

УДК 621.9.06:539.433

І.Є. Грицай

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра технології машинобудування**ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ РІЗАННЯ**

© Грицай І.Є., 2001

**Розроблено математичну динамічну модель пружної системи різання, у якій враховано динаміку зміни товщини стружки та швидкість цієї зміни, а також перехідні процеси утворення ділянки контакту на задній поверхні інструмента та невідного різання на лезах черв'ячної фрези. Виведені залежності справедливі для інструмента з малими передніми кутами.**

**The mathematical dynamic model of an elastic system of the cutting process has been designed, in which one dynamics of variation of a depth of cut and speed of this variation, and also transitional a phenomenon of formation of a surface of contact on a flank surface of the instrument and restricted cutting on cutting edges of a screw type milling cutter are taken into account. The dependences true for the instrument with small front rake have been delimited**

Різання і тертя утворюють замкнену динамічну систему, яка є складовою частиною загальної замкненої динамічної системи верстата. Ці процеси визначаються пластичним деформуванням і руйнуванням металу, при цьому тертя є деформуванням у поверхневих шарах інструмента, а різання – деформування і руйнування глибоких шарів металу, які утворюють зону різання. За певних умов ця складна динамічна система втрачає стійкість, що негативно позначається на якості і точності утворюваних поверхонь, довговічності верстата, працездатності інструмента тощо.

У теперішній час відомі численні дослідження статистичних залежностей сили різання, зокрема, у періодичних процесах, до яких належить зубофрезерування, від зміни різних параметрів – матеріалу, режимів різання, площі поперечного перетину зрізів, кутів інструмента тощо. Проте, ці залежності недостатні для аналізу динамічних процесів.

У роботі [1] рівняння динаміки стружкоутворення і формування сили різання виведено із умови рівноваги деформованого об'єму металу на передній поверхні залежно від експериментально встановлених параметрів, котрі визначають величину та напрямок сили різання. У статті наведено результати розробки динамічної моделі різання, головна відмінність якої від моделі В.А. Кудинова полягає у розгляді зміни інтенсивності деформацій у пружній системі різання, збудженою зміною товщини зрізу, в умовній площині зсуву, а також у врахуванні динаміки деформаційних процесів між утвореною поверхнею і задньою поверхнею інструмента і умов невідного різання на лезах інструмента. Розрахунки, викладені нижче, не прив'язані до конкретного методу обробки різанням і мають універсальний характер, проте низка викладень стосуються особливостей технологічних процесів нарізання зубчастих коліс черв'ячними фрезами і конструкції даного інструмента.

Дія, викликана зміною вхідної величини товщини зрізів, є функцією часу. Типові види такої дії під час фрезерування зубчастих коліс черв'ячними фрезами, показано на рис. 1 (подача – зустрічна). Графіки відповідають зміні товщини зрізів залежно від кута повороту

передньої поверхні щодо площини міжосьового перпендикуляра для зубців, розташованих на різних віддальх від міжцентрової лінії (від'ємна нумерація – для вхідної ділянки); рух обкочування – за годинниковою стрілкою. Дослідження параметрів зрізів і умов контакту фрези з заготовкою, виконаних на основі моделі параметрів зрізів [2, 3, 4] вказує на те, що у діапазоні модулів нарізаних коліс 3...10 мм максимальна довжина контакту не перевищує 20 мм. При швидкостях різання, які використовуються на практиці для обробки зубчастих коліс – 40–80 м/хв, тривалість контакту становить до 0,15 с, що дає підстави розглядати збудження пружної системи зміною товщини зрізу, як імпульс, а зміну стану системи під дією цього імпульсу – як перехідний процес. Вибравши типову форму дії, виявимо викликаний нею перехідний процес, який є динамічною характеристикою пружної системи різання.

Прийmemo позначення:  $P$  – головна складова сили різання, Н;  $p$  – питома сила різання, МПа;  $S$ ,  $a$ ,  $b$  – площа поперечного перетину,  $\text{мм}^2$ , товщина і ширина зрізів, мм;  $\sigma_0$  – межа міцності матеріалу, який обробляють МПа;  $\xi$  – коефіцієнт осадження стружки;  $\varepsilon$ ,  $\Delta s$ ,  $h$  – відносний зсув, абсолютний зсув та товщина шару металу, який зазнав зсуву;  $\Phi$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  – кут зсуву, передній та задній кути інструмента;  $V$  – швидкість різання, м/хв;  $\mu$ ,  $\rho$  – коефіцієнт тертя і кут тертя;  $\alpha_\omega$  – кут профілю вихідного контуру черв'ячної фрези;  $S_\alpha$  – ширина ділянки контакту задньої поверхні інструмента з утвореною поверхнею, мм;  $J^1$ ,  $q_s$  – нормальна контактна жорсткість, МПа/мм і контактний тиск, МПа;  $W$  – передавальна функція лінки або контуру;  $\omega$  – частота коливань,  $\text{с}^{-1}$ .

Головна складова сили різання є функцією механічних властивостей матеріалу та показника інтенсивності зсувних деформацій – коефіцієнта осадження стружки

$$P = p \cdot S = \sigma_0 \cdot \xi \cdot S = \sigma_0 \cdot \xi \cdot a \cdot b = \sigma_0 \cdot a_c \cdot b, \quad (1)$$

де  $a_c$  – товщина стружки:

$$a_c = a \cdot \xi. \quad (2)$$

Залежність (2) є неперервною, не має характеристик, що різко змінюють її величину, тому може бути лінеаризованою розкладом за ступенями малих прирощень змінних, які беруться в околицях їх значень при усталеному режимі. Використовуючи формулу Тейлора, представимо прирощення нелінійної функції (2) прирощеннями її змінних

$$da_c = a_0 \cdot d\xi + da \cdot \xi_0, \quad (3)$$

де  $a_0$ ,  $\xi_0$  – деякі значення величин, що відповідають початковим умовам.

