

ЧИСЛОВІ ІНТЕГРАТОРИ В ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

© Мороз В.І., 2006

Здійснено аналіз властивостей і похибок числових інтеграторів за умови їхнього використання в цифрових системах керування.

Analyse of the properties and errors of the numeric integrators in the control systems proposed in this article.

Постановка проблеми. Переваги цифрових систем зумовили їхнє широке використання як сучасних засобів автоматизації. У конструюванні таких систем важливою складовою, яка за сучасними оцінками сягає 80 % [9], є створення алгоритмічного і програмного забезпечення. Якщо етап переходу від вже готового алгоритму до програми є налагодженим процесом, то розроблення власне алгоритму є досі “каменем спотикання” під час створення більшості цифрових систем керування. Однією з основних проблем нерідко є застосування відомих числових методів, а найчастіше – формул числового інтегрування для синтезу цифрових регуляторів, зокрема, для реалізації астатичного регулювання заданої координати.

Традиційне використання явної формули Ейлера (явної формули прямокутників) і, дещо рідше, неявної формули трапецій передбачає допустимість певного рівня числових похибок, що властиві числовим інтеграторам низького порядку. Проте залишається нерозв’язаною задача визначення величини і характеру цих похибок у замкнутих системах керування – з погляду регулятора немає різниці між розузгодженням задаючого сигналу і сигналом зворотного зв’язку та похибкою, яка зумовлена числовим інтегратором. Ця проблема ускладнюється в цифрових системах з невисокою розрядністю (більшість промислових мікроконтролерних і мікропроцесорних систем). Для таких систем можна відзначити характерні особливості:

- 1) найчастіше вони працюють з постійним періодом часової дискретизації, тобто, крок інтегрування h є сталим;
- 2) для цифрових систем керування частота відліків є принаймні на порядок вищою від найвищої частоти спектра робочого сигналу [2, 3, 6], тобто, $\omega_0 \geq 10 \cdot \omega_{\max}$, де ω_0 – частота відліків дискретної системи, $\omega_{\max}$ – найвища частота спектра робочого сигналу;
- 3) точність подання коефіцієнтів цифрових інтеграторів є обмеженою внаслідок обмеженої розрядності мікроконтролерів та мікропроцесорів.

Аналіз останніх досліджень. Як вже згадувалося вище, класичні методи проектування цифрових систем керування [2, 3] передбачають здебільшого застосування як інтегратора явної формули Ейлера і, рідше, неявної формули трапецій. Незмінність цього підходу підтверджується новішими розробками не лише традиційних цифрових регуляторів [6, 10], але й сучасних регуляторів з використанням моделей об’єкта [8]. Недоліком існуючих методик є відсутність оцінок величини і характеру похибок під час застосування простих інтеграторів і хоча б приблизного окреслення галузі їхнього раціонального застосування. Не аналізується також вплив точності запису коефіцієнтів формул числових інтеграторів на поведінку цифрових регуляторів.

Задача досліджень. Метою проведених досліджень є вивчення особливостей поведінки цифрових інтеграторів у дискретних системах керування з постійним періодом квантування, виявлення причин цих особливостей і вибір раціонального числового інтегратора для синтезу цифрових регуляторів.

Виклад основного матеріалу. Для дискретних систем керування найпридатнішими є багатокрокові інтегратори, формули яких отримані з умови постійного кроку розв'язування. З огляду на їхні властивості (простота використання та стійкість) [1, 7] до розгляду варто взяти широко розповсюджені явні та неявні формули Адамса (подані нижче до п'ятого порядку включно), особливістю яких є сильна стійкість, наслідком якої декларується відсутність нагромадження числових похибок на дуже довгих інтервалах інтегрування.

	Порядок формули	Формула
<i>Явні формули Адамса</i>	1	$y_{i+1} = y_i + hy'_i;$
	2	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3y'_i - y'_{i-1});$
	3	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2});$
	4	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3});$
	5	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(1901y'_i - 2774y'_{i-1} + 2616y'_{i-2} - 1274y'_{i-3} + 251y'_{i-4});$
<i>Неявні формули Адамса</i>	1	$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1}$
	2	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_{i+1} + y'_i)$
	3	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1})$
	4	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2})$
	5	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(251y'_{i+1} + 646y'_i - 264y'_{i-1} + 106y'_{i-2} - 19y'_{i-3})$

З погляду аналізу поведінки числових методів у системах керування інформативною є їхня реакція на вхідний синусоїдний сигнал (рис. 1), зокрема, найвищої з умови теореми відліків робочої частоти (10 відліків за період – див. вище), що дає змогу реально оцінити похибки кожного з числових методів. Для такого вхідного сигналу неточність методу визначається просто завдяки відомому аналітичному розв'язку. Результати аналізу для явних і неявних формул Адамса показані на рис. 2, з якого видно переваги неявних методів порівняно з явними у разі застосування числових інтеграторів у системах керування.



