ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 70–74

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 70–74

КОЕФІЦІЄНТИ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ І a-ТОЧКИ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Андрусяк І. В.[a], Філевич П. В.[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*
[b] *Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, 76018, Івано-Франківськ, Україна*

(Отримано 21 жовтня 2014 р.)

Для трансцендентних цілих функцій встановлено зв'язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності їх a-точок та швидкістю прямування до 0 послідовності їх тейлорових коефіцієнтів.

Ключові слова: ціла функція, a-точка, лічильна функція a-точок, усереднена лічильна функція a-точок, максимальний член, центральний індекс, максимум модуля, характеристика Неванлінни.

2000 MSC: 30D20, 30D35

УДК: 517.53

Вступ

Використовуємо стандартні означення і позначення теорії розподілу значень мероморфних функцій (див., наприклад, [1]).

Зокрема, якщо $f \not\equiv \text{const}$ – ціла функція і $a, z\in\mathbb{C}$, то число z називаємо a-точкою (a-точкою кратності m) функції f, якщо z є нулем (нулем кратності m) функції $f-a$. Нехай $n_f(r,a)$ – лічильна функція a-точок функції f. Усереднену лічильну функцію a-точок функції f визначаємо за рівністю

$$N_f(r,a)=\int\limits_0^r \frac{n_f(t,a)-n_f(0,a)}{t}dt+n_f(0,a)\ln r.$$

Нагадаємо, що число a називається пікаровим винятковим значенням функції f, якщо кількість її a-точок є скінченною. Як відомо, трансцендентна ціла функція має в $\mathbb{C}$ щонайбільше одне пікарове виняткове значення.

Якщо число $a\in\mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням функції f, то нехай $(\zeta_n(a))$ – послідовність усіх a-точок цієї функції, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Зауважимо, що у такому випадку f є трансцендентною цілою функцією.

Нехай, також, (a_n) – послідовність коефіцієнтів степеневого розвинення функції f в околі точки $z=0$, тобто $a_n=f^{(n)}(0)/n!$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$).

Наступну теорему, яка встановлює зв'язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності $(\zeta_n(a))$ і швидкістю прямування до 0 послідовності (a_n), доведено в [2].

Теорема A. *(i) Якщо число $a\in\mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\zeta_n(a)|\sqrt[n]{|a_n|}\ge 1;$$

(ii) Існує ціла функція f без пікарового виняткового значення така, що для кожного $a\in\mathbb{C}$ правильна рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\zeta_n(a)|\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

Для всіх $r>0$ визначимо максимальний член і центральний індекс функції f відповідно за рівностями

$$\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n: n\in\mathbb{N}_0\},$$
$$\nu_f(r)=\max\{n\in\mathbb{N}_0:\ |a_n|r^n=\mu(r,f)\}.$$

Частину (i) теореми A уточнює така теорема ([3]).

Теорема B. *Якщо число $a\in\mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\zeta_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}\ge\exp\left(\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln\mu_f(r)}{\nu_f(r)}\right). \quad (1)$$

Метою роботи є доведення трьох сформульованих нижче теорем, які доповнюють наведені вище результати робіт [2] і [3].

Теорема 1. *Якщо число $a\in\mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\zeta_{n-1}(a)|\sqrt[n]{|a_n|}\ge\exp\left(\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)}\right). \quad (2)$$

Теорема 2. *Для довільного $\delta\in[0;+\infty]$ існує ціла функція f без пікарового виняткового значення* *така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконуються співвідношення*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)} = \delta,$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = e^{\delta}. \tag{3}$$

Теорема 3. *(i) Існують ціла функція f і число $a \in \mathbb{C}$, яке не є пікаровим винятковим значенням функції f, такі, що*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} < \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)}; \tag{4}$$

(ii) Існують ціла функція f і число $a \in \mathbb{C}$, яке не є пікаровим винятковим значенням функції f, такі, що

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} > \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)}. \tag{5}$$

Зауважимо, що теорема 2 вказує на точність оцінок (1) і (2). Теорема 2 показує, що оцінка (1) не є наслідком оцінки (2), а оцінка (2) не є наслідком оцінки (1).

I. Доведення теореми 1

Нехай число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{6}$$

$(\zeta_n(a))$ — послідовність усіх a-точок функції f, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Доведемо, що тоді виконується нерівність (2).