У загальному випадку більш повною характеристикою інтенсивності деформацій, які протікають в умовній площині зсуву, є не коефіцієнт осадження стружки, а відносний зсув. Враховуючи те, що основна причина невідповідності параметрів зрізів та стружки є не осадження стружки, а механізм перетворення зрізуваного шару у стружку, ставиться задача виявити зв'язок між товщиною зрізу та відносним зсувом.

З фундаментальних формул теорії різання металів, відомих як формули Тіме

$$\xi = \text{ctg}\Phi \cdot \cos\gamma + \sin\gamma; \quad (4)$$

$$\varepsilon = \text{ctg}\Phi + \text{tg}(\Phi - \gamma) \quad (5)$$

впливає пряма залежність між коефіцієнтом осадження стружки та умовним кутом зсуву

$$\xi = \text{ctg}\Phi, \quad (6)$$

і зсувною деформацією і коефіцієнтом осадження стружки

$$\varepsilon = \xi + \frac{1}{\xi} \quad (7)$$

Рівності (6) і (7) справедливі у першому наближенні при невеликих передніх кутах. Враховуючи, що у переважній більшості стандартних черв'ячних фрез передні кути не перевищують  $5^\circ$ , таке допущення тут і далі не вплине суттєво на остаточний результат для вибраного об'єкта досліджень.

Представивши вираз (4) у прирощеннях, отримуємо

$$d\xi = d\varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \quad (8)$$

**1. Динамічна характеристика товщини зрізів.** Розглянемо вплив динаміки товщини зрізів на інтенсивність зсуву. На рис. 1 показано схему, яка ілюструє зміну умов деформування зрізаного шару передньою поверхнею інструмента при зміні товщини зрізу. У певному проміжному положенні, яке займає інструмент у перехідному процесі, товщина зрізу дорівнює  $a$ , а кут зсуву становить  $\Phi$ . За час деякого прирощення шляху різання товщина зрізу зростає на величину  $\Delta a$ , внаслідок чого кут зсуву набув значення  $\Phi + \Delta\Phi$ . Якщо допустити, що швидкість різання внаслідок зміни товщини зрізу змінилася незначно, то елементарний відтинок  $dl$  шляху різання, на якому відбувся зсув, у початковому та кінцевому положеннях передньої поверхні буде однаковим. Зберігаючи умову малої величини переднього кута, виразимо абсолютний зсув та товщину деформованого шару через змінні  $a$  та  $\Phi$

$$\Delta S \approx \frac{a}{\sin \Phi}; \quad h \approx dl \cdot \sin \Phi$$

звідки величина відносного зсуву

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{h} = \frac{a}{dl \cdot \sin^2 \Phi} \quad (9)$$

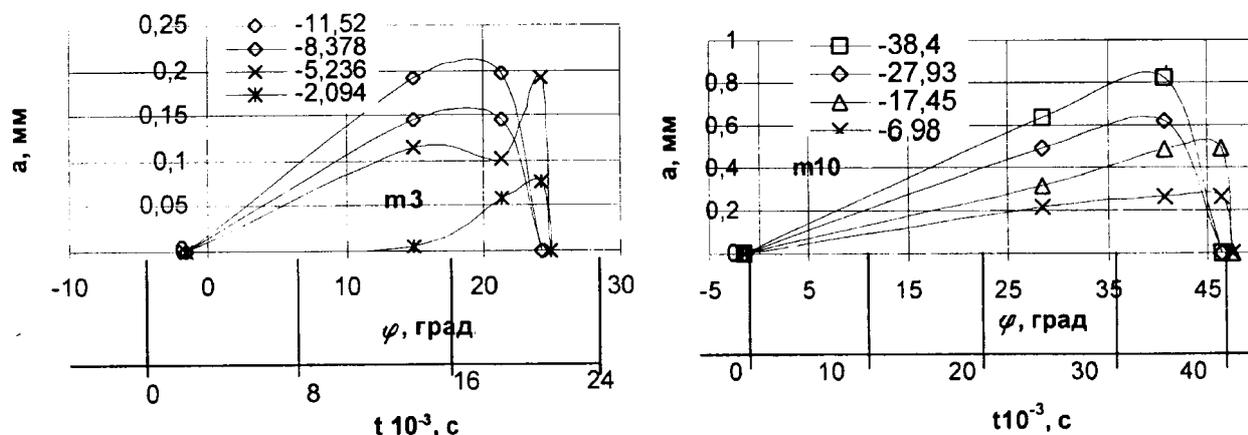


Рис. 1. Графіки зміни товщини зрізів на верхніх лезах черв'ячної фрези за кутом  $\varphi$  повертання передньої поверхні і у часі  $t$  різання ( $V = 60$  м/хв)

$$a - m = 3 \text{ мм}; t = h; z = 42; z_0 = 9; d_{a\varphi} = 110 \text{ мм};$$

$$б - m = 10 \text{ мм}; t = 0,6h; z = 88; z_0 = 9; d_{a\varphi} = 110 \text{ мм}$$

Прирошення на основі часткових похідних функції (9) двох змінних

$$d\varepsilon = f\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}, \Phi\right) \cdot da + f\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Phi}, a\right) \cdot d\Phi.$$

Тоді відхилення відносного зсуву від деякого заданого миттєвого значення  $\varepsilon_0$ , яке відповідає певним величинам параметрів  $a_0, \Phi_0$ , буде становити

$$d\varepsilon = \frac{1}{\sin^2 \Phi_0} \frac{da}{dl} - a_0 \frac{2 \cdot \sin \Phi_0 \cdot \cos \Phi_0}{\sin^4 \Phi_0} \cdot \frac{d\Phi}{dl} = \frac{1}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{da}{dt} - 2 \cdot a_0 \cdot \frac{\operatorname{ctg} \Phi_0}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

або

$$d\varepsilon = \frac{1}{V \cdot \sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \Phi_0}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt}. \quad (10)$$

Після тотожних перетворень виразу (10) отримаємо

$$d\varepsilon = \left( \frac{2}{V \cdot \sin 2\Phi_0} - \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \frac{1}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial a} \right) \cdot \frac{da_c}{dt}, \quad (10.1)$$

де  $\operatorname{ctg} \Phi|_{\gamma=0} \approx \xi$ ;  $\xi \cdot a = a_c$ ;  $\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{\partial\Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt}$  – впливає з того, що кут зсуву є складною функцією  $\Phi = \Phi(a) = \Phi(a(t))$ .

