УДК 556.537

М. ДУМА

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: mykhailo.v.duma@lpnu.ua

КОМПЛЕКСНА ОПТИМІЗАЦІЯ ГНСС-МЕРЕЖ

Мета. Розробити методику комплексної оптимізації ГНСС-мереж із урахуванням двох параметрів – значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці та середньої квадратичної похибки одиниці ваги, яка ґрунтується на покроковому вилученні векторів зі схем вимірювань та уточненні місця положення пунктів. Експериментально перевірити її достовірність на модельних ГНСС-мережах. Встановити залежність схеми вимірювань та оптимальної конфігурації мережі, визначити межі, в яких варто оптимізувати схему вимірювань. Визначити оптимальну кількість векторів, що вилучатимуться для забезпечення необхідної точності визначення координат пункту. **Методика.** Для проєктування нових та оновлення наявних ГНСС-мереж розроблено спеціальну методику оптимізації геометричної конфігурації мережі, яка полягає у пошуку положення пунктів, за якого значення критеріїв буде найкращим. Методика полягає у почерговому вилученні векторів із максимальними поправками, які визначаються з послідовних ітерацій урівноваження мережі. Після кожної ітерації визначають критерії оптимізації. Як критерії оптимізації використано нормований детермінант коваріаційної матриці та значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги. Після кожного видалення виконувався пошук оптимального положення пунктів ГНСС-мережі. **Результати.** Розроблено методику комплексної оптимізації ГНСС-мереж із урахуванням двох параметрів – значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці та середньої квадратичної похибки одиниці ваги. Встановлено межі оптимальної кількості вимірів, які необхідно відсіяти, для того щоб забезпечити оптимальну геометричну конфігурацію та схему вимірювань у ГНСС-мережі. В результаті перевірки запропонованої методики на змодельованій мережі, що складалась із 14 пунктів, комплексна оптимізація ГНСС-мережі забезпечила підвищення точності на 62,4–98,0 %, у разі зменшення кількості вимірюваних векторів знизилась на 18,7–63,0 %, що сприятиме зменшенню тривалості спостережень і позитивно позначиться на одному із визначальних факторів, а саме на вартості робіт. **Наукова новизна та практична значущість.** Наведено методику комплексної оптимізації ГНСС-мереж із урахуванням двох параметрів – значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці та середньої квадратичної похибки одиниці ваги. Розроблену методику можна використовувати як для оптимізації наявних ГНСС-мереж, у яких значна кількість надлишкових вимірювань та які необхідно розширити, так і для проєктування нових. Результатом оптимізації є мережа із оптимальною конфігурацією та оптимальною схемою вимірювань.

Ключові слова: оптимізація; геометрична конфігурація пунктів мережі; ГНСС-мережа; схема вимірювань; D-критерій.

Вступ

Питанням комплексної оптимізації геодезичних мереж науковці всього світу займаються дуже давно. Важливими завжди були визначення оптимальної схеми вимірювань, оптимальної тривалості та періодичності спостережень, оптимальної конфігурації мережі, а також їх поєднання. У результаті необхідно отримати мережу із оптимальною точністю та надійністю, а головне – яку економічно вигідно створити, оскільки вартість завжди є одним із визначальних факторів.

Оскільки іноді виникає потреба оптимізувати вже сформовану мережу (видалити слабкі пункти, замінити пошкоджені чи закласти нові) або створити нову, розроблення такої методики дасть змогу проєктувати мережі із найкращою конфігурацією та оптимальною схемою вимірювань, що позитивно позначиться на тривалості спостережень та вартості робіт загалом.

У цій публікації висвітлено дослідження, спрямовані на визначення оптимальних меж, у яких варто здійснювати оптимізацію конфігурації мережі паралельно із оптимізацією схеми вимірювань.

Розглянемо деякі із досліджень у цій сфері. Оптимізацію схеми вимірювань для забезпечення необхідної точності фіксації мінімальних зміщень висвітлено в [Alizadeh-Khameneh M., 2015]. В мережі із 35 пунктів (Лілла Едіт, Швеція) здійснено оптимізацію двома методами, на основі одного та двох параметрів оптимізації (точність та надійність). Встановлено, що для забезпечення точної фіксації мінімальних зміщень 3 мм можна видалити 28 та 8 % векторів для першого та другого методів відповідно, а для забезпечення точності 4 мм – 40 та 22 %. Аналогічний підхід використано в [Bagherbandi, 2009], де до параметрів точності та надійності долучено критерій вартості, який є важливим чинником проведення вимірювань. Оптимізацію геодезичної мережі трьома методами (із урахуванням параметрів: точності, надійності та вартості) також виконано у [Eshagh, 2007] і в результаті встановлено, що оптимізована мережа за параметром надійності дає невеликі позиційні зміни порівняно з мережами, отриманими у результаті оптимізації за точністю та вартістю. Проте під час оптимізації за параметрами точності та вартості спостерігається видалення деяких спостережень, водночас оптимізація за параметром надійності сприяє збереженню якнайбільшої кількості надлишкових вимірювань. Також встановлено, що мережі, сформовані в результаті оптимізації за параметром надійності, найкраще підходять для дослідження деформаційних процесів.

