ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 566, 2006, с. 33–40

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 566, 2006, p. 33–40

МАТРИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ З МІРАМИ

М. Стасюк, Р. Тацій

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 29 вересня 2005 р.)

Встановлено властивості некласичного інтеграла Рімана-Стільтьєса, на основі яких досліджуються лінійні матричні інтегральні рівняння та відповідні системи диференціальних рівнянь з мірами.

Ключові слова: лінійні матричні рівняння з мірами, інтеграл Рімана-Стільтьєса

2000 MSC: 34A37

УДК: 517.91

Вступ

Нехай I – відкритий інтервал дійсної осі R, $[a;b] \subset I$ – його компактний підінтервал, $BV[a;b]$ – клас функцій, обмеженої на $[a;b]$ варіації. Якщо f і $g \in BV[a;b]$, то умова

$$\Delta f(x)\Delta g(x) = 0 \qquad \forall x \in I, \tag{0.1}$$

де $\Delta f(x)$ і $\Delta g(x)$ – стрибки функцій f і g відповідно, є необхідною і достатньою умовою існування класичного інтеграла Рімана-Стільтьєса [1].

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\max|x_k-x_{k-1}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]\,. \tag{0.2}$$

Якщо f і g – скалярні функції, то умова (0.1) означає незбіг точок розривів цих функцій. Якщо ж ця умова не виконується, то значення інтеграла (0.2), взагалі кажучи, залежить від вибору проміжкових точок ξ_k, що накладає додаткові умови на стрибки Δf і Δg [2].

У цій роботі вивчається некласичний матричний інтеграл (0.2) за умови, що $\xi_k{=}x_{k-1}$. На основі такого означення інтеграла встановлюються властивості лінійних матричних інтегральних рівнянь типу Вольтерра-Стільтьєса. При цьому виявляється, що за умови (0.1) система лінійних диференціальних рівнянь

$$Y' = C'Y, \quad Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I, \tag{0.3}$$

де $C'(x)$ – узагальнена похідна матриці-функції обмеженої варіації $C(x)$, еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\,Y(t). \tag{0.4}$$

Така еквівалентність дає змогу однозначно ввести поняття розв'язку системи (0.3), що є природним узагальненням основних положень теорії Каратеодорі [3].

I. Матричний некласичний інтеграл Рімана-Стільтьєса

Нехай $BV^+_{loc}(I)$ – клас неперервних праворуч функцій обмеженої варіації на кожному замкненому підінтервалі відкритого інтервала I дійсної осі. Розглянемо матриці-функції $F(x)$ і $G(x)$ порядків $m \times k$ і $k \times n$ відповідно з елементами, що належать класу $BV^+_{loc}(I)$. Тоді, як відомо [4], справедливі такі зображення:

$$\begin{aligned} F(x) &= F_c(x) + F_b(x), \\ G(x) &= G_c(x) + G_b(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $F_c(x)$ і $G_c(x)$ – неперервні складові функцій $F(x)$ і $G(x)$, а $F_b(x)$ і $G_b(x)$ – їх функції стрибків:

$$\begin{aligned} F_b(x) &= \sum_{y\leqslant x}[F(y) - F(y-0)], \\ G_b(x) &= \sum_{y\leqslant x}[G(y) - G(y-0)], \quad y \in I. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для довільного замкненого інтервала $[a;b] \subset I$ визначимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b dF(x)G(x) \ &\overset{df}{=} \ \int\limits_a^b dF_c(x)G(x) + \\ &+ \sum_{a<x\leqslant b}[F(x) - F(x-0)]G(x-0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Легко переконатися, що інтеграл (1.3) можна визначити і як границю інтегральної суми [4], а саме:

$$\begin{aligned} &\int\limits_a^b dF(x)G(x) = \\ &= \lim_{\max|x_k-x_{k-1}|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[F(x_k) - F(x_{k-1}))]\,G(x_{k-1}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

де $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – довільне розбиття відрізка $[a;b]$.

Вкажемо деякі важливі властивості інтеграла (1.3), чи (1.4).

1. Для інтеграла (1.3) справджується білінійне співвідношення

$$\int_a^b [c_1 dF_1 + c_2 dF_2][k_1 G_1 + k_2 G_2] = c_1 k_1 \int_a^b dF_1 G_1 +$$

$$+ c_1 k_2 \int_a^b dF_1 G_2 + c_2 k_1 \int_a^b dF_2 G_1 + c_2 k_2 \int_a^b dF_2 G_2,$$

яке випливає з означення інтеграла (1.3), або (1.4).