Враховуючи, що $n_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a) \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, досить довести, що для довільного $q \in (0,1)$ множина тих $n \in \mathbb{N}$, для яких

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} > q e^{\frac{N_f(|\zeta_{n-1}(a)|,a)}{n}},$$

є нескінченною.

Припустимо, від супротивного, що існують числа $q \in (0,1)$ і $n_1 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \leq q e^{\frac{N_f(|\zeta_{n-1}(a)|,a)}{n}}, \quad n \geq n_1. \tag{7}$$

Нехай m – кількість членів послідовності $(\zeta_n(a))$, що дорівнюють нулю. Приймемо $b_m = 1$ і $b_n = \prod_{j=m}^{n-1} \frac{1}{|\zeta_j(a)|}$ для всіх натуральних $n \geq m+1$. Розглянемо степеневий ряд

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n.$$

Оскільки

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = |\zeta_n(a)| \to +\infty, \quad n \to \infty,$$

і $b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то функція g, яку задає цей ряд, є цілою.

Легко переконатися (детально такі міркування проведено, наприклад, в роботі [4] під час доведення теореми 2 цієї роботи), що

$$\ln \mu_g(r) = N_f(r,a) =$$
$$= \begin{cases} \ln r^m, & \text{якщо} \quad r \in (0, |\zeta_m(a)|], \\ \ln(b_n r^n), & \text{якщо} \quad r \in [|\zeta_{n-1}(a)|, |\zeta_n(a)|] \text{ і } n \geq m+1, \end{cases}$$

зокрема,

$$N_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a) = \ln(b_n |\zeta_{n-1}(a)|^n), \quad n \geq m+1. \tag{8}$$

Скориставшись нерівністю (7) і рівністю (8), для всіх $n \geq n_2$ отримуємо

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \exp\left(\frac{1}{n} \ln(b_n |\zeta_{n-1}(a)|^n)\right) =$$
$$= q \sqrt[n]{b_n} |\zeta_{n-1}(a)|,$$

звідки випливає, що

$$|a_n| \leq q^n b_n, \quad n \geq n_2.$$

Оскільки центральний індекс $\nu_h(r)$ кожної трансцендентної цілої функції h є неспадною необмеженою зверху на $(0,+\infty)$ функцією, то

$$\min\{\nu_f(r), \nu_g(r)\} \geq n_2, \quad r \geq r_0,$$

а тому для всіх $r \geq r_0/q$ маємо

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq n_2\} \leq$$
$$\leq \max\{b_n (qr)^n : n \geq n_2\} = \mu_g(qr) = e^{N_f(qr,a)}.$$

Далі нам буде потрібна така класична теорема Валірона (див., наприклад, [5, с. 184]).

Теорема C. *Для довільної трансцендентної цілої функції h і кожного $p \in (0,1)$ правильне співвідношення*

$$M_h(pr) = o(\mu_h(r)), \quad r \to +\infty,$$

де $M_h(r) = \max\{|h(z)| : |z| = r\}$ — максимум модуля функції h.

Скориставшись встановленою вище нерівністю $\ln \mu_f(r) \leq N_f(qr, a)$, $r \geq r_0/q$, і теоремою Валірона, отримуємо

$$\ln M_f(qr) - N_f(qr, a) \to -\infty, \quad r \to +\infty,$$

що суперечить рівності Йєнсена, згідно з якою

$$N_f(r,a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) - a| d\theta - \ln |c(a)| \leq$$
$$\leq \ln M_f(r) + O(1), \quad r \to +\infty,$$

де $c(a)$ — перший ненульовий коефіцієнт в розвиненні функції $f - a$ в степеневий ряд в околі точки $z = 0$. Теорему 1 доведено.

II. Доведення теореми 2

Нехай $\delta \in [0;+\infty]$. Доведемо, що існує ціла функція f без пікарового виняткового значення така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконуються співвідношення (3).

У випадку $\delta = 0$ досить розглянути функцію f, існування якої стверджується у частині (ii) теореми A, і скористатись теоремами B і 1.

Якщо $\delta = +\infty$, то достатньо розглянути довільну трансцендентну цілу функцію f, для якої

$$\ln \mu_f(r) = O(\ln^2 r), \quad r \to +\infty.$$

Справді, для кожної такої функції і довільного $a \in \mathbb{C}$ при $r \to +\infty$ виконуються (див., наприклад, [6]) співвідношення

$$N_f(r,a) \sim \ln \mu_f(r), \quad n_f(r,a) = o(N_f(r,a)),$$
$$\nu_f(r) = o(\ln \mu_f(r)),$$

звідки бачимо, що функція f не має пікарового виняткового значення і виконується перше зі співвідношень (3) (з $\delta = +\infty$). З огляду на наведене, друге зі співвідношень (3) випливає з теореми B.