Із залежності (10.1), якою описано природження інтенсивності деформацій зсуву від зміни товщини зрізів, впливає, що перша складова у правій частині виразу характеризує зростання інтенсивності деформування і збільшення сили різання внаслідок природження товщини зрізу, у той час, як друга складова характеризує зменшення інтенсивності деформації внаслідок зростання кута зсуву, що спричиняє зменшення площі зсуву і фактичного опору матеріалу пластичному деформуванню та роботи, яка затрачається на деформацію зрізуваного шару внаслідок зростання товщини зрізу.

Для знаходження функції  $\partial\Phi/\partial a$ , яка встановлює безпосередню залежність зміни кута зсуву від зміни товщини зрізів використаємо умову незмінності швидкості різання та рівності елементарних відтинків  $dl$  шляху різання, на якому відбувся зсув, у перехідному процесі з параметрами  $a_1$  і  $a_2$  (рис. 2):

$$\begin{aligned} dl &= a \cdot \operatorname{ctg} \Phi; \\ dl &= (a + \Delta a) \cdot \operatorname{ctg}(\Phi + \Delta\Phi). \end{aligned}$$

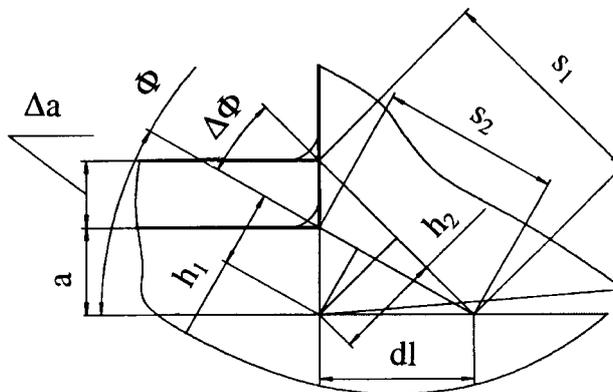


Рис. 2. Взаємозв'язок параметрів зсуву з товщиною зрізів

З рівності

$$a \cdot \operatorname{ctg} \Phi = (a + \Delta a) \cdot \operatorname{ctg}(\Phi + \Delta \Phi),$$

відкинувши величину  $\Delta \Phi \cdot \Delta a \cdot \operatorname{tg}^2 \Phi$  як таку, що є на порядок меншою, ніж інші складові тотожного перетворення, отримаємо

$$\operatorname{ctg} \Delta \Phi \approx \frac{a}{\Delta a} \cdot \left( \operatorname{ctg} \Phi_0 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \Phi_0} \right).$$

Для передніх кутів, які не перевищують  $5^\circ$   $\operatorname{ctg} \Delta \Phi = \frac{\cos \Delta \Phi}{\sin \Delta \Phi} \approx \frac{1}{\Delta \Phi}$ , тому замінюємо прирощення диференціалами

$$\partial \Phi = \left[ \frac{a}{\partial a} \cdot \left( \operatorname{ctg} \Phi_0 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \Phi_0} \right) \right]^{-1}, \quad (11)$$

або

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \left[ a_0 \cdot \left( \xi_0 + \frac{1}{\xi_0} \right) \right]^{-1}. \quad (11.1)$$

Після підстановки (11.1) у (10.1)

$$d\varepsilon = \left[ \frac{2}{V \cdot \sin 2\Phi_0} - \frac{2}{V \cdot \sin^2 \Phi_0} \cdot \left( \xi_0 + \frac{1}{\xi_0} \right)^{-1} \right] \cdot \frac{da_c}{dt}, \quad (12)$$

де вираз у квадратних дужках інтенсивність змінні характеристики  $da/dt$ .

Зв'язок між шляхом різання та швидкістю різання, який використано у наведених вище розрахунках, виходить із того, що зсувна пластична деформація стружкоутворення поширюється із швидкістю переміщення інструмента, тобто, із швидкістю різання.

**2. Динамічна характеристика переднього кута.** З умови малості переднього кута випливає, що його зміна не може суттєво вплинути на динаміку деформаційних процесів. Тим не менше, визначимо зв'язок між прирощеннями  $\gamma$  і  $\xi$ .

Різання, яке супроводиться зміною товщини зрізу, призводить до утворення у площині передньої поверхні додаткової складової  $dV$  швидкості різання, значення якої

$$dV = \frac{da}{dt}.$$

У цьому випадку

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + d\vec{V}; \quad V = \sqrt{V_0^2 + dV^2}.$$

На рис. 3 показані послідовні положення передньої поверхні зубця фрези, які характеризуються кутами повороту  $\phi_1, \phi_2$  відносно площини міжосьового перпендикуляра. Зміна швидкості різання рівнозначна зміні  $d\gamma$  переднього кута на вершинному лезі, при цьому для малих кутів [1]

$$d\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \cdot \frac{da}{dt}. \quad (13)$$

