

матной модели. В кн.: Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры. – Таганрог: ТРТИ, 1976. – Вып.6. – С.84–93. 3. Лебедев Г.Е. Кодирование геометрических конфигураций с помощью квадратичных деревьев. Программирование, 1989. – №1. 4. Оцуки Т. Эвристические алгоритмы для комбинаторных задач с большим объемом вычислений // Дэнси цусим гакайси. – 1975,58. – № 4. – С.416–423. 5. Чура І.І. Методи структурної верифікації в конструкторських задачах автоматизованого проектування. Дисертація на соискание вч.ст. к.т.н. – Львів, 1995.

УДК 62-503.56

В. Борщ, В. Коваль, Б. Костик

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РЕЖИМОВ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

© Борщ В., Коваль В., Костик Б., 2004

Рассмотрена возможность применения графоаналитического метода для исследования динамики оптимальных по быстродействию систем с учётом периодичностей. Предлагаемый метод основан на использовании принципа максимума, метода фазовой плоскости в совокупности с методом «попятного движения», графического решения дифуравнений в конечных разностях, метода «веера секущих».

The opportunity of application graphanalysis of a method for research of dynamics optimum on speed of systems is considered in view of periodicity. The offered method is based on use of a principle of a maximum, method of a phase plane in aggregate with a method "backward movement", graphic decision differential equation in final differences, method "fan of crosslines".

Введение

Системы фазовой автоподстройки частоты (СФАПЧ) находят широкое применение в телекоммуникационных сетях [1]. Одной из специфических особенностей их работы является наличие нелинейностей (например, фильтров с нелинейными характеристиками; периодической в функции фазовой ошибки нормированной характеристики фазовых детекторов (ФД); нелинейных возмущений и коэффициентов в матмоделях, описывающих их поведение). Использование теорий оптимального управления усложняет решение задачи, например построение оптимальных по быстродействию СФАПЧ в соответствии с принципом максимума [2] сводится к кусочно – постоянному (релейному) управлению; а их реализация к – вводу в схемы нелинейных логических устройств (НЛУ). Кроме того, неизвестность начальных условий вспомогательной вектор – функции, о которой говорится в принципе максимума, также усложняет поиск решения.

Указанные обстоятельства существенно затрудняют разработку и проектирование СФАПЧ, как средств телекоммуникаций. В случае возможности выполнения точных расчетов, например, когда нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие динамику и статику СФАПЧ, допускают их аналитическое интегрирование, решение задачи выполнимо и разговор может вестись лишь о сложности самой процедуры. При невозможности точного аналитического расчёта или сложности самой процедуры поиска решения целесообразно использовать приближенные численные, графические и графоаналитические методы [3, 4].

В данной работе предлагается графоаналитический метод построения оптимальных режимов оптимальных по быстродействию переходных процессов в СФАПЧ, основанный на использовании приближенного решения дифуравнения в конечных разностях и метода «веера секущих».

Постановка задачи и исходные данные для ее решения

Постановка задачи формулируется в классическом виде задачи на максимальное быстродействие: требуется найти оптимальное управление заданным объектом, переводящее его из начального состояния в конечное (заданное) за минимальную длительность времени. Специфика решения задачи заключается в особенностях объекта управления и применяемых управляющих воздействий (см. следующий подраздел). Исходные данные для решения задачи базируются на использовании статических характеристик и матмоделей звеньев объекта, а также учета вида управляющих воздействий. Таким образом, решение задачи применимо лишь к детерминированным объектам управления.