2. Матриця-функція $H(x) = \int_a^x dF(t)G(t)$, $x \in I$ є неперервною праворуч функцією обмеженої варіації, а в точці розриву x_0 функції $F(x)$ її стрибок $\Delta H(x_0)$ дорівнює

$$\Delta H(x_0) = \Delta F(x_0) G(x_0 - 0). \qquad (1.5)$$

□ *Доведення.* Введемо позначення: $|A| = \max\limits_i \sum\limits_i |a_{ij}|$ – норма матриці $A = \|a_{ij}\|$, $V_a^b F(x) = \sup\limits_\sigma \sum\limits_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|$ – повна варіація матриці-функції $F(x)$ на інтервалі $[a; b]$. Тоді для довільного розбиття σ інтервала $[a; b]$ маємо

$$\sum_i |H(x_{i+1}) - H(x_i)| = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} dF(t)G(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i V_{x_i}^{x_{i+1}} F \sup_{t \in [x_i; x_{i+1}]} |G(t)| \leqslant V_a^b F \sup_{t \in [a;b]} |G(t)|,$$

тобто варіація матриці-функції $H(x)$ – обмежена на довільному замкненому підінтервалі з I. Нехай $x \in I$, а $s < x$. Тоді

$$|H(x) - H(s)| \leqslant V_s^x F \sup_{t \in [s;x]} |G(t)|,$$

а оскільки $F(x)$ – неперервна праворуч, то $\lim\limits_{x \to s+0} V_s^x F = 0$, тобто матриця $H(x)$ має елементи з класу $BV_{loc}^+(I)$. Співвідношення (1.5) випливає з означення інтеграла (1.3), чи (1.4), що й завершує доведення властивості 2. ■

3. Формула інтегрування частинами. Для інтеграла (1.3) або (1.4) вона має вигляд

$$\int_a^b dFG + \int_a^b FdG = FG\Big|_a^b - \sum_{a < x \leqslant b} \Delta F(x) \Delta G(x). \quad (1.6)$$

□ *Доведення.* Зауважимо, що

$$\int_a^b dFG = \int_a^b dF(x) \int_a^x dG(y) + F(b)G(a) - F(a)G(a),$$

$$\int_a^b FdG = -\int_a^b \left(\int_y^b dF(x) \right) dG(y) - F(b)G(a) + F(b)G(b).$$

Тому формулу (1.6) можна переписати у вигляді

$$\int_a^b dF(x) \int_a^x dG(y) = \int_a^b \left(\int_y^b F(x) dG(y) \right) -$$

$$- \sum_{a < x \leqslant b} \Delta F(x) \Delta G(x). \qquad (1.7)$$

Запишемо ліву частину формули (1.7), зобразивши матриці-функції F і G у вигляді суми неперервної та дискретної компонент, що породжує чотири інтеграли

$$\int_a^b d\left(F_c(x) + F_b(x)\right) \int_a^x d\left(G_c(y) + G_b(y)\right) =$$

$$= \int_a^b dF_c(x) \int_a^x dG_c(y) + \int_a^b dF_c(x) \int_a^x dG_b(y) + \qquad (1.8)$$

$$+ \int_a^b dF_b(x) \int_a^x dG_c(y) + \int_a^b dF_b(x) \int_a^x dG_b(y).$$

Аналогічно для інтеграла в правій частині (1.7) отримуємо вираз

$$\int_a^b \left(\int_y^b dF_c(x) \right) dG_c(y) + \int_a^b \left(\int_y^b dF_c(x) \right) dG_b(y) +$$
$$+ \int_a^b \left(\int_y^b dF_b(x) \right) dG_c(y) + \int_a^b \left(\int_y^b dF_b(x) \right) dG_b(y). \qquad (1.9)$$

Перші три інтеграли в виразах (1.8) і (1.9) збігаються, оскільки це класичні інтеграли Рімана-Стільтьєса і для них справджується формула інтегрування частинами. Запишемо четвертий інтеграл у виразі (1.8):

$$\int_a^b dF_b(x) \int_a^x dG_b(y) = \sum_{a < x \leqslant b} \Delta F_b(x) \int_a^{x-0} dG_b(y) =$$

$$= \sum_{a < x \leqslant b} \left(\sum_{a \leqslant y \leqslant x-0} \Delta F_b(x) \Delta G_b(y) \right) = \sum_{\substack{a < x \leqslant b \\ a < y < x}} \Delta F_b(x) \Delta G_b(y).$$

Зауважимо, що в останню суму не входять добутки $\Delta F_b(x) \Delta G_b(x)$.