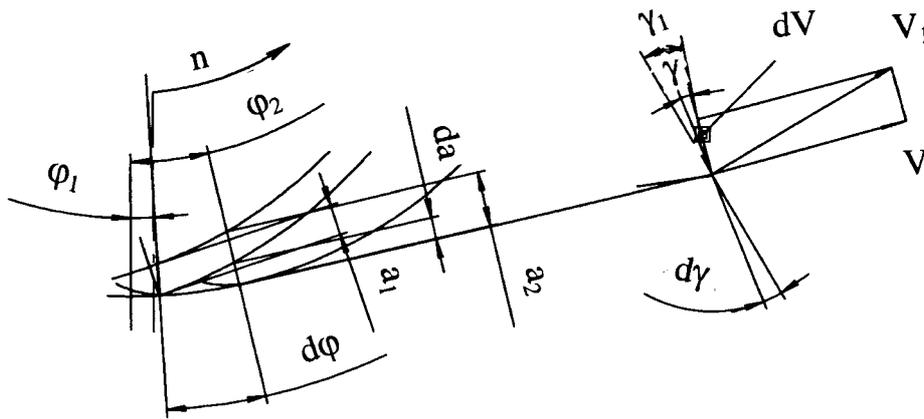


Рис. 3. Зміна швидкості різання та переднього кута внаслідок зростання товщини зрізу

Із залежності (5) при  $\Phi = \text{const}$  і  $\gamma < 5^\circ$ :

$$d\varepsilon|_{\Phi=\text{const}} = d \operatorname{tg}(\Phi - \gamma) = -\frac{d\gamma}{\cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)}$$

або, з урахуванням (13)

$$d\varepsilon = -\frac{1}{V \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \frac{da}{dt} \quad (14)$$

Геометрична інтерпретація похідної товщини зрізів за часом різання – дотична до функції  $a(t)$ . На основі цього, використовуючи вираз (14), можна знайти швидкість зміни товщини зрізів і оцінити у першому наближенні величину прирощення відносного зсуву і переднього кута графічним методом. Наприклад, з графіка (рис.1, а) випливає, що мінімальне значення сталої часу товщини зрізів припадає на зубець, розташований на входній ділянці фрези на віддалі 11,52 мм від міжосьового перпендикуляра (що відповідає 11 зубцю на гвинтовій поверхні), і становить:  $T_a = 0,018$  с;  $d\varepsilon = 0,25/(0,018 \cdot 1000) = 0,0014$ . Для даних з рис. 1, б отримуємо:  $T_a = 0,038$  с;  $d\varepsilon = 0,9/(0,037 \cdot 1000) = 0,025$ .

Сумарну зміну зсуву як результат дії двох факторів – зміни товщини зрізів і переднього кута, можемо визначити як суму величин (12) і (14). Тоді коефіцієнт осадження стружки згідно з виразом (8) буде становити

$$d\xi = \frac{2}{V} \cdot \left[ \frac{1}{\sin 2\Phi_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)} - \frac{1}{\sin^2 \Phi_0 \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right) \cdot \left(\xi_0 + \frac{1}{\xi_0}\right)} \right] \cdot \frac{da_c}{dt} - \frac{2}{V \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)} \cdot \frac{da}{dt} \quad (15)$$

Спростимо вираз у знаменнику першої складової правої частини рівності (15)

$$\frac{1}{\left(\xi_0 + \frac{1}{\xi_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)} = \frac{\xi_0}{\left(1 - \frac{1}{\xi_0^4}\right)} \approx \xi_0,$$

після чого отримуємо остаточний результат:

$$d\xi = \frac{2}{V} \cdot \left[ \frac{1}{\sin 2\Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} - \frac{\xi_0}{\sin^2 \Phi_0} \right] \cdot \frac{da_c}{dt} - \frac{2}{V \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \frac{da}{dt}. \quad (16)$$

Вуглецеві та молотоговані сталі, які використовують у переважній більшості для зубчастих коліс, характеризуються високими механічними властивостями; при їх механічній обробці коефіцієнт осадження досягає значень 2,5...6, а у певних випадках може зростати до 10 [5]. Внаслідок цього величиною  $1/\xi^4$ , яка є другого порядку малості, можемо знехтувати, що дає підставу виконати вказану заміну.

Отже, закономірність зміни товщини стружки (3) внаслідок пластичного деформування зрізаного шару буде описана залежністю (знаки диференціала в обидвох частинах рівняння опускаємо)

$$a_c = \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \left[ \frac{1}{\sin 2\Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} - \frac{\xi_0}{\sin^2 \Phi_0} \right] \cdot \frac{da_c}{dt} - \frac{2 \cdot a_0}{V \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \frac{da}{dt} + a \cdot \xi_0.$$

Перетворимо останній вираз, що дасть можливість записати його в операторній формі

$$a_c + \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \left[ \frac{\xi_0}{\sin^2 \Phi_0} - \frac{1}{\sin 2\Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \right] \cdot \frac{da_c}{dt} = a \cdot \xi_0 - \frac{2 \cdot a_0}{V \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \frac{da}{dt},$$

з чого

$$a_c = a \cdot \xi_0 \cdot \frac{1 - T_\gamma p}{1 + T_p p}, \quad (16.1)$$

де

$$T_\gamma = \frac{2 \cdot a_0}{V \cdot \xi_0 \cdot \cos^2(\Phi_0 - \gamma_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1}$$

– стала часу переднього кута;

$$T_p = \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \left[ \frac{\xi_0}{\sin^2 \Phi_0} - \frac{1}{\sin 2\Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \right]$$

– стала часу стружкоутворення.

Наприклад, при  $\xi_0 = 3$ ;  $\Phi_0 = 18,3^\circ$ ;  $\gamma_0 = 5^\circ$ ;  $a = 0,13$  мм;  $V = 60$  м/хв = 1000 мм/с, отримуємо:  $T_\gamma = 0,0001$  с;  $T_p = 0,00752$  с.

Вираз (16.1), яким описано пластичне деформування зрізаного шару, характеризує контур, що складається із двох послідовних аперіодичних ланок. Інерційність різання при переході від одного усталеного стану до іншого, відповідно до даного виразу, визначається інерційністю встановлення нових значень переднього кута і товщини стружки.