У [Savchyn, 2016] подано алгоритми оптимізації геометрії ГНСС-мережі Дністровської ГАЕС (Україна). В результаті у мережу із 43 пунктів додано чотири нових пункти та вилучено із програми вимірювань чотири "слабких" пункти. Оптимізацію виконано на основі значення детермінанта коваріаційної матриці. Подібний підхід використано і у [Amiri-Simkooei, 2007; Berne, 2007], де для оптимізації використано параметр надійності та значення детермінанта коваріаційної матриці. В обох випадках підбирали геометричну форму мережі, значення точності та надійності вимірювань у якій будуть найкращими. В [Amiri-Simkooei, 2001] викладено алгоритм оптимізації геодезичної мережі моніторингу, що містить перший, другий та третій етапи. На першому етапі "слабкі" точки мережі замінюють на жорсткі, на другому збільшують кількість надлишкових вимірювань для точок, які розміщені по периметру мережі, а на третьому для підвищення надійності додають зворотні вимірювання "слабких" ліній.

У [Третяк, 2018] розглянуто сумісну оптимізацію схеми вимірювань та конфігурації мережі із забезпеченням необхідної точності, як цільову функцію оптимізації використано значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці. Проте видалення векторів зменшує кількість надлишкових вимірювань у мережі, що негативно впливає на жорсткість мережі, змінюється також надійність.

Мета

Метою цієї роботи є розроблення методики сумісної оптимізації геометрії розташування пунктів з використанням умови мінімальної кількості вимірювань у мережі та досягнення допустимої похибки визначення координат пунктів, яка ґрунтується на покроковому вилученні векторів зі схем вимірювань та уточненні місця положення пунктів, а також визначенні оптимальних меж, у яких можна видаляти виміри.

Методика

Розроблення методики оптимізації ГНСС-мережі виконано на прикладі модельної мережі з 14 пунктів (рис. 1). Один її пункт прийнято за вихідний, а положення трьох пунктів, які розміщувались по периметру мережі, потребує уточнення, тобто змінюватиметься.

У цій мережі виконано моделювання вимірювань всіх можливих векторів (91 вектор). Зазначимо, що для моделювання похибок вимірювань використано нормальний закон розподілу.

Для оптимізації ГНСС-мережі запропоновано універсальну методику, яка ґрунтується на почерговому вилученні зі схеми вимірювань векторів та пошуку оптимального положення для вибраних пунктів ГНСС-мережі. Вилучення продовжується, поки залишиться мінімальна кількість векторів, необхідних для врівноваження. Для реалізації цієї методики використано програмне забезпечення MathCAD15

Відповідно до запропонованої методики в модельній ГНСС-мережі виконували послідовне вилучення векторів із найбільшими значеннями поправок за результатами врівноваження:

$$\nu = A \cdot \Delta x + L , \qquad (1)$$

де A – матриця коефіцієнтів рівнянь поправок; Δx – поправки у наближені значення шуканих параметрів, які визначаються з урівноваження; L – матриця-вектор вільних членів.

Тобто припускали, що вектори із максимальними поправками є векторами, значення похибок яких найбільші [Третяк, 2013].

Після кожного видалення виконували пошук оптимального положення трьох вибраних пунктів ГНСС-мережі, координати яких визначали за залежністю:

$$\begin{aligned} x_i^I &= x_i + S_i^I \cdot \cos(\alpha_i), \\ y_i^I &= y_i + S_i^I \cdot \sin(\alpha_i), \end{aligned} \qquad (2)$$

де x_i та y_i – початкові координати вибраних пунктів ГНСС-мережі; α_i – напрямок руху кожного пункту, за якого покращуються значення цільової функції (у цій методиці використано детермінант коваріаційної матриці); S_i^I – відстань, на яку необхідно перемістити пункт у напрямку α_i.