Математическая модель объекта управления

В качестве конкретного примера рассмотрим СФАПЧ второго порядка с инерционным ФНЧ, управляемой величиной (фазовой координатой) объекта которой является фазовая ошибка системы $\varphi(t) = \varphi_{\text{ЭГ}}(t) - \varphi_{\text{ПГ}}(t)$, а управляющим воздействием – напряжения на выходе ФД. Структурная схема оптимальной по быстродействию СФАПЧ приведена на рис. 1. Поведение объекта управления, представленной на рис. 1 СФАПЧ, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = S_{\text{УЭ}} \omega(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} T_{\Phi} + \omega(t) = k u \{F[\varphi(t)], T_{\Phi}\} \end{cases} \quad (1)$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{1}{T_{\Phi}} \omega(t) = b u \{F[\varphi(t)], T_{\Phi}\} \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ – фазовая ошибка СФАПЧ (фазовая координата); $\varphi_{\text{ЭГ}}(t)$, $\varphi_{\text{ПГ}}(t)$ – фаза эталонного (ЭГ) и подстраиваемого (ПГ) генераторов соответственно; $\omega(t)$ – сигнал на выходе ФНЧ; $S_{\text{УЭ}}$ – крутизна управляющего элемента; T_{Φ} – постоянная времени ФНЧ; $F[\varphi(t)]$ – дискриминационная характеристика ФД; T_{Φ} – период $F[\varphi(t)]$; $u\{F[\varphi(t)], T_{\Phi}\}$ – сигнал на выходе ФД (управляющее воздействие); $b = S_{\text{УЭК}} / T_{\Phi}$ – постоянный коэффициент; k – коэффициент усиления (затухания) ФНЧ; t – время.

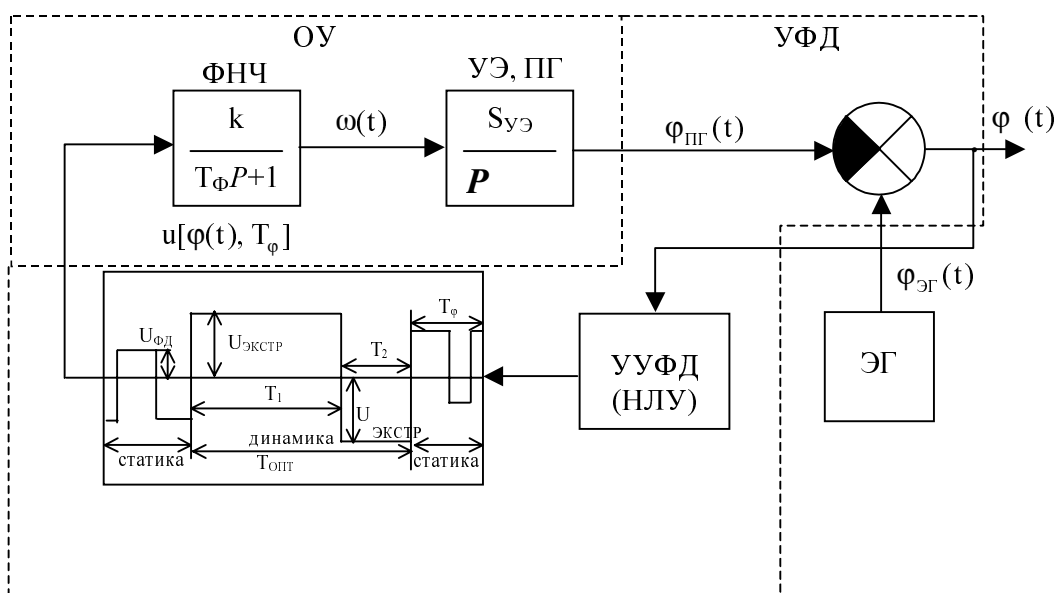


Рис. 1. Структурная схема оптимальных по быстродействию СФАПЧ

Оптимальный алгоритм управления и его специфика

При существовании оптимального при быстродайствии управления объектом (2) необходимо рассчитать длительности интервалов и точку переключения оптимальных управления, поведение фазовых координат $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ в статике и динамике, все параметры переходного процесса, построить фазовый портрет системы.

Применение принципа максимума [2] к матмодели имеют ряд специфических свойств. Запишем систему дифуравнений (2) в виде:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{1}{T_\phi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = bu\{F[\varphi(t)], T_\phi\}. \quad (3)$$

Главная особенность управления объектом (3) заключается в наличии периодического от фазовой координаты управляющего воздействия $u\{F[\varphi(t)], T_\phi\}$, что предопределяет периодическое во времени изменение фазовых координат объекта $\varphi(t)$ и $\omega(t)$. Данное обстоятельство не учитывалось при доказательстве принципа максимума и сводится к наличию не одного, а бесконечного счетного множества состояний равновесия объекта.