Рис. 1. Схема числового експерименту дослідження часових характеристик

Аналіз отриманих часових характеристик (рис. 2) показує кращу точність відтворення синусоїдного сигналу методами вище другого порядку. Дослідження формул Адамса обмежувалося п'ятим порядком з таких міркувань:

- формули високих порядків мають вузьку область числової стійкості, що може бути критичним у деяких застосуваннях;
- проведені числові експерименти показали, що підвищення порядку формули інтегратора вище четвертого практично не дає ефекту [4, 5].

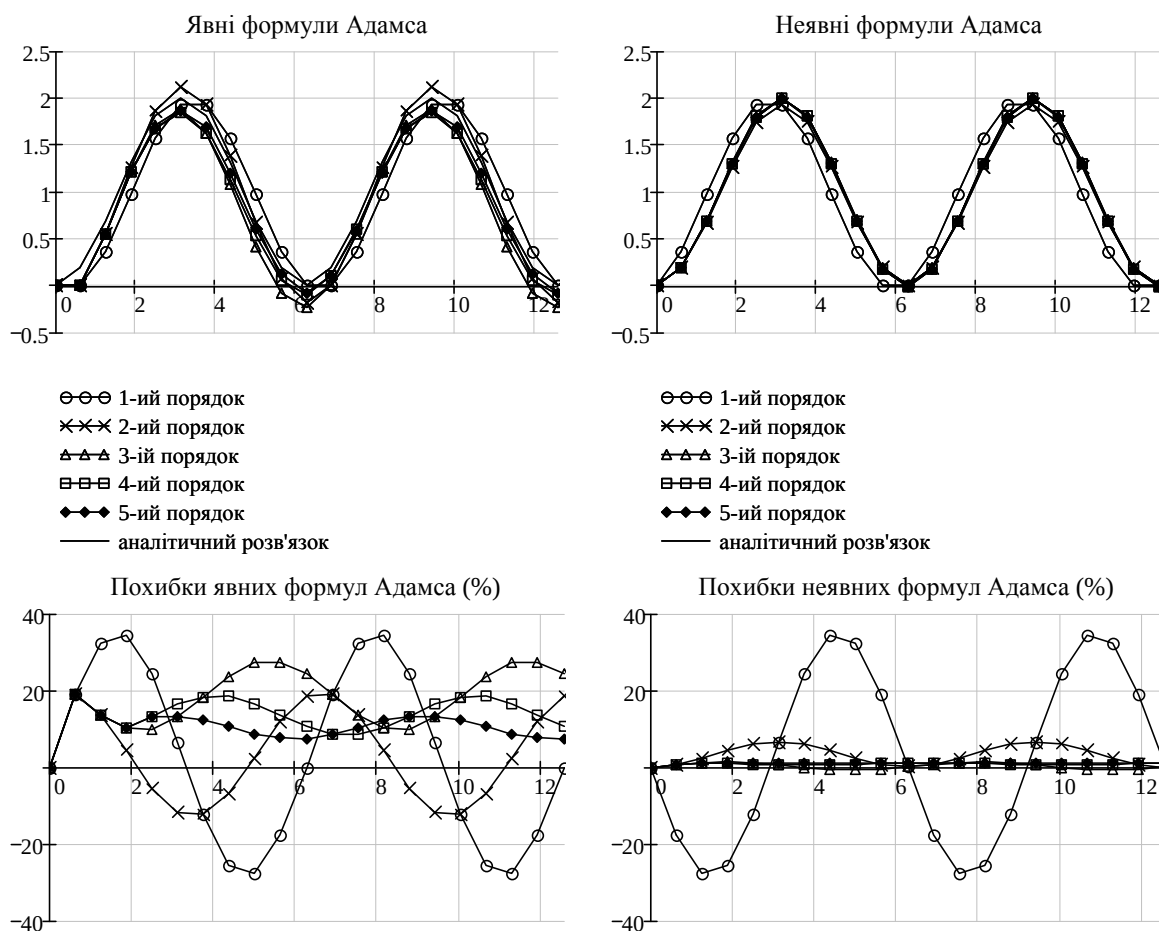


Рис. 2. Дослідження реакцій числових інтеграторів на вхідний синусоїдний сигнал

Наступним кроком в аналізі числових методів інтегрування було дослідження впливу точності запису коефіцієнтів формул на нагромадження похибок та числову стійкість. Для перевірки були проведені числові експерименти, аналогічні до показаних на рис. 1, які підтвердили відсутність нагромадження числових похибок інтегрування на дуже довгих проміжках (до мільйона періодів тестової синусоїди) формулами Адамса другого-п'ятого порядків, навіть, за умови низької точності запису коефіцієнтів формул (лише дві значущі цифри).

Зрозуміти особливості поведінки числових інтеграторів дає можливість їхній аналіз як цифрових фільтрів, зокрема, дослідження амплітудних і фазних частотних похибок [4, 5]. Графіки частотних похибок явних та неявних формул Адамса показано на рис. 3, де за різними осями відкладено амплітудні та фазні