На основі (1), при незмінних  $\sigma_0$  і  $b$  динамічна характеристика сили різання по дії факторів  $a$  і  $\gamma$ :

$$P_{P\gamma} = K_p \cdot \frac{1 - T_\gamma p}{1 + T_p p} a, \quad (15)$$

де  $K_p$  – коефіцієнт різання [6] – статична характеристика верстата, що числово дорівнюють статичній жорсткості при  $\omega = 0$ :

$$K_p = \frac{P_y}{y} = p_0 \cdot b_0 = \sigma_0 \cdot \xi_0 \cdot b_0;$$

$$W_\gamma = 1 - T_\gamma p, \quad W_p = \frac{1}{1 + T_p p} \text{ – передавальні функції ланок.}$$

**3. Рівняння зміни деформацій на утворюваній поверхні.** Внаслідок обмеженої жорсткості верстата під час різання із змінною товщиною зрізу змінюється задній кут інструмента. Якщо після переміщення передньої поверхні на віддаль  $dl$  відбулася зміна товщин зрізів від  $a_1$  до  $a_2$ , то на поверхні деталі залишиться слід, викликаний зміною пружного відтискання  $dy$ . Різання черв'ячною фрезою супроводиться неперервною зміною товщини зрізу по довжині шляху різання, тому залишковий слід на обробленій поверхні частково повторяє закон зміни товщини зрізу. Ця залишкова похибка обробленої поверхні, яка характеризується як технологічна спадковість при обробці поверхні з відхиленням форми пропорційна податливості технологічної системи. Зміна заднього кута визначиться за зміною кута між дотичною до кривої  $dy$  у точці контакту вершини різця з поверхнею деталі і напрямком швидкості різання, яку можна прийняти незмінною. При величині прирощення  $dl$  довжини шляху різання, для малих значень прирощень можемо записати (рис. 4):

$$d\alpha \approx \frac{dy}{dl} = \frac{1}{K_p} \cdot \frac{dP_y}{dl}. \quad (16)$$

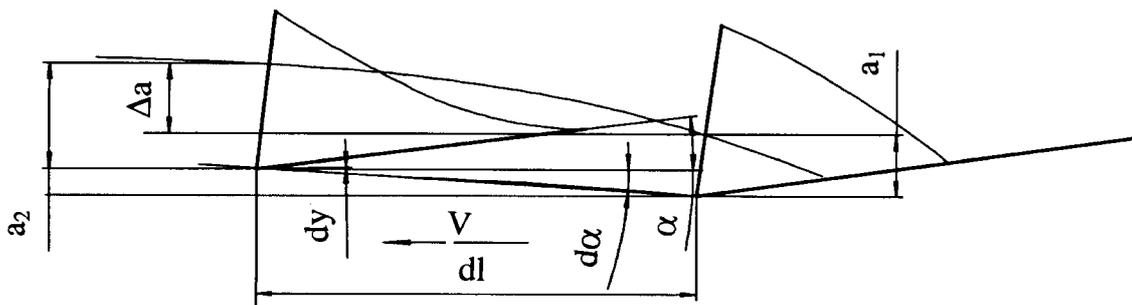


Рис. 4. Прирощення заднього кута внаслідок зростання товщини зрізу

Виразимо прирощення радіальної проекції  $P_y$  сили різання головною складовою у прирощенні по товщині зрізу:

$$dP_y = \mu \cdot K_p \cdot da,$$

з урахуванням чого зростання кута  $\alpha$  (16)

$$d\alpha = \frac{\mu}{V} \cdot \frac{da}{dt}. \quad (17)$$

Зміна заднього кута спричиняє зміну ширини  $S_\alpha$  площадки контакту задньої поверхні інструмента з заготовкою. При постійній для даної пари матеріалів інструмента і заготовки

величини нормальної контактної жорсткості  $J^1$  зміна площадки контакту рівнозначна зміні нормальної до обробленої поверхні складової сили різання, яка спричинює нормальний контактний тиск  $q_s$  на обробленій поверхні та сили тертя по задній поверхні. На рис. 5 показано зміну заднього кута внаслідок повертання задньої поверхні інструмента відносно вершини різця за ходом годинникової стрілки на величину  $d\alpha$ ; такий поворот є наслідком зменшення товщини зрізу на відтинку шляху різання  $dl$ . Очевидно, що при зростанні товщини зрізу буде спостерігатися протилежна за знаком зміна: зростання заднього кута і зменшення  $C_\alpha$ .

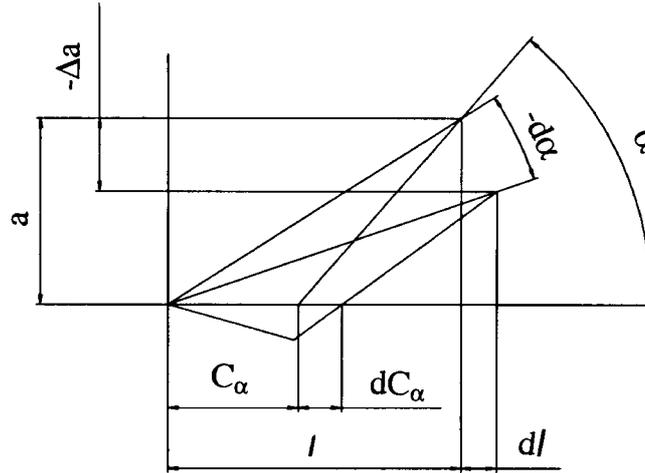


Рис. 5. До впливу зміни товщини зрізів на розміри ділянки контакту задньої поверхні

Із рівності, яка встановлює зв'язок між товщиною зрізу, довжиною шляху різання і заднім кутом:  $l = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$  (рис. 5) перейдемо до лінеаризації даної залежності і прирощень. Враховуючи, що розглядаємо зміни малих величин, прирощення шляху різання можна порівняти із прирощенням ділянки контакту, тобто

$$dC_\alpha \approx dl = da \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 + a_0 \cdot d \operatorname{ctg} \alpha = da \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 - a_0 \cdot \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (18)$$