Аналогічно запишемо четвертий інтеграл у виразі (1.9):

$$\int_a^b \left(\int_y^b dF_b(x) \right) dG_b(y) = \sum_{a < y \leqslant b} \left(\int_{y-0}^b dF_b(x) \right) \Delta G_b(y) =$$

$$= \sum_{a < y \leqslant b} \left(\sum_{y-0 \leqslant x \leqslant b} \Delta F_b(x) \Delta G_b(y) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{a < y \leqslant b \\ y < x \leqslant b}} \Delta F_b(x) \Delta G_b(y) + \sum_{a < x \leqslant b} \Delta F_b(x) \Delta G_b(x),$$

що й доводить формулу (1.7), тобто формулу інтегрування частинами (1.6). ■

Потрібно зауважити, що коли сума в (1.6) зникає, то формула інтегрування частинами набуває "класичного" вигляду. Зауважимо також, що формула інтегрування частинами (1.6) для інтеграла (1.3) чи (1.4) є частинним випадком аналога **формули Діріхле** [2].

Формула Діріхле. Якщо $(k \times k)$ матриця-функція $H(x, y)$ обмежена в прямокутнику $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ і є неперервною праворуч функцією обмеженої варіації за змінною x для довільного $y \in [a; b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b dF(x) \int\limits_a^x H(x, y)\, dG(y) =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_y^b dF(x) H(x, y) \right) dG(y) -$$

$$- \sum_{a \leqslant x \leqslant b} \Delta F(x) H(x-0, x-0) \Delta G(x), \qquad (1.10)$$

яку доводимо аналогічно, як формулу (1.7). Прийнявши в (1.10) $H(x, y) = E$, прийдемо до (1.7).

II. Фундаментальна матриця

Розглянемо інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^x dC(t) \cdot Y(t), \qquad (2.1)$$

де $Y(x)$ – n-вимірний вектор, а $C(x) = \{c_{ij}(x)\}$ – $(n \times n)$ матриця-функція з елементами, що належать класу $BV^+_{loc}(I)$, $x_0 \in I$.

Як відомо [4], це рівняння має єдиний розв'язок $Y(x) \in BV^+_{loc}$ і його стрибок $\forall x \in I$ визначається формулою

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) \cdot Y(x-0). \qquad (2.2)$$

Це твердження еквівалентне тому, що інтегральне рівняння

$$Y(x) = \int\limits_{x_0}^x dC(t) \cdot Y(t), \qquad (2.3)$$

має лише нульовий розв'язок.

Введемо матрицю-функцію двох змінних $B(x, s)$ як розв'язок матричного інтегрального рівняння

$$B(x, s) = E + \int\limits_s^x dC(t) \cdot B(t, s). \qquad (2.4)$$

Очевидно, що таке матричне рівняння має також єдиний розв'язок за змінною x в класі матриць-функцій з елементами з $BV^+_{loc}(I)$, оскільки кожний її стовпець має таку властивість.

Матрицю $B(x, s)$ називатимемо **фундаментальною матрицею** або **матрицею Коші** інтегрального рівняння (2.1). Матриці Коші притаманні властивості, що виражаються такими теоремами.

Теорема2.1. *Розв'язок інтегрального рівняння (2.1) зображається у вигляді*

$$Y(x) = B(x, x_0) \cdot Y(x_0). \qquad (2.5)$$

□ *Доведення.* Для доведення цього факту приймемо в (2.4) $s = x_0$ і помножимо обидві частини цього рівняння праворуч на $Y(x_0)$. Тоді матимемо

$$B(x, x_0) \cdot Y(x_0) = Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^x dC(t)\, B(t, t_0)\, Y(x_0),$$

звідки й випливає зображення (2.5). ■

Теорема2.2. *Матриця Коші $B(x, s)$ має такі властивості:*
1. Для довільних x', x'', $x''' \in I$

$$B(x''', x'') \cdot B(x'', x') = B(x''', x');$$

2. $B(x', x'') \cdot B(x'', x') = E$;

3. $B(x, s)$ – неперервна праворуч матриця-функція обмеженої варіації як за змінною x, так і за змінною s;

4. $B(x, s) = (E + \Delta C(x)) \cdot B(x-0, s)$;

5. $B(x, s) = B(x, s-0) \cdot (E + \Delta C(s))^{-1}$.

□ *Доведення.* 1. Покажемо, що матриця-функція $B(x''', x'') \cdot B(x'', x') - B(x''', x')$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$Y(x) = \int\limits_{x''}^x dC(t) \cdot Y(t),$$

тобто дорівнює нульовій матриці. Дійсно

$$B(x''', x'') \cdot B(x'', x') - B(x''', x') = B(x'', x') +$$

$$+ \int\limits_{x''}^{x'''} dC(t) \cdot B(t, x'') \cdot B(x'', x') - \int\limits_{x'}^{x'''} dC(t) \cdot B(t, x') - E =$$

$$= E + \int\limits_{x'}^{x''} dC(t) \cdot B(t, x') + \int\limits_{x''}^{x'''} dC(t) \cdot B(t, x'') \cdot B(x'', x') -$$

$$- \int\limits_{x'}^{x''} dC(t) \cdot B(t, x') - E - \int\limits_{x''}^{x'''} dC(t) \cdot B(t, x') =$$

$$= \int\limits_{x''}^{x'''} dC(t)\, [B(t, x'') \cdot B(x'', x') - B(t, x')],$$

що й доводить властивість 1.