погрішності. Наявність значних частотних похибок явних методів Адамса підтверджує отриманий раніше висновок про перевагу неявних формул, які, починаючи з третього порядку, практично не вносять у систему фазних зсувів, а метод трапецій (неявна формула другого порядку) є єдиною формулою інтегрування, яка взагалі не впливає на фазу сигналу.

Отримані в дослідженнях результати свідчать, що з огляду на відхилення у відтворенні вхідного сигналу можна відкинути з подальшого розгляду явні формули інтегрування як менш точні порівняно з неявними і надалі до аналізу брати неявні методи. Аналіз графіків частотних похибок рис. 3 показує, що підвищення порядку формул числового інтегрування призводить до зростання точності, у той же час ускладнюються вирази для обчислень, що може спричинити певні проблеми під час реалізації систем реального часу на мікроконтролерах чи інших обчислювальних пристроях з обмеженою швидкістю. У зв'язку з цим доцільно визначити раціональний порядок

формули числового інтегрування з метою забезпечення максимального кроку для локальної похибки методу в межах 10^{-3} – 10^{-4} , яка є достатньою для більшості цифрових регуляторів.

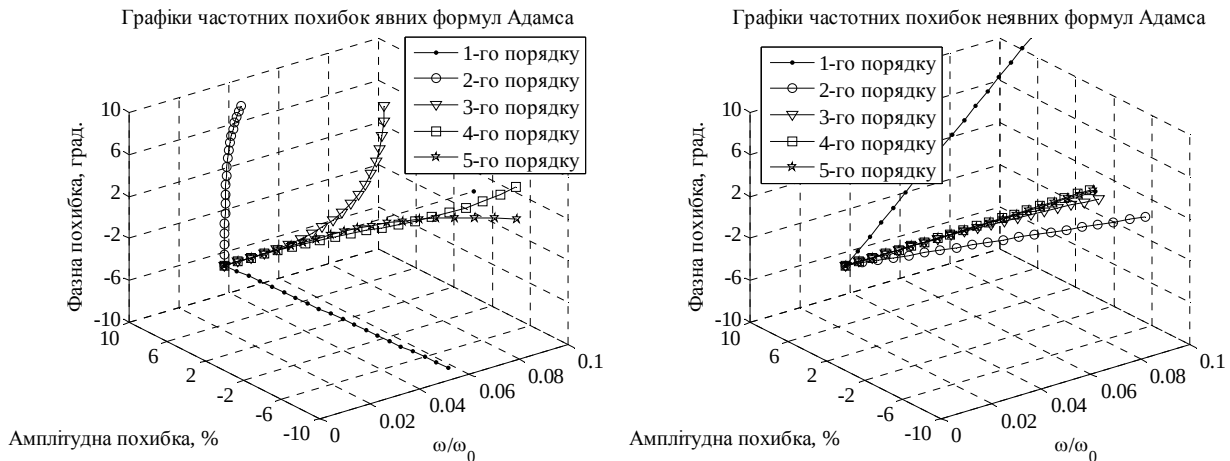


Рис. 3. Графіки частотних похибок числових інтеграторів Адамса

Для аналізу проведено додаткові дослідження часових і частотних характеристик неявних формул другого-п'ятого порядків в області похибок до 1 % (з метою економії місця отримані графіки в статті не наводяться):