Напрямок руху кожного пункту визначається градієнтним методом, що ґрунтується на пошуку приростів цільової функції [Третяк, 2013]:

$$tg(\alpha_i) = \frac{\nabla y_i}{\nabla x_i}, \qquad (3)$$

де $\nabla x_i = \dfrac{F(x_i + l, y_i) - F(x_i - l, y_i)}{2 \cdot l}$ – приріст цільової функції по осі X; $\nabla y_i = \dfrac{F(x_i, y_i + l) - F(x_i, y_i - l)}{2 \cdot l}$ – приріст цільової функції по осі Y; l – стала величина, на яку змінювали кожну координату (в цій методиці рекомендовано використовувати 1 метр); $F(x, y)$ – цільова функція.

Оскільки в заданому напрямку пункт може переміщуватись до нескінченності, то в такому випадку задача оптимізації може втратити сенс. У зв'язку з цим на процес оптимізації накладено обмеження (радіус зони, в межах якої можна переміщати пункт, – R), в результаті цільова функція набуде вигляду:

$$\Phi\left(x,y\right)=F\left(x,y\right)+k\begin{cases}\left(S_i^I-R_i\right)\le 0 & \Rightarrow \quad k=0,\\ \left(S_i^I-R_i\right)\rhd 0 & \Rightarrow \quad k=\left(S_i^I-R_i\right)\cdot m,\end{cases} \tag{4}$$

де m – стала величина, яка залежить від кількості пунктів у мережі.

Після кожної ітерації вилучення зі схеми вимірювань векторів та пошуку оптимального положення для вибраних пунктів ГНСС-мережі обчислюють значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці [Третяк, 2013] та середньої квадратичної похибки одиниці ваги за виразами:

$$D=\sqrt[3n]{\left|Q_x\right|},\qquad \mu=\sqrt{\frac{\sum \nu^2}{r}}, \tag{5}$$

де Q_x – коваріаційна матриця; n – кількість пунктів у мережі; r – кількість надлишкових вимірювань у мережі.

На основі проведеного почергового вилучення із схеми вимірювань векторів та пошуку оптимального положення побудовано графік зміни значень параметрів (5).

Як видно із графіків, значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці D на початку відсіювання векторів змінюється (збільшується) повільніше, ніж надалі. Це пов'язано з тим, що у вихідній мережі виміряно всі можливі вектори, тобто кількість надлишкових вимірів велика і видалення одного вектора неістотно впливає на зміну значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці. Проте з кожною наступною ітерацією вартість вектора для мережі зростає, тому наступні видалення все чіткіше відображаються на графіку.

Протилежний процес спостерігається у разі зміни значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ_{priori}, яка зменшується швидше на початку відсіювання векторів. Пов'язано це із тим, що першими відсіюються вектори, які містять найбільші поправки [Третяк, 2013]. Оскільки наприкінці вилучаються вектори із мінімальними поправками, то і зміна μ_{priori} є мінімальною, що чітко відображено на графіку.

Під час відсіювання векторів із максимальними поправками спостерігається покращення середньої квадратичної похибки одиниці ваги та погіршення значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці, отже, необхідно визначити, за якої схеми вимірювань їх співвідношення буде оптимальне. Аналізуючи експериментально встановлені зміни функцій μ_{priori} та D_{priori} для різних мереж, виявили, що їх найкраще описують функціональні залежності виду:

$$\mu_{priori}(k)=\frac{a_\mu}{b_\mu+k^{c_\mu}},\qquad D_{priori}(k)=a_D e^{b_D k}+c_D, \tag{6}$$

де $a_\mu, b_\mu, c_\mu, a_D, b_D, c_D$ – невідомі коефіцієнти, які визначають у результаті апроксимації; k – номер ітерації. Точність апроксимації функції μ_{priori} та D_{priori} становить 4,1 % та 1,6 % відповідно.

У параметрів μ_{priori} та D_{priori} різні фізична природа та метрика, тому для приведення їх до однієї системи оперуватимемо нормованими похідними:

$$\left|\frac{d\mu_{priori}(k)}{\mu_{priori}(k)dk}\right|=-\frac{k^{a_\mu-1}\cdot a_\mu}{k^{a_\mu}+b_\mu},\qquad \left|\frac{dD_{priori}(k)}{D_{priori}(k)dk}\right|=\frac{e^{k\cdot b_D}\cdot a_D\cdot b_D}{e^{k\cdot b_D}\cdot a_D+c_D}. \tag{7}$$