2. Прийнявши в 1. $x''' = x'$, отримуємо

$$B(x', x'') \cdot B(x'', x') = B(x', x') = E.$$

3. Для довільних x_1, $x_2 \in I$ маємо

$$|B(x_2, s) - B(x_1, s)| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} dC(t) \cdot B(t, s) \right| \leqslant M \bigvee_{x_1}^{x_2} C(x),$$

де $M = \prod_x (1 + |\Delta C(x)|) \exp \bigvee_a^b C_c(x)$ [2], а $C_c(x) = C(x) - C_b(x)$, звідки негайно випливає обмеженість варіації $B(x,s)$ за змінною x.

З інтегрального рівняння (2.4) отримуємо умову стрибка за змінною x

$$\Delta_x B(x,s) = \Delta C(x) \cdot B(x-0,s),$$

а неперервність праворуч випливає з властивості 2. п. 1.

Доведемо обмеженість варіації функції $B(x,s)$ за змінною s. $\forall x_1,\, x_2 \in I$ розглянемо рівність

$$B(x,x_2) - B(x,x_1) = \int_{x_2}^{x} dC(t) \cdot B(t,x_2) - \int_{x_1}^{x} dC(t) \cdot B(t,x_1) =$$

$$= \int_{x_2}^{x} dC(t)[B(t,x_2) - B(t,x_1)] - \int_{x_1}^{x_2} dC(t) \cdot B(t,x_1)$$

як інтегральне рівняння щодо функції

$$Y(x) = B(x,x_2) - B(x,x_1),$$

де $Y(x_2) = -\int_{x_1}^{x_2} dC(t) \cdot B(t,x_1)$.

Отже, розв'язок $Y(x)$ за теоремою 1 можна подати у вигляді

$$Y(x) = -B(x,x_2) \cdot \int_{x_1}^{x_2} dC(t) \cdot B(t,x_1),$$

звідки маємо

$$|B(x,x_2) - B(x,x_1)| \leqslant M^2 \bigvee_{x_1}^{x_2} C(x).$$

Це й доводить обмеженість варіації функцій $B(x,s)$ за змінною s, а неперервність праворуч доводиться аналогічно як і в попередньому випадку.

4. На основі формули (2.2)

$$\Delta_x B(x,s) = \Delta C(x) \cdot B(x-0,s)$$

або

$$B(x,s) - B(x-0,s) = \Delta C(x) \cdot B(x-0,s),$$

звідки й отримуємо

$$B(x,s) = (E + \Delta C(x)) \cdot B(x-0,s).$$

5. З інтегрального рівняння (2.1)

$$Y(x) = Y(x_0 - 0) + \int_{x_0-0}^{x} dC(t) \cdot Y(t),$$

звідки за теоремою (2.1) маємо

$$Y(x) = B(x, x_0 - 0) \cdot Y(x_0 - 0). \qquad (2.6)$$

З іншого боку, на основі (2.2) отримуємо

$$Y(x_0 - 0) = (E + \Delta C(x_0))^{-1} \cdot Y(x_0). \qquad (2.7)$$

На підставі (2.6) і (2.7) маємо

$$Y(x) = B(x, x_0 - 0)(E + \Delta C(x_0))^{-1} \cdot Y(x_0),$$

тому

$$B(x, x_0) = B(x, x_0 - 0)(E + \Delta C(x_0))^{-1},$$

звідки після заміни $x_0 \to s$ випливає властивість 5. ■

Варто зауважити, що

$$\Delta B_s(x,s) = B(x, s-0) \cdot \left[(E + \Delta C(s))^{-1} - E\right].$$

III. Неоднорідне рівняння

Розглянемо неоднорідне матричне рівняння

$$Y(x) = \int_a^x dC(t)\, Y(t) + U(x), \quad U(a) = Y(a), \qquad (3.1)$$

в якому $C(x)$ – $(n \times n)$ матриця, а $U(x)$ – n-вимірна вектор-функція, причому елементи матриці $C(x)$ і вектор-функції $U(x)$ належать до $BV_{loc}^{+}(I)$.