- дослідження часових характеристик (рис. 1) засвідчило, що:
 - для 10 відліків за період вхідної синусоїди максимальна похибка інтегратора другого порядку не перевищує 6 %, а третього і вищих порядків – не більше 1 %;
 - для 20 відліків за період вхідної синусоїди максимальна похибка інтегратора другого порядку не перевищує 1.5 %, а третього і вище – не більше 0.1 %, причому похибки інтеграторів четвертого і п'ятого порядків рівноцінні й незначно відрізняються від похибок інтегратора третього порядку;
- аналіз частотних похибок неявних методів показав, що їхнє зменшення в робочому частотному діапазоні цифрового регулятора припиняється вже на формулах третього-четвертого порядку і подальше підвищення порядку формули вже практично не дає ефекту.

Комбінування формул числових інтеграторів різних порядків дозволяє реалізувати процедуру оцінювання похибки інтегрування цифрового регулятора на кожному кроці. Цю процедуру не використовують в сучасних цифрових системах керування, хоча вона є вкрай необхідною для оцінювання можливих неточностей у системі. Практичне здійснення цього способу показане на прикладі поєднання формул другого і третього порядків:

- за допомогою неявної формули трапецій (неявна формула Адамса другого порядку) знаходиться i -те значення інтеграла за формулою

$$I_i^{(2)} = I_{i-1} + \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i);$$

- для уточнення отриманої величини інтеграла застосовується неявна формула Адамса третього порядку, в якій i -те значення інтеграла визначається за формулою

$$I_i^{(3)} = I_{i-1} + \frac{h}{12}(5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1});$$

- оцінку відносної похибки знаходять з виразу

$$\Delta_i = \frac{I_i^{(3)} - I_i^{(2)}}{I_i^{(2)}} = \frac{2y_i - y_{i+1} - y_{i-1}}{6 \cdot (y_{i+1} + y_i)}.$$

Перевірка придатності оцінки похибки інтегрування проведена на попередньому прикладі для синусоїдного вхідного сигналу, а одержані результати показано на рис. 4. Виконаний числовий експеримент показав прийнятність пропонованого підходу для оцінювання похибок числового інтегратора. Деяка розбіжність у результатах оцінювання порівняно з точним значенням є допустимою в силу її природи, яка свідчить лише про можливу величину похибки та сигналізує про необхідність зміни величини кроку або порядку формули інтегрування.

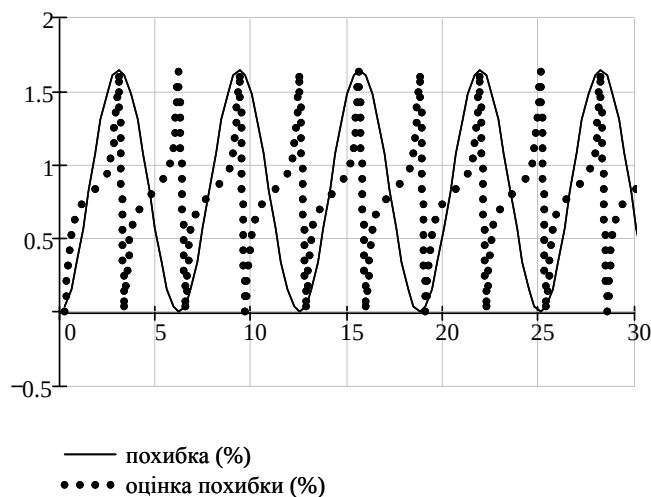


Рис. 4. Відносна похибка (у відсотках) неявного методу трапецій та її оцінка

Наявність фазних похибок числових інтеграторів третього і вищих порядків створює проблему стійкості замкнених систем через внесення додаткових фазних запізнень цифровим регулятором з інтегруючою ланкою. Провести дослідження стійкості системи з інтегратором, зокрема, області стійкості власне числового методу інтегрування, можна за допомогою досить простого числового експерименту, показаного на рис. 5.