Відповідно до [Abramowitz, 1972, Thomas, 1992] для визначення критичних точок функцій використовують часткові похідні другого порядку. А визначивши такі похідні для виразів (7), отримаємо точки, які характеризують збільшення швидкості зміни функцій (6). Наведемо вирази для визначення других часткових похідних функцій (6)

$$\left|\frac{d^2\mu_{priori}(k)}{\mu_{priori}(k)dk^2}\right|=\frac{2\cdot k^{2\cdot a_\mu-2}\cdot c_\mu\cdot a_\mu{}^2}{c_\mu\cdot(k^{a_\mu}+b_\mu)^2}-\frac{k^{a_\mu-2}\cdot(a_\mu-1)\cdot a_\mu\cdot c_\mu}{c_\mu\cdot(k^{a_\mu}+b_\mu)},\qquad \left|\frac{dD_{priori}{}^2(k)}{D_{priori}(k)dk^2}\right|=\frac{a_D\cdot b_D{}^2\cdot e^{b_D k}}{a_D\cdot e^{b_D\cdot k}+c_D}. \tag{8}$$

На рис. 3 подано графіки зміни других нормованих похідних функцій $\mu(k)$ та $D(k)$.

Тобто критичні точки функцій $\mu(k)$ та $D(k)$, визначені методом других похідних [Abramowitz, 1972; Thomas, 1992], розділять виміряні вектори на три категорії. Перша категорія – це вектори, які видаляють до досягнення функцією $\mu(k)$ її максимуму, вони містять найбільші поправки і негативно впливають на мережу загалом. Друга категорія – вектори, які видаляються в проміжку між максимумами функцій $\mu(k)$ та $D(k)$, і є групою векторів, у межах видалення яких і потрібно здійснювати оптимізацію мережі. Третя категорія – вектори, які видаляють після досягнення максимуму функцією $D(k)$ і видалення кожного із яких істотно впливає, що негативно позначається на мережі, тому видаляти ці вектори не рекомендовано.

З поданих графіків (рис. 3) видно, що максимуму функції μ_{priori} досягнуто на 34-й ітерації (17 відсіяних векторів), після чого значення цього параметра починає зменшуватись повільніше. Функція D_{priori} досягає свого максимуму на 116-й ітерації (58 відсіяних векторів), після чого її значення починає стрімко погіршуватись. З наведеного вище можна зробити висновок, що оптимальна кількість відсіяних векторів – між максимумами вибраних функцій. Яку ж саме кількість векторів відсіювати в певній мережі, залежатиме лише від значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги, яку необхідно забезпечити.

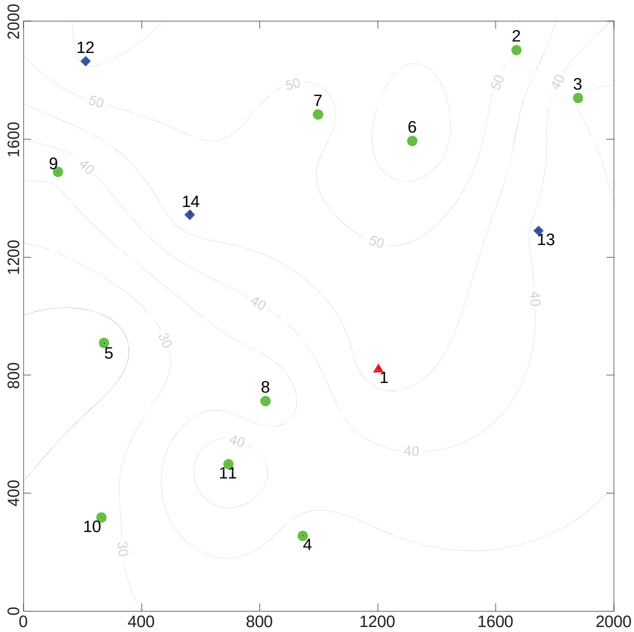


Рис. 1. Схема модельної ГНСС-мережі
(● – пункти мережі, ● – пункти, положення яких можна змінювати, ● – вихідні пункти)