Применим к объекту (2) принцип максимума [2]. Согласно принципу максимума для объекта (2) при оптимальном по быстродайствию управлении необходимо существование таких ненулевых непрерывных вспомогательных функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, чтобы для всех t в заданном интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ функция Гамильтона $H\{u\{F[\varphi(t)], T_\phi\}\}$ в заданной области допустимых значений функции управления достигала максимума с соблюдением условия постоянства во времени:

$$H = \psi_1\omega + \psi_2 bu\{F[\varphi(t)], T_\phi\} \quad (4)$$
$$\text{макс } u\{F[\varphi(t)], T_\phi\}.$$

Для нахождения максимума функции H по управляющему воздействию U и необходимо определить вспомогательные функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1. \end{cases} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) дает следующий результат:

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{10} = \text{const}, \\ \psi_2 = \psi_{20} - \psi_{10}t, \end{cases} \quad (6)$$

где ψ_{10} и ψ_{20} соответственно неизвестные начальные условия вспомогательных переменных ψ_1 и ψ_2 .

Максимизируя функцию Гамильтона (4) по управляющему воздействию $u\{F[\varphi(t)], T_\phi\}$ с учетом уравнений (6) и $b=\text{const}$, получим следующий вид оптимального по быстродайствию алгоритма управления объектом (2):

$$U_{\text{ОПТ}} = U_{\text{ФД}} \text{sign } F[\varphi(t)] + U_{\text{ЭКСТР}} \text{sign } (\psi_{20} - \psi_{10}t), \quad (7)$$

где $U_{\text{ФД}}$ – амплитуда динамической дискриминационной характеристики ФД; $U_{\text{ЭКСТР}}$ – максимальное или минимальное значение напряжения на выходе ФД.

Проанализируем полученный оптимальный алгоритм управления (7) с учетом максимизации функции Гамильтона (4) и сформулируем требования, предъявляемые к форме характеристики ФД, динамике и статике изменения сигнала на его выходе, а также отметим особенности оптимальных по быстродайствию управлений.

1. Оптимальный алгоритм управления (7) содержит слагаемое

$$G'[\varphi(t)] = U_{\text{ФД}} \text{sign } F[\varphi(t)], \quad (8)$$

характеризующее его составляющую в функции мгновенной разности фаз генераторов, и второе слагаемое – в функции времени

$$G''(t) = U_{\text{ЭКСТР}} \text{sign } (\psi_{20} - \psi_{10} t). \quad (9)$$

Временная составляющая «роднит» исследуемые объекты с оптимальными по быстродействию аналоговыми и дискретными системами, в которых она является единственным управлением [2, 5]. Наличие составляющей вида (8) является главным отличием оптимальных по быстродействию систем с периодическими управляющими воздействиями от оптимальных систем иных классов, известных из литературы. Это обстоятельство предопределяет целый ряд специфик при исследовании таких систем, например, фазовое пространство системы становится периодическим, невозможен аналитический расчет параметров режимов переходных процессов.

2. Максимум функции (4) по временной составляющей достигается при выполнении следующих условий, вытекающих из выражения (7) и физической сущности процессов в СФАПЧ:

$$G''_1 = +U_{\text{ЭКСТР}}, \text{ если } \psi_{20} - \psi_{10} t > 0, \quad (10)$$

или

$$G''_2 = -U_{\text{ЭКСТР}}, \text{ если } \psi_{20} - \psi_{10} t < 0. \quad (11)$$

Следовательно, при оптимальном по быстродействию управлении (7) сигнал на выходе ФД должен быть знакопеременным во времени согласно выполнению условий (10) или (11) и изменяться по закону изменения ψ_2 в соответствии со вторым уравнением системы (6).