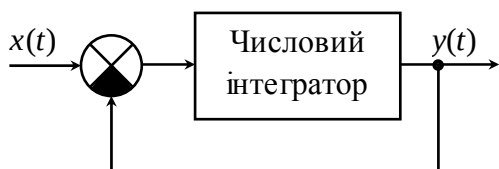


Рис. 5. Експеримент з дослідження області стійкості числових інтеграторів

Дослідження стійкості проводять для нульового вхідного сигналу ($x_i = 0$) та одиничних початкових умов ($y_0 = 1$) за методикою [5]. Приклад отримання рекурентних рівнянь для проведення експерименту з неявною формулою третього порядку показано нижче.

Сигнал на вході інтегратора (див. рис. 5) дорівнюватиме $x(t) - y(t)$, після його підстановки у формулу числового інтегратора $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1})$ з урахуванням, що $x(t) = 0$, матимемо рекурентну формулу для вихідної координати: $y_{i+1} = \frac{(12-8h) \cdot y_i + h \cdot y_{i-1}}{12+5h}$. Для одиничних початкових умов ($y_0 = 1$) та різних кроків інтегрування h будують відповідні часові діаграми (приклад показано на рис. 6).

За отриманими часовими діаграмами встановлюється область стійкого розв'язку для кожної формули числового інтегратора в замкненій системі з одиничним від'ємним зворотним зв'язком (рис. 5). Для формули другого порядку розв'язок завжди стійкий, для формули третього – для кроку $h \leq 6$, для формули четвертого порядку – $h \leq 3$, а для формули п'ятого порядку для стійкого

розв'язку величина кроку h не повинна перевищувати 1.835. Отже, нижчий порядок формули інтегрування забезпечує ширшу область стійкості.

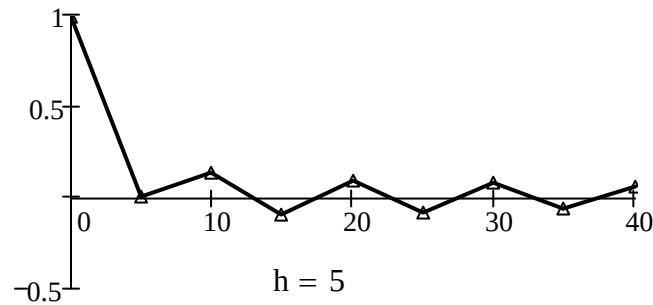


Рис. 6. Результат дослідження стійкості числових інтеграторів

Висновки. Аналіз отриманих результатів дає змогу зробити певні висновки стосовно використання числових інтеграторів у практичній реалізації цифрових систем керування:

- 1) раціональний порядок методу інтегрування не перевищує трьох – числові інтегратори вищих порядків мають меншу область стійкості за умов схожої точності;
- 2) застосування формул вищих порядків призводить до ускладнення розрахункового виразу (особливо для реалізацій на мікроконтролерах) – аналогічного ефекту можна досягти незначним зменшенням кроку для згаданих формул. Як наслідок, для систем невисокої точності раціональним є використання формули трапецій, для високоточних систем рекомендується неявна формула Адамса третього порядку;
- 3) за умови реалізації формулами Адамса інтегратора в замкненій системі керування відсутнє нагромадження числових похибок;
- 4) обмеження точності подання коефіцієнтів формул інтегрування в цифрових регуляторах не впливає на їхню стійкість і не призводить до нагромадження похибок.

1. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – 2003. – http://www.srcc.msu.su/num_anal/list_wrk/sb3_doc/part6.htm 2. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с. 3. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с. 4. Мороз В. Аналіз числових методів для моделювання керованих електромеханічних систем // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2000. – № 403. – С. 111–113. 5. Мороз В. Погляд інженера-електрика на числові методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2003. – № 485. – С. 208–213. 6. Олссон Г., Пиани Дж. Цифровые системы автоматизации и управления. – СПб.: Невский Диалект, 2001. – 557 с. 7. Хайпер Э., Персетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. 8. Harnefors L., Nee H.-P. Model-Based Current Control of AC Machines Using the Internal Model Control Method // IEEE Transactions on Industry Applications. – 1998. – Vol. 34. – No. 1, January/February. – P. 133–141. 9. Heck B., Wills L., Vachtsevanos G. Software Technology for Implementing reusable, Distributed Control Systems // IEEE Control Systems Magazine. – 2003. – February. – P. 21–35. 10. Parvez Sh., Gao Zh. A Wavelet-Based Multiresolution PID Controller // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2005. – Vol. 41. – No. 2, March/April. – P. 537–141.