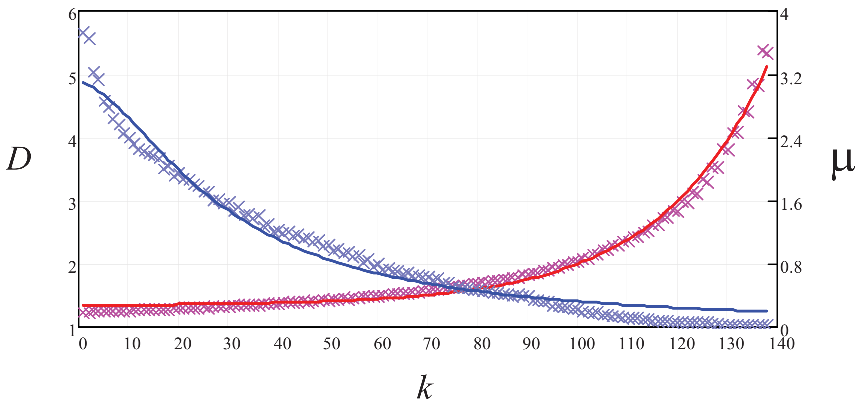
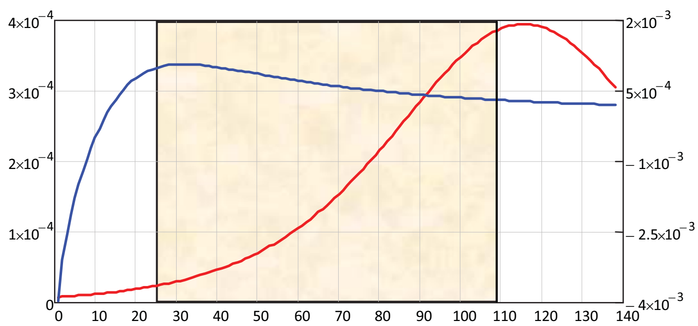


Рис. 2. Зміна значень нормованого детермінанта коваріаційної матриці та середньої квадратичної похибки одиниці ваги у разі послідовного вилучення векторів із максимальними похибками (— – μ_{priori} ; — – D_{priori} , × – D , × – μ)

$$\left|\frac{d^2\mu_{priori}(k)}{\mu_{priori}(k)dk^2}\right|$$



$$\left|\frac{dD_{priori}{}^2(k)}{D_{priori}(k)dk^2}\right|$$

k

Рис. 3. Графіки зміни значень других нормованих похідних функцій $\mu(k)$ та $D(k)$

$$\left(\text{—} - \left|\frac{d^2\mu_{priori}(k)}{\mu_{priori}(k)dk^2}\right| ; \text{—} - \left|\frac{dD_{priori}{}^2(k)}{D_{priori}(k)dk^2}\right| \right)$$

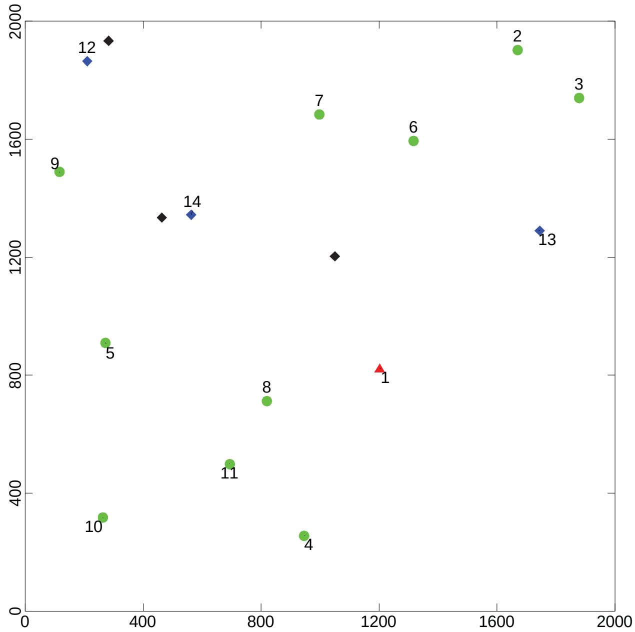


Рис. 4. Оптимальна конфігурація мережі за максимуму функції $\mu(k)$ *(– пункти мережі; – пункти, положення яких можна змінювати (проєктні); – вихідні пункти; – оптимальне розташування пунктів)*

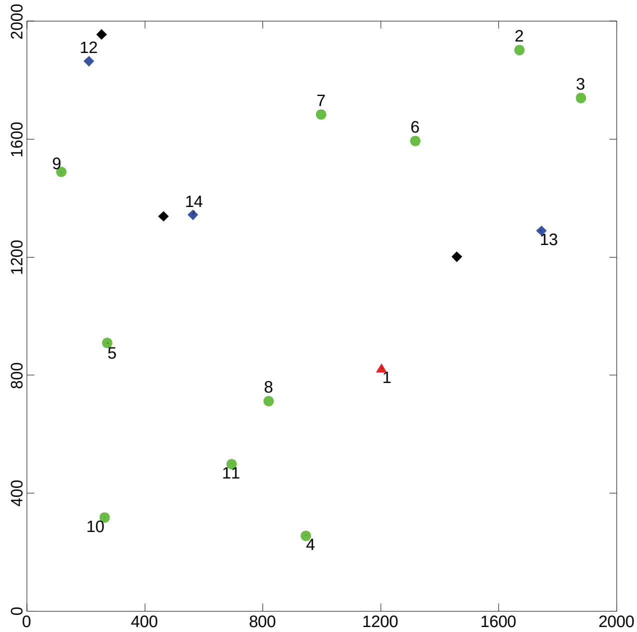


Рис. 5. Оптимальна конфігурація мережі за максимуму функції $D(k)$ *(– пункти мережі; – пункти, положення яких можна змінювати (проєктні); – вихідні пункти; – оптимальне розташування пунктів)*