3. Моменты смены знака оптимального управляющего воздействия $G''(t)$ по временной составляющей соответствуют переходу через 0 соотношения, стоящего под знаком сигнум алгоритма (7). Временная составляющая $G''(t)$ может испытывать не более одной смены знака, так как при любых знаках и величинах постоянных интегрирования непрерывной и ненулевой вектор – функции ψ соотношение под оператором сигнум может изменять знак не более одного раза (иметь не более одного вещественного корня).

Указанное обстоятельство определяет протекание оптимальных по быстродействию режимов переходных процессов в системе (3) не более, чем за два интервала оптимального движения, что соответствует известной теореме об n ($n=2$) интервалах [2, 5].

4. Периодическая составляющая (8) мгновенного выходного напряжения ФД представляет собой существенно нелинейную (с периодом $T_\varphi = 2\pi = \text{const}$) однозвенную функцию разности мгновенных фаз ЭГ и ПГ и имеет один максимум и один минимум за период.

Максимизация функции (4) по периодической составляющей алгоритма (7) при $T_\varphi = \text{const}$ реализуется в знакопеременной в функции фазовой ошибки системы характеристикой ФД. При учете ограничений только на величину $U_{\text{ФД}}$ это обстоятельство определяет прямоугольную дискриминационную характеристику $F[\varphi(t)]$ ФД.

5. Реализация оптимального по быстродействию закона управления (7) при обработке фазовой ошибки сводится к приподнятию характеристики ФД в силу условий (8) и (9) в сторону, обеспечивающую движение изображающей точки в направлении к замкнутой кривой оптимального предельного цикла (динамика системы). В статике будут осуществляться вынужденные колебания с параметрами, определяющими $F[\varphi(t)]$.

Графоаналитический метод решения задачи

Исходными данными расчёта являются матмодели объекта управления (2), заданные (экспериментально снятые) характеристики динамических звеньев объекта, известное начальное и конечное состояние объекта, найденный в предыдущем подразделе работы оптимальный закон изменения периодического управляющего воздействия.

Решение задачи заключается в построении движения компонент $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ вектора фазовых координат объекта во времени и определении всех параметров оптимальных по быстрдействию режимов переходных процессов, нахождение моментов и координат точки переключения управляющего воздействия и $\{F[\varphi(t)], T_\varphi\}$.

Структура динамических звеньев объекта управления (2) (см. рис. 1) представляет собой последовательное соединение интегрирующего и инерционного звеньев. Представим уравнения (2) динамики звеньев объекта в приращениях:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega; \\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{1}{T_\varphi} \omega = b u \{F[\varphi(t)], T_\varphi\} \end{cases} \quad (12)$$

Выполним графическую часть расчета. Представим статические характеристики динамических звеньев объекта управления в прямоугольных системах координат $\omega-u$ и $\omega-\varphi$ (см. рис. 2). Построим переходный процесс в инерционном звене, динамика которого соответствует второму уравнению системы (2), используя метод «веера секущих» (см. рис. 2). Графическое представление выполняется следующим образом:

- выбираем масштабы по координатам ω и t (обычно $\Delta t \approx (0.05 \div 0.2)T_\varphi$), исходя из требуемой точности расчета;
- по оси ординат откладываем величины оптимального управляющего воздействия в $bU_{ЭКСТР}$ и через полученную точку проводим прямую, параллельную оси абсцисс;
- на прямой откладываем интервалы времени $\Delta t \ll T_\varphi$ и на расстоянии от начала координат, равном $T_\varphi + \frac{\Delta t}{2}$ (в соответствии со свойствами экспоненциальных функций: длина проекции на ось абсцисс секущей, проведенной через две точки экспоненты, разность абсцисс которых равна Δt , приближенно равна $T + \frac{\Delta t}{2}$, где T – постоянная времени экспоненты), отмечаем точку a ;
- соединяем начало координат с точкой a и получаем точку 1 экспоненты на пересечении этой прямой с перпендикуляром, восстановленным к оси абсцисс в конце первого интервала времени Δt ;
- соединяем точку 1 с концом интервала времени Δt , отложенном от точки a , и получаем точку δ ;
- соединяем прямой точку 1 с точкой δ , получаем точку 2 экспоненты на пересечении этой прямой с перпендикуляром, опущенным к оси абсцисс в конце второго интервала времени Δt ;
- продолжая вышеописанную методику графического построения, получаем остальные точки экспоненты;
- соединяя между собой плавной кривой полученные точки, строим экспоненту, являющейся статической характеристикой инерционного звена и характеризующей переходный процесс в соответствии с указанными условиями.