Підставимо у вираз (18) значення  $d\alpha$  (17)

$$dC_\alpha = da \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 - a_0 \cdot \frac{\mu}{V \cdot \sin^2 \alpha_0} \cdot d \frac{da}{dt}. \quad (19)$$

Опустимо знаки диференціювання в обидвох частинах рівності, маючи на увазі, що розглядаємо змінні величини

$$C_\alpha = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 - a_0 \cdot \frac{\mu}{V \cdot \sin^2 \alpha_0} \cdot \frac{da}{dt}.$$

Отримана залежність є динамічним рівнянням ділянки контакту задньої поверхні інструмента по товщині зрізу. У операторній формі ця залежність, що характеризує закономірність встановлення нового значення розміру контактної поверхні, має вигляд

$$C_\alpha = k \cdot (1 - T_C p) a, \quad (19.1)$$

де  $T_C = \frac{2 \cdot a_0 \cdot \mu}{V \cdot \sin 2\alpha_0}$  – стала часу контакту задньої поверхні;  $k$  – коефіцієнт рівняння,  $k = \operatorname{ctg} \alpha_0$ .

Наприклад, при  $V = 60$  м/хв,  $\mu = 0,75$ ,  $a_0 = 0,13$  мм,  $\alpha_0 = 15^\circ$  отримуємо  $T_C = 0,00039$  с.

Сила тертя, яка діє між задньою поверхнею інструмента і обробленою поверхнею деталі залежить від зміни контактної деформації і є функцією площі, розміри якої визначаються шириною зрізу і параметром  $S_\alpha$ . На основі виразу (21.1) дана сила, як і часова характеристика  $P_{P\gamma}$ , теж буде представлена функцією товщини зрізів

$$P_C = K_C \cdot (1 - T_{Cp})a, \quad (22)$$

де  $K_C = \mu \cdot J^1 \cdot y \cdot b \cdot \text{ctg}\alpha_0$ ;  $y$  – величина зближення;  $J^1$  – контактна жорсткість;  $W_C = K_C \cdot (1 - T_{Cp})$  – передавальна функція.

У процесах контактної деформації величина зближення визначається деформаціями шорсткості, хвиль і макронерівностей поверхонь, які перебувають у контакті [7]. З огляду на малий розмір площадки контакту та її прирощення, деформації хвиль і макронерівностей не будуть впливати на цей параметр, тому зближення буде визначатися допуском шорсткості:  $y = R_z$ . Для попереднього прорізання западин між зубцями циліндричного колеса шорсткість на обробленій поверхні становить 15...30 мкм. За даними Э.В. Рижова, при контактуванні шліфованої та шорсткої поверхонь контактна жорсткість для сталей становить, в середньому 300...500 МПа/мм, звідки отримаємо середнє значення контактного тиску  $q_s$  на утворюваній поверхні:  $q_s = 6 \dots 15$  МПа. З даними уточненнями коефіцієнт рівняння у виразі (22) :

$$K_C = \mu \cdot q_s \cdot b \cdot \text{ctg}\alpha_0.$$

**4. Рівняння сили в умовах невірного різання.** Різання черв'ячними фрезами з швидкорізальної сталі є переривистим, відбувається на мікрошвидкостях (до 0,1 м/с) при інтенсивному змащуванні без утворення наросту. Для цих умов даний процес характеризується відсутністю адгезійної складової та зони вторинного пластичного деформування, пружною взаємодією стружки і передньої поверхні, а тертя між стружкою та поверхнею інструмента підкоряється закону Амонтона – Кулона [5]. Обставинами, які можуть змінити умови тертя на передній поверхні, є виникнення невірного різання на суміжних лезах. Такий вид різання характерний для більшості зубців черв'ячної фрези, оскільки вони працюють одночасно двома або трьома лезами.

Під час вільного різання стружка сходиться по передній поверхні в напрямку, нормальному до леза, а умовною точкою прикладання сили тертя між стружкою та поверхнею зубця  $F$  на верховому лезі є центр моменту інерції миттєвої площі перетину зрізу цього леза (рис. 6). Якщо у різання включається бокове лезо, то виникає додаткова площа зсуву, а сила різання зростає. Зростання сили різання в умовах стисненого різання можна врахувати як наслідок збільшення інтенсивності тертя і виникнення додаткової сили  $F_6$  на боковому лезі. Взаємодія стружок, що стинаються вершинним боковим лезом, відбувається по кутках зубця, тому кожну з вказаних сил,  $F$  і  $F_6$  можна привести до спільної вершини. Внаслідок незначного значення плеча, моментами пар сил, що виникають при такій заміні, можна знехтувати. Тоді умовою динамічної рівноваги між стружками, утвореними на суміжних лезах одного зубця, є їх сходження в одному напрямку, який буде визначено вектором геометричної суми вказаних сил, а зростання тертя на площині передньої поверхні біля верхового леза по нормалі до цього леза (рис. 6):

$$F_1 = F + dF,$$

де

$$dF = F_6 \cdot \sin \alpha_\omega \quad (23)$$

Між деформаційними процесами в умовній площині зсуву та процесами тертя на передній поверхні існує прямий зв'язок, який полягає у тому, що всяка зміна кута тертя викликає протилежну за знаком зміну величини кута зсуву. Внаслідок зростання тертя і кута  $\rho$  в умовах стисненого різання, на таке ж значення зменшиться кут зсуву на верховому лезі, тобто  $d\Phi = -d\rho$ . Така зміна в умовах тертя на передній поверхні рівнозначна повороту площини зсуву проти руху стрілки годинника і зростанню сили стружкоутворення. Фізика цього явища полягає у тому, що внаслідок нашарування зрізаних пластів металу, які сходять одночасно із двох суміжних лез, відбувається підймання складної стружки, яка має Г-подібну або коробчасту форму, над поверхнею інструмента, що призводить до зменшення площадки контакту, при цьому зростає швидкість деформування і зменшується стала часу стружкоутворення.