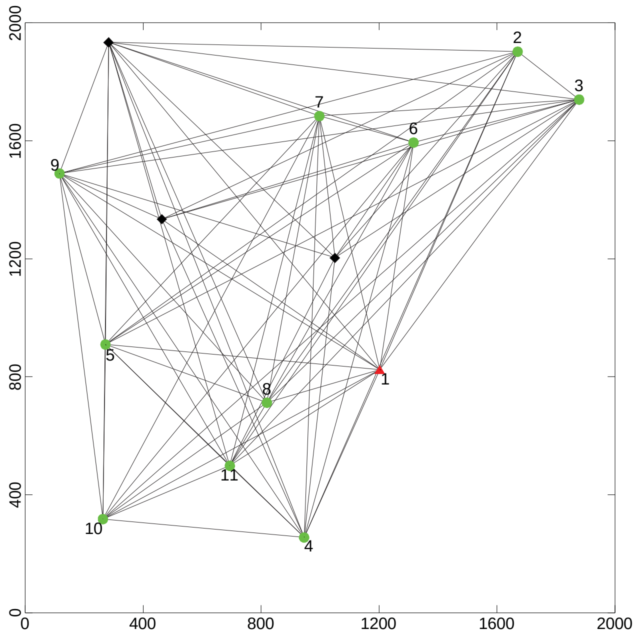


Рис. 6. Схема виміряних векторів у мережі за оптимальної конфігурації мережі для максимуму функції $\mu(k)$ *(– пункти мережі; – вихідні пункти; – положення пунктів після оптимізації)*

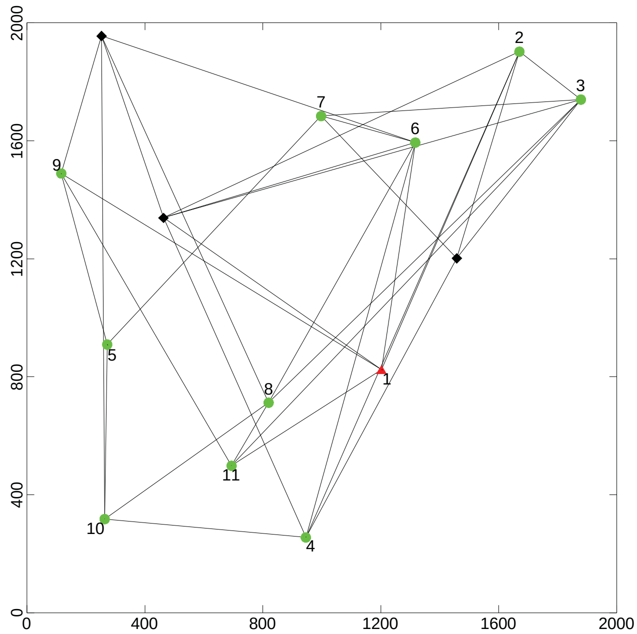


Рис. 7. Схема виміряних векторів у мережі за оптимальної конфігурації мережі для максимуму функції $D(k)$ *(– пункти мережі; – вихідні пункти; – положення пунктів після оптимізації)*

Для аналізу ефективності запропонованої методики порівняємо кількісні параметри мережі після оптимізації із їхніми початковими значеннями. Оскільки під час кожного видалення вектора визначали нові оптимальні координати пунктів, положення яких можна змінювати, то для порівняння вибрано результати, отримані на 34-1 та 116-1 ітераціях, яким відповідали максимуми других похідних функцій $\mu(k)$ – рис. 4 та $D(k)$ – рис. 5 відповідно.