В координатной системе $\omega-u$ (см. рис. 2, б) строим характеристики инерционного звена (рис. 2, а) и оптимального управляющего воздействия $\pm bU_{ЭКСТР}$ в виде двух прямых, параллельных оси ординат, и отступающих от нее в разные стороны на расстояние, равное $bU_{ЭКСТР}$.

В координатной плоскости $\omega-\varphi$ строим статическую характеристику интегрирующего звена, динамика которого описывается первым уравнением системы (2) – прямая, проведенная из начала координат под углом, равным 45° .

Произведем масштабирование фазовых координат объекта управления и определим углы α_1 и α_2 :

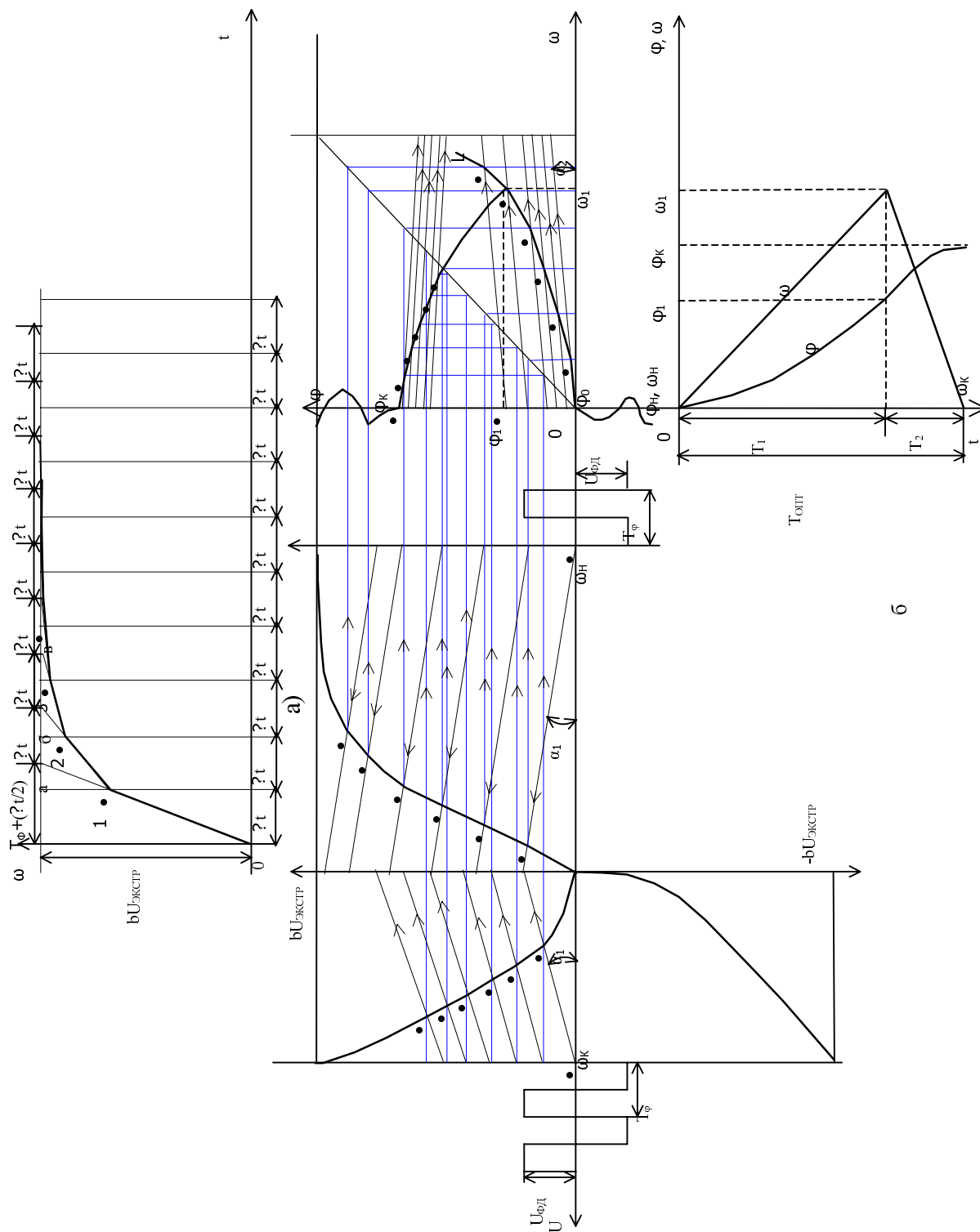


Рис. 2. Графоаналитический метод исследования динамики и статистики СФАПЧ:
а) определение режима переходного процесса в инерционном звене методом «веера секций»; б) построение оптимальных по быстрдействию управлений

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \Delta t \frac{M_{\text{УОПТ}}}{M_{\omega}}; \quad (13)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \Delta t \frac{M_{\omega}}{M_{\varphi}}. \quad (14)$$

Обозначим начальное состояние системы (2) точкой ω_n в первой координатной системе и 0 – началом координат – во второй; а конечное – ω_H и φ_K в соответствующих плоскостях.

Процесс построения будем вести в обеих координатных системах в двух встречных направлениях от начального состояния объекта управления к конечному и наоборот. Это положение соответствует прямому и попятному движению изображающей точки во времени.

Ход построения дальнейшего графического решения поставленной задачи очевиден по представленному на рис. 2,б. Наклон лучей построения равен α_1 в первой координатной плоскости и α_2 – во второй.

Переходные режимы изменения фазовых координат $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ строятся откладыванием их приращений для каждого Δt . Кривая $\omega(t) = f[\varphi(t)]$ является фазовым портретом системы и используется при синтезе оптимальной по быстродействию СФАПЧ, в частности при определении структуры НЛУ.