Теорема3.1. *Розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) можна подати у вигляді*

$$Y(x) = B(x,a) \cdot U(a) + \int_a^x B(x,t)\, dU(t) -$$
$$- \sum_{a<y\leqslant x} B(x,y)\, \Delta C(y)\, \Delta U(y), \qquad (3.2)$$

де сума розповсюджується на ті точки $y \in [a;b]$, в яких матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви одночасно.

□ *Доведення.* Покажемо, що вираз, який стоїть праворуч в (3.2), справджує інтегральне рівняння (3.1).

Дійсно,

$$\int_a^x dC(t)\, Y(t) = \int_a^x dC(t)\, B(t,a)\, U(a) +$$
$$+ \int_a^x dC(t) \int_a^t B(t,s)\, dU(s) - \qquad (3.3)$$
$$- \int_a^x dC(t) \sum_{a\leqslant y\leqslant x} B(t,y) \Delta C(y) \Delta U(y).$$

Використовуючи рівняння (2.4), отримаємо

$$\int_a^x dC(t)\, B(t,a)\, U(a) = (B(x,a) - E) \cdot U(a), \qquad (3.4)$$

а з формули Діріхле випливає

$$\int_a^x dC(t)\int_a^t B(t,s)\,dU(s)=\int_a^x\left(\int_s^x dC(t)\,B(t,s)\right)dU(s)-$$

$$-\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\,B(y-0,y-0)\,\Delta U(y). \qquad (3.5)$$

До того ж, безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$\int_a^x dC(t)\sum_{a\leqslant y\leqslant x}B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y)=$$

$$=\sum_{a<y<x}\int_y^x dC(t)\,B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y). \qquad (3.6)$$

На основі співвідношень (3.4), (3.5) і (3.6) рівність (3.4) можна записати у вигляді

$$\int_a^x dC(t)\,Y(t)=(B(x,a)-E)\,U(a)+$$

$$+\int_a^x\left(\int_s^x dC(t)\,B(t,s)\right)dU(s)-\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\,\Delta U(y)-$$

$$-\sum_{a<y\leqslant x}\int_a^x dC(t)\,B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y).$$

Оскільки

$$\int_y^x dC(t)\,B(t,y)\,\Delta C(y)\,\Delta U(y)=$$
$$=(B(x,y)-E)\Delta C(y)\Delta U(y)=$$
$$=B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)-\Delta C(y)\Delta U(y),$$

то

$$\int_a^x dC(t)\,U(t)=B(x,a)\,U(a)-U(a)+\int_a^x B(x,t)\,dU(t)-$$

$$-U(x)+U(a)-\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y)-$$

$$-\sum_{a<y\leqslant x}B(x,y)\,\Delta C(y)\Delta U(y)+\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y),$$

або

$$\int_a^x dC(t)\,Y(t)=B(x,a)\,Y(a)+\int_a^x B(x,t)\,dU(t)-$$

$$-\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y)-\sum_{a<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)+$$

$$+\sum_{a<y\leqslant x}\Delta C(y)\Delta U(y).$$

Остання рівність доводить, що функція

$$Y(x)=B(x,a)\,U(a)+\int_a^x B(x,t)\,dU(t)-$$

$$-\sum_{a<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y)$$

справджує інтегральне рівняння

$$\int_a^x dC(t)\,Y(t)=Y(x)-U(x),$$

що й доводить теорему. ■

Зауважимо, що у формулі (3.2) сума зникає не лише у випадку, коли матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви в різних точках, але й тоді, коли

$$\Delta C(x)\cdot\Delta U(x)=0 \quad \forall x\in I. \qquad (3.7)$$

IV. Спряжене рівняння

Як відомо з п. II, функція Коші $B(x,s)$ за змінною x справджує рівняння (2.1)

$$B(x,s)=E+\int_s^x dC(t)\,B(t,s).$$

Щоб визначити, яке рівняння справджує функція $B(x,s)$ за змінною s, потрібна

Теорема4.1. *Функція $B(x,s)$ за змінною s справджує інтегральне рівняння*

$$B(x,s)=E+\int_s^x B(x,t)\,d\tilde{C}(t), \qquad (4.1)$$

де

$$\tilde{C}(x)=C(x)-\sum_{s\leqslant y<x}(E+\Delta C(y))^{-1}\Delta^2 C(y). \qquad (4.2)$$

□ *Доведення.* Перепишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$B(x,s)-E=\int_s^x dC(t)[B(t,s)-E]+C(x)-C(s). \quad (4.3)$$

Застосовуючи до (4.3) формулу (3.2) розв'язку неоднорідного рівняння, приходимо до рівності

$$B(x,s)=E+\int_s^x B(x,t)\,dC(t)-\sum_{s<y\leqslant x}B(x,y)\Delta^2 C(y). \qquad (4.4)$$