Зважаючи на те, що і зміна товщини зрізів, і зміна кута тертя на верховому лезі визначають зміну кута зсуву і призводять до зміни у зсувній деформації, можна поставити у відповідність зміни, зумовлені дією обидвох факторів. У цьому випадку необхідно виявити зв'язок між зміною товщини зрізів та рівнозначної їй за дією зміною кута тертя (рис. 7).

Після зростання сили тертя на верховому лезі в умовах стисненого різання на величину (23) коефіцієнт тертя набуде нового значення

$$\mu = \operatorname{tg}\rho = \frac{F}{N} \cdot \left(1 + \frac{S}{S_0}\right) = \mu_0 + \mu_0 \cdot \frac{S_0}{S},$$

а у прирощеннях

$$d\mu = \mu_0 \cdot d \frac{S_0}{S} = -\mu_0 \cdot \frac{S_0 \cdot b}{S_0^2} \cdot da,$$

де  $N$  – нормальна до верхового леза проекція сили різання; при  $\gamma = 0$   $N = P$ . Кут тертя при цьому зміниться на величину

$$d\rho = d \operatorname{arctg}\mu = -\frac{d\mu}{1 + \mu_0^2} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_0 \cdot b}{S_0^2} \cdot da$$

звідки

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_0 \cdot b}{S_0^2}.$$

Беручи до уваги вираз (11.1) і те, що за умовою  $d\Phi = d\rho$ , підставимо отримане значення умовної залежності зміни кута тертя по товщині зрізу у вираз (12):

$$d\varepsilon = \left( \frac{2}{V \cdot \sin 2\Phi_0} - \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \frac{1}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_0 \cdot b}{S_0^2} \right) \cdot \frac{da_c}{dt}. \quad (24)$$

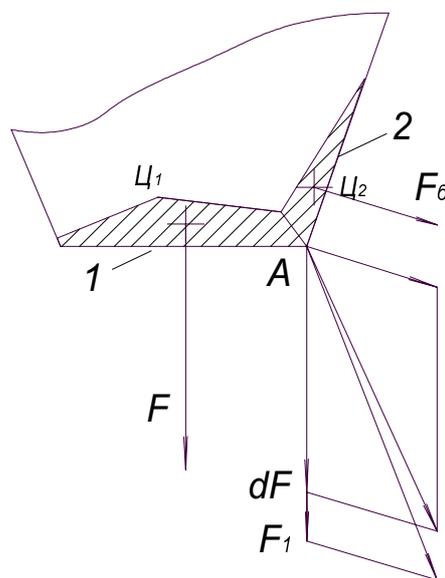


Рис. 6. Сили тертя в умовах невідлогого різання

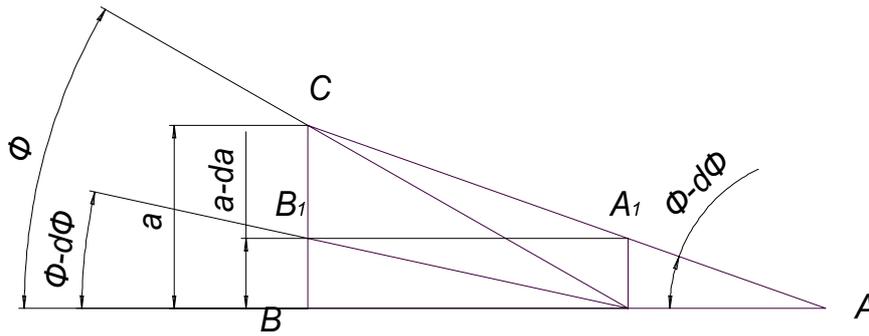


Рис. 7. Зміна кута зсуву внаслідок зміни товщини зрізу і сили тертя

Залежність (24) характеризує зміну деформації зсуву, зумовлену зміною кута тертя на верховому лезі внаслідок невільного різання. З урахуванням (3) і (8), а також приймаючи до уваги, що  $a_0 \cdot b_0 \approx S_0$ , рівняння деформації на передній поверхні буде

$$a_c = a_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{V \cdot \sin 2\Phi_0} - \frac{2 \cdot a_0}{V} \cdot \frac{1}{\sin^2 \Phi_0} \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_{0\delta} \cdot b_0}{S_0^2}\right) \cdot \frac{da_c}{dt} + a_0 \cdot \xi_0 =$$

$$= \frac{a_0}{V \cdot \sin \Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{V \cdot \cos \Phi_0} - \frac{1}{\sin \Phi_0} \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_{0\delta}}{S_0^2}\right) \cdot \frac{da_c}{dt} + a_0 \cdot \xi_0,$$

а в операторній формі

$$a_c = \frac{a_0 \cdot \xi_0}{1 + T_\mu p}.$$

На основі (1) динамічна характеристика сили різання за дією фактора  $\mu$ , що характеризує зміну умов тертя на передній поверхні при невільному різанні, буде дорівнювати

$$P_\mu = \frac{K_P}{1 + T_\mu p} a, \quad (25)$$

де  $T_\mu = \frac{a_0}{V \cdot \sin \Phi_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{\sin \Phi_0} \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_{0\delta}}{S_0} - \frac{1}{\cos \Phi_0}\right)$  – стала часу формування нового значення сили різання внаслідок зміни тертя на верховому лезі в умовах невільного різання.

Наприклад, для початкових даних:  $\xi_0 = 3$ ;  $S_{0\delta} = 0,33$  (0,015+0,315) мм<sup>2</sup>;  $S_0 = 0,23$  мм<sup>2</sup>;  $b_0 = 2,286$  мм;  $a_0 = 0,13$  мм;  $\mu = 0,75$ ;  $V = 60$  м/хв = 1000 мм/с;  $T_\mu = 0,0036$  с. Значення параметрів зрізів отримані моделюванням для  $m = 10$ ;  $z = 88$ ;  $z_0 = 9$ ;  $s_0 = 1,5$  мм/об; НВ 290;  $p = 2750$  МПа.