З наведених рисунків видно, що у двох проаналізованих випадках всі пункти, вибрані для оптимізації, змінили своє положення, а це свідчить, що їхнє розташування було не найкращим. Якщо порівняти напрямки руху пунктів, можна зауважити, що вони змінюються не кардинально і тенденція руху зберігається. На прикладі пункту 13 видно, що відстань вже може змінюватись суттєво і в деяких випадках обмежуватиметься лише радіусом, у межах якого можна розміщувати вибраний пункт. Проаналізувавши рухи пунктів, бачимо, що вони спрямовані на утворення із найближчими до них пунктами фігур, подібних до рівносторонніх трикутників та геодезичних чотирикутників, які вважають ідеальними в геодезичних побудовах. Різними для цих випадків є також схеми вимірюваних векторів, подані на рис. 6 та рис. 7. відповідно. Оскільки перед кожним переміщенням пунктів видаляли один вектор, їх кількість постійно зменшувалась.

У першому випадку із схеми вимірювань видалено 17 векторів, які містили найбільші поправки, а в другому 58. Для узагальнення та зручності порівняння отриманих результатів оптимізації їх виражено у відсотковому співвідношенні та наведено в таблиці.

Результати, отримані під час оптимізації модельної ГНСС-мережі

	Початкові значення		34-та ітерація (max $\left\lvert\frac{d^2\mu_{priori}(k)}{\mu_{priori}(k)dk^2}\right\rvert$)		116-та ітерація (max $\left\lvert\frac{dD_{priori}{}^2(k)}{D_{priori}(k)dk^2}\right\rvert$)	
μ_{priori}	3,7 мм	–	1,4 мм	–62,4 %	0,1 мм	–98,0 %
D_{priori}	1,24	–	1,35	+8,7 %	2,63	+112 %
Кількість видалених векторів	0	–	17	18,7 %	58	63,7 %

З аналізу отриманих результатів видно, що на 34-й ітерації значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги покращилось на 62,4 %, а на 116-й на 98,0 %, що пов'язано із послідовним вилученням зі схеми вимірювань векторів, які містять найбільші поправки. Значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці погіршились на 8,7 % та 112 %, що відповідає 34-й та 116-й ітерації відповідно, це пов'язано зі зменшенням надлишкових вимірів у мережі. Кількість вимірюваних векторів зменшилась для першого випадку на 18,7 %, а для другого на 63 %, що сприятиме зменшенню тривалості спостережень і позитивно вплине на вартість робіт.

Висновки

Розроблено методику оптимізації ГНСС-мереж з урахуванням двох параметрів – значення нормованого детермінанта коваріаційної матриці та середньої квадратичної похибки одиниці ваги.

Встановлено залежність схеми вимірювань та оптимальної конфігурації мережі, визначено межі, в яких варто здійснювати оптимізацію схеми вимірювань.

Аналізуючи отримані результати, можна зробити такі висновки:

- Вектори, що відсіюються до досягнення максимуму функції $\mu(k)$, у будь-якому випадку необхідно вилучати зі схеми вимірювань, бо вони містять найбільші помилки, що негативно впливає на точність мережі загалом;
- відсіювання векторів не варто продовжувати після досягнення максимуму функцією $D(k)$, оскільки вилучення кожного наступного вектора істотно знижує точність мережі;
- оптимальна кількість вилучених векторів – у проміжку між максимумами функцій $\mu(k)$ та $D(k)$, а яку ж саме кількість відсіювати, необхідно вибирати залежно від точності, що потрібно забезпечити.

Пропоновану методику можна використовувати для всіх ГНСС-мереж – і наявних, у яких велика кількість надлишкових вимірювань та які необхідно розширити, і для проєктування нових, в результаті чого отримаємо мережу із оптимальною конфігурацією та оптимальною схемою вимірювань

Література

Третяк К. Р. (2003). Апостеріорна оптимізація геодезичних мереж. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, С. 127–141.

Третяк К. Р., Савчин І. Р. (2013). Розроблення методики розрахунку надійності активних геодезичних мереж. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, № 77, С. 122–126.

Третяк К. Р., Дума М. В. (2018). Оптимальне проектування і згущення інженерних ГНСС-мереж. Інженерна геодезія, № 65, С. 32–41.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, p. 14.

Alizadeh-Khameneh M., Eshagh M., Sjoberg L. (2015). Ortimization of Lilla Edet land slide GPS monitoring network. *Journal of geodetic sciences*. No. 5, С. 57–66.

Amiri-Simkooei A. (2001). Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength. *Journal of surveying engineering*. С. 104–117.

Amiri-Simkooei A. (2007). Analytical first-order-design of geodetic networks. *Iranian journal of engineering sciences,* No. 1(1), С. 1–14.

Bagherbandi M., Eshagh M., Sjoberg L. (2009). Multi-objective versus single-objective models in geodetic network optimization. *Nordic journal of surveing and real estate reserch*. No. 6(1), С. 7–20.