Перепишемо (4.4), використовуючи властивість 5 теореми 2.2:

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)\, dC(t) -$$

$$- \sum_{s<y\leqslant x} B(x,t-0)[E+\Delta C(y)]^{-1}\Delta^2 C(y).$$

Це переконує, що функція $B(x,s)$ за змінною s є розв'язком інтегрального рівняння (4.1), де $\tilde{C}(t)$ має вигляд (4.2), що й доводить теорему. ■

Зауважимо, що в тому випадку, коли $\forall x \in I$ $\Delta^2 C(x) = 0$, функція $B(x,s)$ за змінною s справджує рівняння

$$B(x,s) = E - \int_x^s B(x,t)\, dC(t), \tag{4.5}$$

тобто її стовпці справджують векторне інтегральне рівняння

$$Z(x) = Z(a) - \int_a^x Z(t)\, dC(t), \tag{4.6}$$

яке називається спряженим до рівняння (2.1) [3].

Нехай $\tilde{B}(x,s)$ – функція "Коші" спряженого інтегрального рівняння (4.6), тобто

$$\tilde{B}(x,s) = E - \int_s^x B(t,s)\, dC(t).$$

Використовуючи очевидну рівність

$$\int_s^x \tilde{B}(t,s)\, dB(t,s) + \int_s^x d\tilde{B}(t,s)\, B(t,s) = 0$$

та формулу інтегрування частинами (1.6), отримуємо

$$0 = \tilde{B}(t,s)B(t,s)\Big|_s^x - \sum_{s<y\leqslant x} \Delta\tilde{B}(y,s)\Delta B(y,s). \tag{4.7}$$

Домножуючи (4.7) праворуч на матрицю $B(s,x)$ і використовуючи властивість 2 теореми 2.2, матимемо

$$\tilde{B}(x,s) = B(s,x) - \sum_{s<y\leqslant x} \tilde{B}(y-0,s)\Delta^2 C(y) B(y-0,x). \tag{4.8}$$

Формула (4.8) встановлює зв'язок між $\tilde{B}(x,s)$ і $B(s,x)$: якщо $\forall x \in I$ $\Delta^2 C(x) = 0$, то з формули (4.8) маємо

$$\tilde{B}(x,s) = B(s,x). \tag{4.9}$$

Рівність (4.9) показує, що інтегральне рівняння (2.1) з матрицею-функцією $C(x) \in BV^+_{loc}(I)$ у випадку $\Delta^2 C(x) = 0$ $\forall x \in I$ зберігає властивості, які притаманні інтегральним рівнянням з неперервною матрицею $C(x)$.

V. Первісні мір

Добуток двох узагальнених функцій не завжди існує [5],[6]. Так, наприклад, не існує, тобто неоднозначний (некоректний) добуток функції Хевісайда на її узагальнену похідну.

Для того, щоб дослідити коректність добутків $F' \cdot G$ та $F \cdot G'$, де F', G' – узагальнені похідні функцій F і G, припустимо, що F, G є матрицями-функціями з елементами класу $BV_{loc}(I)$. Запишемо дискретні складові F_b і G_b функцій F і G у вигляді

$$F_b(x) = \sum_{x_s\leqslant x} [F(x_s+0) - F(x_s-0)] = \sum_s \Delta F(x_s)\cdot \eta(x-x_s),$$

$$G_b(x) = \sum_{x_s\leqslant x} [G(x_s+0) - G(x_s-0)] = \sum_s \Delta G(x_s)\cdot \eta(x-x_s), \tag{5.1}$$

де $\Delta F(x_s)$ і $\Delta G(x_s)$ – стрибки матриць $F(x)$ і $G(x)$ відповідно, а $\eta(x-x_s)$ – зміщена функція Хевісайда. Тоді, враховуючи, що узагальнена похідна функції Хевісайда, є дельта-функція Дірака, тобто $\eta'(x-x_s) = \delta(x-x_s)$, і зображення (5.1), отримуємо

$$F' = F'_c + \sum_s \Delta F(x_s)\, \delta(x-x_s),$$

$$G' = G'_c + \sum_s \Delta G(x_s)\, \delta(x-x_s). \tag{5.2}$$

Використовуючи зображення (5.2), запишемо формально добутки $F' \cdot G$ і $F \cdot G'$:

$$F'G = F'G_c + F'_c G_b + \sum_{r,p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r)\eta(x-x_p),$$

$$FG' = FG'_c + F_c G'_b + \sum_{r,p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p)\eta(x-x_r). \tag{5.3}$$