Знак знаменника передавальної функції (25) залежить від знака різниці у дужках виразу. Умова, при якій цей знак буде додатним, а ланка – стійкою:

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = 2 \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_{0\delta}}{S_0},$$

звідки

$$\operatorname{arctg} \left( 2 \cdot \frac{\mu_0}{1 + \mu_0^2} \cdot \frac{S_{0\delta}}{S_0} \right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Виведені залежності (15), (20), (23), які характеризують вплив окремих факторів на перехідні процеси формування сили різання дозволяють представити її повну динамічну характеристику у вигляді

$$P = \left[ K_p \cdot \left( \frac{1 - T_\gamma p}{1 + T_p p} + \frac{1}{1 + T_\mu p} \right) + K_c \cdot (1 - T_{cp}) \right] a. \quad (24)$$

Структурна система пружної системи різання показана на рис. 8.



Рис. 8. Структурна схема динамічної системи верстата з процесом різання

**Висновки.** Пружна система різання черв'ячної фрези є потенційно нестійкою, оскільки передавальні функції двох її ланок містять знак “-”. Проте, порівняння величин  $T_p$  (0,00752 с),  $T_c$  (0,00039 с),  $T_\gamma$  (0,0001 с) показує, що характеристики інерційності переднього кута і ділянки контакту на задній поверхні є на порядок менші, ніж стала часу стружкоутворення. У той же час характеристика інерційності сили невірного різання черв'ячної фрези ( $T_\mu = 0,0036$  с) відповідає порядку характеристики стружкоутворення. З цього можна зробити висновок, що для умов, які охоплюють область низькочастотних коливань з частотою до 100 Гц, і які домінують у металорізальних верстатах, роль зміни переднього кута, як і зміни контактної ділянки з утворюваною поверхнею при зміщеннях є незначною, а перехідний процес визначають умови зсувної деформації на передній поверхні та умови невірного різання.

Вираз сили різання (24) дає можливість виявити основні закономірності, що становлять основу динамічної характеристики різання. Користуючись цією характеристикою, можна визначити вплив режимів різання, конструкції і геометрії інструмента оброблюваного матеріалу на динамічні процеси, зокрема, на коливання сили різання, умови виникнення вимушених коливань і автоколивань під час різання, а також на основі розрахунків вибрати такі конструктивні, геометричні і технологічні параметри, які б забезпечили стабілізацію стружкоутворення і задану якість обробки зубчастих коліс.

1. Кудинов В.А. Динамика станков. – М., 1967. – 359 с. 2. Грицай І.Є. Моделювання параметрів зрізів, сил та моментів під час нарізання зубчастих коліс черв'ячними фрез //

*Машинознавство*. – 1998. – № 7. – С. 19–24. 3. Грицай І.Є. Моделювання роботи черв'ячної фрези з високими осьовими подачами // *Вісн. ДУ “Львівська політехніка”*. – 1998. – № 321. – С. 17–22. 4. Грицай І.Є. Аналіз параметрів зрізів та розподілу навантаження під час роботи черв'ячної фрези з попутною та зустрічною подачею // *Вісн. ДУ “Львівська політехніка”*. – 1999. – № 359. – С. 10–19. 5. *Механика пластического деформирования в процессах резания и деформирующего протягивания* / А.М.Розенберг, О.А.Розенберг. – К., 1990. – 330 с. 6. *Соколовский А.П. Жесткость в технологии машиностроения*. – М.; Л., 1946. 7. *Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин*. – М., 1966. – 196 с.

УДК 629.113-592

В.А. Дем'янюк

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра автомобілебудування

## ВЕКТОРНИЙ КРИТЕРІЙ ЕФЕКТИВНОСТІ ЕКСТРЕННОГО ГАЛЬМУВАННЯ АВТОМОБІЛЯ

© Дем'янюк В.А., 2001

**Запропоновано новий принцип формування векторного критерію ефективності на базі n скалярних критеріїв. Розглянуто застосування двокомпонентного варіанта векторного критерію для оцінки ефективності екстреного гальмування автомобіля.**

**The new principle of formation of vector criterion of efficiency on base n of scalar criteria is offered. The application of variant of vector criterion consisting of two components, for valuation of efficiency of process of emergency braking of the automobile is considered.**

Гальмування автомобіля, як правило, відбувається в умовах дії різного виду збурень (нерівномірність гальмівних сил на лівих та правих колесах, дія бокової сили тощо), а тому супроводжується зміною параметрів його руху не тільки у поздовжньому, але і у поперечному напрямках. До головних компонент вектора зовнішніх параметрів системи “гальмуючий автомобіль” належать:  $x_c$  та  $y_c$  – відповідно поздовжнє та поперечне переміщення центра мас автомобіля;  $\gamma$  – кут повороту автомобіля відносно вертикальної осі (курсний кут);  $V_x$ ,  $V_y$  та  $\omega$  – відповідні лінійні та кутова швидкості. Компоненти  $V_y$ ,  $\omega$ ,  $y_c$  та  $\gamma$  характеризують стійкість гальмуючого автомобіля, яку можна оцінювати якісними та кількісними методами. Якісні методи базуються на загальній теорії стійкості руху, створеній А.М. Ляпуновим, де рух вивчається на півосі  $0 \leq t \leq \infty$  у припущенні, що збурення на систему припинилось при  $t \leq 0$ . Якщо з плином часу відхилення від незбуреного руху зменшуються, то рух такої механічної системи вважається стійким за Ляпуновим, а якщо збільшується – то нестійким. При цьому критерієм стійкості використовується критична швидкість, що визначається з використанням диференціальних компонент  $V_x$ ,  $V_y$  та  $\omega$ .