Аналитическая часть расчета заканчивается определением моментов переключения оптимального управляющего воздействия с $+bU_{\text{ЭКСТР}}$ на $-bU_{\text{ЭКСТР}}$; длительности интервалов T_1 и T_2 оптимального движения и всего оптимального переходного процесса $T_{\text{ОПТ}}$; а также координат точек переключения ω_{11} и φ_{11} , оптимального управляющего воздействия.

Точка пересечения координат на фазовой плоскости $\omega-\varphi$ (см. рис. 2, б) является точкой переключения оптимального управляющего воздействия с координатами ω_{11} и φ_{11} , что соответствует окончанию первого интервала оптимального управления. Длительность интервалов оптимального управления T_1 и T_2 определяется суммированием интервалов времени Δt_1 , а длительность всего оптимального управления равна сумме длительности первого и второго интервалов:

$$T_{\text{ОПТ}} = T_1 + T_2. \quad (15)$$

Основные результаты и выводы

Показана принципиальная возможность применения графоаналитических методов исследования динамики оптимальных по быстродействию систем с учетом периодичности управляющих воздействий. С этой целью обобщены и получили совместное дальнейшее развитие с учетом специфики рассматриваемых систем принцип максимума, приближенное графическое решение дифуравнений в конечных разностях, метод «веера секущих».

1. Борщ В.И., Гайдар В.П., Коваль В.В., Лесовой И.П. *Тактовая синхронизация в интегральных цифровых системах электросвязи*. – К.: Наукова думка, 1998. – 202с.:ил. 2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М.: Наука, 1969. – 384с. 3. Башарин А.В. *Расчет динамики и синтез нелинейных систем управления*. – М. –Л.:Госэнергоиздат, 1960. 4. Егоров К.В. *Основы теории автоматического регулирования: Учебное пособие*. – М.:Энергия, 1967. – 648с. 5. Павлов А.А. *Синтез реальных систем, оптимальных по быстродействию (метод фазового пространства)*. – М.: Наука, 1966.