\tilde{\sigma}_{j3}(\mathbf{x}_0, \omega) = 0, \quad j=1,3, \quad \mathbf{x}_0 \in S_0 \quad (2)$$

і на поверхнях тріщини

$$\sum_{n=1}^3 \tilde{\sigma}_{nj}(\mathbf{x}_1, \omega) \cos(x_3, x_n) = (-1)^{j+1} (1 - \delta_{j3}) x_{j+1} \frac{\tau_0}{a} \tilde{T}(\omega), \quad j=1,3, \quad \mathbf{x}_1 \in S_1. \quad (3)$$

де $\Delta_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – тривимірний оператор Лапласа; δ_{ij} – символ Кронекера; $\tilde{u}_j, \tilde{\sigma}_{ij}$ – фур'є-трансформанти амплітудних значень компонент вектора переміщень u_j і тензора напружень σ_{ij} ; ω – параметр інтегрального перетворення; $\omega_n = \omega/c_n$; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$, $c_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} c_2$ – швидкості поширення у тілі поперечної та поздовжньої пружних хвиль.

Розв'язування задачі

На підставі принципу суперпозиції переміщення у довільній точці $\mathbf{x}_0$ з координатами (x_1, x_2, x_{30}) у системі координат $O_0 x_1 x_2 x_{30}$ подамо у вигляді суми переміщень від скруту тріщини і переміщень точок поверхні S_0 тіла

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{j0}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{2}{\omega_2^2} \left[\frac{\omega_2^2}{2} \frac{\partial P_{j0}^2}{\partial x_{30}} + \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial P_{30}^1}{\partial x_j} - (\Delta_2 + \omega_2^2) \frac{\partial P_{30}^2}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial P_{j1}^2}{\partial x_{310}}, \quad j=1,2, \\ \tilde{u}_{30}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \left[\Delta_2 (P_{30}^1 - P_{30}^2) + \frac{\omega_2^2}{2} P_{30}^1 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

Де $P_{jk}^n(x_{k0}, \omega) = \iint_{S_k} \Delta \tilde{u}_{jk}(\xi, \omega) \frac{\exp(i\omega_n |x_{k0} - \xi|)}{|x_{k0} - \xi|} dS_\xi$, $j=1,3$, $k=0,1$, $n=1,2$ – потенціали

Гельмгольца; $i = \sqrt{-1}$ уявна одиниця; $|x_0 - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$; (x_1, x_2, x_{310}) – координати точки $\mathbf{x}_0$ у системі координат $O_1 x_1 x_2 x_{31}$, $|x_{10} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{310}^2}$, $x_{310} = d$; невідомі функції $\Delta \tilde{u}_{j1}$ ($j=1,2$) характеризують стрибок зміщень точок протилежних поверхонь $S_1^\pm$ тріщини у напрямках координатних осей $O_1 x_j$; невідомі густини $\Delta \tilde{u}_{j0}$ ($j=1,3$) характеризують переміщення точок поверхні півпростору. Інтегральні подання (4) переміщень за допомогою потенціалів Гельмгольца тотожно задовольняють рівняння (1) й умови Зоммерфельда випромінювання на нескінченності.

Застосувавши до (4) співвідношення закону Гука, отримаємо вирази для напружень:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{j3}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{4G}{\omega_2^2} \left[-B_j + \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial^2 (P_{30}^1 - P_{30}^2)}{\partial x_j \partial x_{30}} - \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j0}^2 \right], \\ \tilde{\sigma}_{33}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{4G}{\omega_2^2} \left[-B_3 - \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{30}^1 + \Delta_2 (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{30}^2 \right],\end{aligned}\quad (5)$$

де

$$B_j = \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j1}^2, \quad j=1, 2, \quad B_3 = 0.$$

Вважаючи функції $\Delta \tilde{u}_{j1} (j=1, 2)$ тимчасово відомими та задовольнивши крайові умови (2) на поверхні півпростору, отримаємо систему граничних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих густин $\Delta \tilde{u}_{j0} (j=1, 3)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial^2 (P_{30}^1 - P_{30}^2)}{\partial x_j \partial x_{30}} - \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j0}^2 &= B_j, \quad j=1, 2, \quad x_0 \in S_0, \\ \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{30}^1 + \Delta_2 (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{30}^2 &= B_3.\end{aligned}\quad (6)$$