Добутки під знаками сум в (5.3), взагалі кажучи, неоднозначні в сенсі теорії узагальнених функцій, оскільки

$$\delta(x-x_r)\,\eta(x-x_p) = \begin{cases} \delta(x-x_r), & \text{якщо } x_r > x_p, \\ 0, & \text{якщо } x_r < x_p, \end{cases}$$

а для $x_r = x_p$ такий добуток не існує. Ці міркування вимагають таке

Означення5.1. Добутки $F' \cdot G$ і $F \cdot G'$ називатимемо **коректними**, якщо $\forall x \in I$ виконується умова

$$\Delta F(x) \cdot \Delta G(x) = 0. \tag{5.4}$$

Враховуючи означення 5.1, добутки (5.3) за умови (5.4) можна записати так:

$$F'G = F'G_c + F'_c G_b + \sum_{r>p} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_r),$$

$$FG' = FG'_c + F_c G'_b + \sum_{p>r} \Delta F(x_r)\Delta G(x_p)\delta(x-x_p) \tag{5.5}$$

де позначено $\sum\limits_{r>p} \overset{df}{=} \sum\limits_{r}\sum\limits_{p}$ за умови $x_r > x_p$ чи навпаки.

Позначимо через $H(x)$ і $Z(x)$ первісні мір $F'G$ і FG' відповідно, тобто

$$H' = F'G, \qquad Z' = FG'.$$

Теорема5.1. *Нехай $F(x)$, $G(x)$ – матриці-функції узгоджених порядків, елементи яких належать до класу $BV^+_{loc}(I)$ і добутки $F'G$ і FG' коректні, тобто зображаються у вигляді (5.5). Тоді*

1. $$H(x) = \int\limits_a^x dFG + H_0,$$

$$Z(x) = \int\limits_a^x F\,dG + Z_0, \qquad a, x \in I,$$

де H_0, Z_0 – довільні сталі матриці, а інтеграли в правих частинах розуміємо в сенсі означення 1.3 п.I.

2. $H(x)$ *і* $Z(x) \in BV^+_{loc}(I)$

3. $\forall x \in I$

$$\Delta H(x) = \Delta F(x) \cdot G(x-0),$$

$$\Delta Z(x) = F(x-0) \cdot \Delta G(x).$$

□ *Доведення.* теореми 5.1 аналогічне до доведення алвстивості 2., п.1 (див. також [3]). ■

Зауважимо також, що за умови коректності (5.4) добутків $F'G$ і FG' $\forall a, b \in I$ $\int\limits_a^b dFG$ і $\int\limits_a^b F\,dG$ – класичні матричні інтеграли Рімана-Стільтьєса [4] (насправді – сукупності таких скалярних інтегралів).

VI. Про означення розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з мірами

Розглянемо систему рівнянь

$$Y' = C'\,Y \tag{6.1}$$

$$Y(x_0) = Y_0 \tag{6.2}$$

де Y – n-вимірний вектор, $C(x)$ – $(n \times n)$ матриця з елементами з класу BV^+_{loc}, $C'(x)$ – її узагальнена похідна, x_0, $x \in I$.

Варто зауважити, що стрибки матриці-функції $C(x)$ породжують також стрибки розв'язку $Y(x)$ рівняння (6.1), а тому добуток $C'Y$, взагалі кажучи, неоднозначний (п.V).

Означення6.1. Вважатимемо, що вектор Y належить до допустимого класу, який позначимо D_k, якщо:

1) $Y(x) \in BV^+_{loc}(I)$

2) $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0 \quad \forall x \in I.$

Означення6.2. Під розв'язком рівняння (6.1) будемо розуміти вектор-функцію $Y(x)$ з допустимого класу ($Y \in D_k$), що задовольняє це рівняння в узагальненому сенсі:

$$(\varphi, \bar{Y}') = (\varphi, C'Y) \tag{6.3}$$

для довільної фінітної на I вектор-функції φ (елементи $\varphi(x)$ – суть з класу $D^o(I)$ фінітних на I функцій [5]).

Теорема6.1. *У класі функцій $Y(x) \in D_k$ задача (6.1), (6.2) та інтегральне рівняння*

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^x dC(t)\,Y(t), \quad x_0, x \in I, \tag{6.4}$$

еквівалентні.

□ *Доведення.* Дійсно, нехай $Y(x) \in D_k$. Тоді права частина рівняння (6.1) є мірою, первісна якої

$$Y(x) = P + \int\limits_{x_0}^x dC(t)\,Y(t), \tag{6.5}$$

де P – довільний сталий вектор. Прийнявши в (6.5) $P = Y_0$, задовольняємо початкову умову (6.2) і приходимо до інтегрального рівняння (6.4).