Berne´ J., Baselga S. (2004). First-order design of geodetic networks using the simulated annealing method. *Journal of Geodesy*. No. 78, С. 47–54.

Eshagh M., Kiamehr R. (2007). A strategy for optimum designing of the geodetic networks from the cost,

reliability and precision views. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, No. 42, pp. 297–308.
Grafarend E. (1974). Optimization of geodetic networks. *Bolletino di Geodesia a Science Affini,* No. 33, pp. 351–406.
Oday Y. M. Zahraa. GNSS Baseline Configuration Based on First Order Design.
Savchyn I. R., Duma M. V. (2016). Dnister PSPP control GNSS network optimization. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, № 84, pp. 17–24.
Thomas G. B., Finney R. L. (1992). Calculus and Analytic Geometry. Maxima, Minima, and Saddle Points. 8th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 881–891.

M. DUMA

Department of Higher geodesy and astronomy, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: mykhailo.v.duma@lpnu.ua

COMPLEX OPTIMIZATION OF GNSS NETWORKS

Purpose. The development of methodology of complex optimization of GNSS networks using two parameters – the value of the normalized determinant of the covariance matrix and the mean square error of the unit of weight. Experimentally verify the reliability of the methodology on the model GNSS networks. **Methodology**. To design new and update existing GNSS networks, a special methodology for optimizing the geometric configuration of the network is developed, which is to find the position of the points in which the value of the criteria will be the best. The methodology is based on filtering the measurement results of networks is in out of order exclusion vectors with maximum corrections, which is determined from successive iterations of network adjustment. After each iteration, it's determined the value of optimization criteria. As the criteria for optimization, the normalized determinant of the covariance matrix and the mean square error of the unit of weight are used. After each filtering, the optimal position of the GNSS network points was searched. **Results.** Is developed the methodology of a complex optimization of GNSS networks using two parameters - the value of the normalized determinant of the covariance matrix and the mean square error of the unit of weight. The limits of the optimal number of measurements that need to be removed to provide optimal geometric configuration and measurement scheme in the GNSS network are established. Complex optimization of the GNSS network has improved accuracy by 62.4–98.0 % and decrease the number of measured vectors by 18.7–63.0 %, which will lead to a decrease in observation time and will positively affect the cost of work. **Scientific novelty and practical significance.** The represented methodology can be used for the complex optimization of any GNSS networks with a large number of redundant measurements. The optimization result is a network with optimal configuration and optimal measurement scheme.

Key words: optimization; geometric configuration of the network; GNSS network; measurement scheme; D-criterion.

References

Tretiak K. R. (2003). Aposteriorna optymizatsiia heodezychnykh merezh. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva*, pp. 127–141.
Tretiak K. R., Savchyn I. R. (2013). Rozroblennia metodyky rozrakhunku nadiinosti aktyvnykh heodezychnykh merezh. *Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia*, No. 77, pp. 122–126.
Tretiak K. R., Duma M. V. (2018). Optymalne proektuvannia i zghushchennia inzhenernykh HNSS-merezh. *Inzhenerna heodeziia,* No. 65, pp. 32–41.
Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, p. 14.
Alizadeh-Khameneh M., Eshagh M., Sjoberg L. (2015). Ortimization of Lilla Edet land slide GPS monitoring network. *Journal of geodetic sciences,* No. 5, pp. 57–66.
Amiri-Simkooei A. (2001). Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength. *Journal of surveying engineering*, pp. 104–117.
Amiri-Simkooei A. (2007). Analytical first-order-design of geodetic networks. *Iranian journal of engineering sciences*, № 1(1), pp. 1–14.
Bagherbandi M., Eshagh M., Sjoberg L. (2009). Multi-objective versus single-objective models in geodetic network optimization. *Nordic journal of surveing and real estate reserch*, No. 6(1), pp. 7–20.
Berne´ J., Baselga S. (2004). First-order design of geodetic networks using the simulated annealing method. *Journal of Geodesy*. № 78, pp. 47–54.
Eshagh M., Kiamehr R. (2007). A strategy for optimum designing of the geodetic networks from the cost, reliability and precision views. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, No. 42, pp. 297–308.
Grafarend E. (1974). Optimization of geodetic networks. *Bolletino di Geodesia a Science Affini,* No. 33, pp. 351–406.
Oday Y. M. Zahraa. GNSS Baseline Configuration Based on First Order Design.
Savchyn I. R., Duma M. V. (2016). Dnister PSPP control GNSS network optimization. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, No. 84, pp. 17–24.
Thomas G. B., Finney R. L. (1992). Calculus and Analytic Geometry. Maxima, Minima, and Saddle Points.8th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 881–891.