Застосувавши до (6) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_1, x_2 і скориставшись теоремою про згортку, одержимо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно $\Delta \tilde{u}_{j0}$. Застосувавши до розв'язків рівнянь обернене перетворення Фур'є, отримаємо подання густин $\Delta \tilde{u}_{j0}$ через функції $\Delta \tilde{u}_{j1} (j=1, 2)$ зміщення поверхонь тріщини у вигляді

$$\Delta \tilde{u}_{j0} = \frac{1}{\pi^2 \omega_2^2} \iint_{S_0} \int_0^\infty \frac{\rho}{R_2(\rho)} J_0(\rho|\xi - \eta|) B_j d\rho dS_\eta. \quad (7)$$

де $R_2(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \omega_2^2}$; $J_0(z)$ – функція нульового порядку першого роду дійсного аргументу z . Підставивши (7) у співвідношення (4) та скориставшись результатами роботи [10], запишемо вирази для переміщень на поверхні S_0 півпростору, спричинені динамічним скрутом тріщини, у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{j0}(\mathbf{x}_0, \omega) &= 2 \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_1} \Delta \tilde{u}_{j1}(\xi, \omega) \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}_{10} - \xi|)}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} dS_\xi, \quad j=1, 2, \\ \tilde{u}_{30}(\mathbf{x}_0, \omega) &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

На основі виразів (8) можна зробити такі висновки:

1. Під час розглянутого утворення тріщини кручення у тілі поширюються лише горизонтально поляризовані (SH) поперечні хвилі зі швидкістю c_2 .
2. Вертикальні переміщення точок поверхні півпростору відсутні.
3. Наявність вільної поверхні півпростору призводить до того, що амплітуди зсувних переміщень на ній удвічі перевищують свої аналоги для випадку нескінченного тіла.
4. Інтегрування здійснюється по скінченній області тріщини, що істотно під час числових розрахунків.

Результати та їх обговорення

Нехай функції зміщення поверхонь тріщини описуються залежностями

$$\Delta u_{11}(x) = \sqrt{a^2 - r^2} r \sin \varphi, \quad \Delta u_{21}(x) = -\sqrt{a^2 - r^2} r \cos \varphi. \quad (9)$$

Підставивши (9) у (8) та виконавши інтегрування по круговій області розташування дефекту, отримаємо остаточні вирази для переміщень

$$u_{\varphi}(r^*, \omega) = 4\pi a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} P(\tau) e^{-d R_2(\tau)} J_1(\tau r^*) d\tau, \quad u_3(r^*, \omega) = 0, \quad (10)$$

$$P(\tau) = \left(\frac{3}{a^2 \tau^2} - 1 \right) \sin a\tau - \frac{3}{a\tau} \cos a\tau.$$

Залежності амплітудних нормованих значень переміщень $|u_{\varphi}|/a$ від хвильового числа $\omega_2 a$ наведено на рис. 2. Глибина d залягання тріщини дорівнює $2a$, відстань r^* від епіцентра до точки визначення переміщень – $8a$. Графіки починаються від статичних значень переміщень для $\omega_2 a = 0$, зростають до досягнення максимального значення, після чого, осцилюючи, знижуються, загасаючи.