Нехай тепер вектор-функція $Y(x) \in D_k$ і задовольняє інтегральне рівняння (6.4), де початкова умова (6.2) вже виконана. Тоді права частина цього рівняння є первісною міри $C'Y$, що після (узагальненого) диференціювання й приводить до рівняння (6.1). ■

Згідно з результатами роботи [4] рівняння (6.4) має єдиний розв'язок $Y(x) \in BV^+_{loc}(I)$. Умова ж $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$ приналежності цього розв'язку до допустимого класу не є ефективною, оскільки виражена в термінах стрибка самого розв'язку. Наступне твердження дає ефективний критерій приналежності до класу D_k.

Теорема6.2. *Для існування розв'язку Y рівняння (6.4) в класі D_k необхідно і досить виконання умови*

$$(\Delta C(x))^2 = 0 \qquad \forall x \in I. \tag{6.6}$$

□ *Доведення.* **Достатність.** Стрибок розв'язку $\Delta Y(x)$ рівняння (6.4) визначається формулою [4]

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) \cdot Y(x-0). \tag{6.7}$$

Домноживши обидві частини (6.7) ліворуч на $\Delta C(x)$, отримуємо

$$\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = (\Delta C(x))^2 \cdot Y(x-0), \tag{6.8}$$

звідки в силу умови (6.6) й випливає умова $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$ $\forall x \in I$.

Необхідність. Якщо $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$ $\forall x \in I$, то з (6.8) отримуємо

$$0 = [\Delta C(x)]^2 \cdot Y(x-0) = [\Delta C(x)]^2 \cdot B(x-0, x_0) \cdot Y_0,$$

де $B(x, x_0)$ – матриця Коші рівняння (6.4), а Y_0 – довільний початковий вектор. У зв'язку з цією довільністю випливає, що

$$[\Delta C(x)]^2 \cdot B(x-0, x_0) = 0,$$

звідки через оборотність матриці $B(x-0, x_0)$ випливає рівність (6.6). ■

Означення6.3. У разі виконання умови (6.6) (однорідне) рівняння (6.1) називатимемо **коректним**.

Розглянемо тепер неоднорідну задачу

$$Y' = C'Y + F'(x) \tag{6.9}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{6.10}$$

де $F(x) \in BV^+_{loc}(I)$, і відповідне інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)\,Y(t) + F(x) - F(x_0). \tag{6.11}$$

Умова (6.6) ще не забезпечує приналежності розв'язку цього рівняння до класу D_k через наявність доданка $F(x) - F(x_0)$, але справедливе наступне твердження.

Теорема6.3. *Якщо однорідна система (6.1), (6.2) коректна, то для існування розв'язку рівняння (6.11) в класі D_k необхідно і досить виконання умови*

$$\Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0 \qquad \forall x \in I. \tag{6.12}$$

□ *Доведення.* Дійсно, стрибок розв'язку рівняння (6.11)

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) \cdot Y(x-0) + \Delta F(x),$$

що після множення на $\Delta C(x)$ ліворуч приводить до рівності

$$\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = [\Delta C(x)]^2 \cdot Y(x-0) + \Delta C(x) \cdot \Delta F(x),$$

звідки й випливає доведення. ■

Зауваження 1. За виконання системи умов (6.6), (6.12) неоднорідне рівняння (6.9) також доцільно назвати **коректним**.

Зауваження 2. Метод зведення початкових задач для (коректних) систем диференціальних рівнянь з мірами до еквівалентних інтегральних рівнянь дозволяє повною мірою використати отримані в роботі результати для побудови елементів лінійної теорії: досить у відповідних формулах прийняти $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$, $[\Delta C(x)]^2 = 0$ та $\Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0$ $\forall x \in I$. Такий підхід є певною мірою альтернативним до результатів робіт [7],[8].

Література

[1] Гохман Э.Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. – М.: ГИФМИ, 1958.

[2] Hildebrandt T.H. On systems of linear differentio-Stieltjes integral equations // Illinois J. Math., 3 (1959). – pp. 352–373.

[3] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[4] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 737 с.

[5] Шилов Г.Е. Математический анализ: 2-й спец. курс. – М.: Изд.МГУ, 1984. – 201 с.

[6] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

[7] Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – № 222 – с. 89–90.

[8] Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат.наук: 01.01.02. Львів. Держ. ун-т ім. І.Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

MATRIX INTEGRAL EQUATIONS AND SYSTEMS WITH MEASURES

M. Stasyuk, R. Tatsiy

"Lviv polytechnic" National University
12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Set properties of nonclassical integral of Riemann-Stieltjes, on the basis of which the linear matrix integral equations and corresponding systems of the differential equations with measures are investigated.

Keywords: linear matrix equations with measures, integral Riemann-Stieltjes

2000 MSC: 34A37

UDK: 517.91