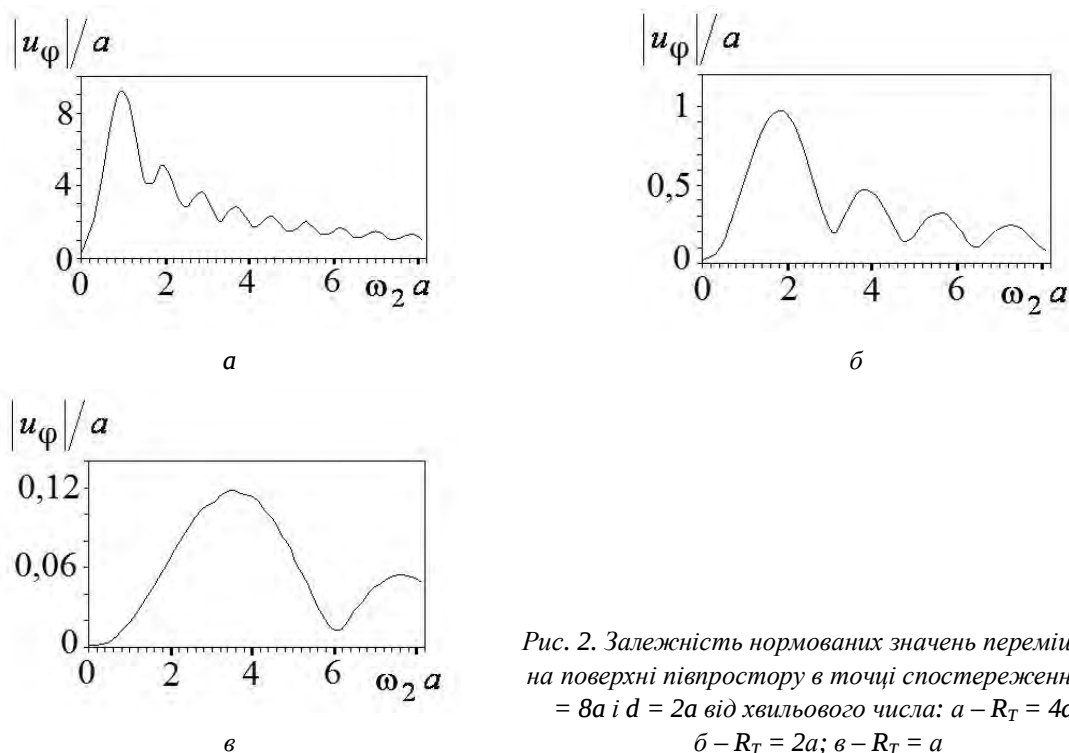


Рис. 2. Залежність нормованих значень переміщень на поверхні півпростору в точці спостереження $r^* = 8a$ і $d = 2a$ від хвильового числа: а – $R_T = 4a$; б – $R_T = 2a$; в – $R_T = a$

Проаналізувавши графічні залежності, бачимо, що збільшення розмірів тріщини призводить до зростання величини переміщень та звуження ширини смуги частот, які домінують. Зі збільшенням розмірів дефекту зменшується значення приведеної частоти, за якої амплітуди переміщень стають максимальними.

Висновки

Отримавши розв'язки тривимірної динамічної задачі для пружного півпростору, послабленого дископодібною тріщиною скруту, ми встановили, що характер коливань поверхні півпростору залежить від розмірів тріщини. Коливання осцилюють, поступово загасаючи. За умови

збільшення розмірів тріщини зростають амплітуди коливань точок поверхні півпростору, звужується смуга частот та зменшується значення частоти, за якої коливання досягають максимальних амплітуд. Отримані результати важливо враховувати під час неруйнівного контролю відповідальних об'єктів методом акустичної емісії (АЕ). За зміною параметрів сигналів АЕ можна встановити вид руйнування у конструкційному матеріалі, що водночас сприяє підвищенню ефективності оцінювання залишкового ресурсу об'єкта контролю.

Література

1. Takeo, M. Ground rotational motions recorded in near-source region of earthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, 1998, 25, 789–792. <https://doi.org/10.1029/98GL00511>
2. Вакулин А. В. Физика волнового сейсмического процесса. Петропавловск-Камчатский: Изд-во Камчатского педагогического университета, 2003. 150 с.
3. Reginald, H. Acoustic emission. Microseismic activity. Vol. 1. Principles, techniques and geotechnical applications, 2003, 297.
4. Андрейків О. Є., Скальський В. Р., Сулим Г. Т. Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування. Львів: Сполом, 2007. 480 с.
5. Назарчук З. Т., Скальський В. Р. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій. Т. 1. Теоретичні основи методу акустичної емісії. Київ: Наук. думка, 2009. 287 с.
6. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении. *Изв. РАН, Механика твердого тела*, 1992, № 3, 139–146.
7. Хай М. В., Станкевич В. З. Фундаментальний розв'язок квазістатичної задачі для півпростору з плоскими розривами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2002, № 3, 25–28.
8. Mykhas'kiv, V. Transient response of plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid. *Wave Motion*, 2005, 41, 133–144. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.06.003>
9. Грилицький М. Д., Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Дифракція SH-хвиль тонким прямолінійним тунельним включенням низької жорсткості в півпросторі. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2006, 49(4), 92–96.
10. Скальський В. Р., Станкевич О. М. Визначення переміщень на поверхні півпростору, спричинених утворенням внутрішньої тріщини скруту. *Вісник ДНУЗТу ім. академіка В. Лазаряна*, Вип. 33, Дніпропетровськ, 2010, 255–258.

O. Stankevych

Lviv Polytechnic National University

MATHEMATICAL MODELING OF ELASTIC WAVE PROPAGATION IN A BODY WITH A DEFECT

© Stankevych O., 2021

The solution of the dynamic problem of calculation the wave field of displacements on the surface of an elastic half-space caused by the opening of an internal crack under the action of torsional forces is presented. Based on the solutions of the boundary integral equations, the nature of the change in the amplitude-frequency characteristics of elastic oscillations on the surface of a rigid body depending on the size of the defect is shown.

Key words: elastic wave; crack of mode III; boundary integral equations method.