Для доведення теореми 2 у випадку $\delta \in (0,+\infty)$ нам буде потрібний один результат з роботи [7]. Перш ніж його сформулювати, введемо деякі позначення.

Розглянемо довільну трансцендентну цілу функцію вигляду

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{9}$$

і для кожного $r \geq 0$ приймемо

$$S_g(r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}, \quad \rho_g = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_g(r)}{\ln r}.$$

Величина ρ_g, як відомо, називається порядком функції g і може бути обчислена через коефіцієнти цієї функції за такою класичною формулою Коші–Адамара:

$$\rho_g = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |b_n|}.$$

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ – деякий ймовірнісний простір, а $(\omega_n((\omega)))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$ випадкових величин. Поряд з функцією (9) розглянемо випадкову трансцендентну цілу функцію

$$g_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)} z^n. \tag{10}$$

Для функції (10) правильне наступне твердження ([7]).

Теорема D. *Нехай g — довільна трансцендентна ціла функція скінченного порядку вигляду (9). Тоді для випадкової цілої функції (10) майже напевне для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення*

$$N_{g_\omega}(r,a) \sim \ln S_g(r), \quad r \to +\infty. \tag{11}$$

Повернемось до доведення теореми 2. Нехай, отже, $\delta \in (0,+\infty)$.

Приймемо $b_0 = 1$ і нехай $b_n = \left(\frac{e}{\delta n}\right)^{n\delta}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді, як легко бачити, степеневий ряд (9) з так визначеними коефіцієнтами b_n задає цілу функцію g, для якої за наведеною вище формулою Коші–Адамара маємо $\rho_g = \frac{1}{\delta}$.

Крім того, дослідивши на екстремум функцію $y(x) = \left(\frac{e}{\delta x}\right)^{x\delta} r^x$, $x \geq 1$, для кожного $r > 0$ отримуємо

$$\mu_g(r) = \max\left\{\left(\frac{e}{\delta n}\right)^{n\delta} r^n : n \in \mathbb{N}\right\} =$$
$$= \max\left\{\left(\frac{e}{\delta x}\right)^{x\delta} r^x, \left(\frac{e}{\delta(x+1)}\right)^{(x+1)\delta} r^x\right\},$$

де $x = x(r) = \left[\frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}\right]$. Звідси випливає, що

$$\ln \mu_g(r) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \to +\infty.$$

Тоді, як легко довести (див., наприклад, [4]),

$$\nu_g(r) \sim \frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \to +\infty.$$

Далі, скориставшись рівністю Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = S_g^2(r),$$

бачимо, що $S_g(r) \leq M_g(r)$. Крім того, $\mu_g(r) \leq S_g(r)$. Тому, врахувавши, що для кожної трансцендентної цілої функції g скінченного порядку виконується (див., наприклад, [8, с. 185]) співвідношення

$$\ln \mu_g(r) \sim \ln M_g(r), \quad r \to +\infty,$$

отримуємо

$$\ln S_g(r) \sim \ln \mu_g(r) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \to +\infty.$$

Поряд з функцією g розглянемо випадкову цілу функцію g_ω вигляду (10). За теоремою D існує множина $A \in \mathcal{A}$ така, що $\mathrm{P}(A) = 1$ і для кожного $\omega \in A$ та всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення (11), а тому й співвідношення

$$N_{g_\omega}(r,a) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \to +\infty,$$

з якого випливає (див., наприклад, [4]), що

$$n_{g_\omega}(r,a) \sim \frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \to +\infty. \tag{12}$$

Зафіксуємо довільне $\omega \in A$ і приймемо $a_n = b_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Зрозуміло, що степеневий ряд (6) з так визначеними коефіцієнтами a_n задає цілу функцію $f = g_\omega$, яка, згідно з тим, що співвідношенням (12) виконується для всіх $a \in \mathbb{C}$, не має пікарових виняткових значень.

Оскільки $|a_n| = |b_n|$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mu_g(r)}{\nu_g(r)} = \delta,$$

Крім того, для кожного $a \in \mathbb{C}$ маємо

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_f(r,a)}{N_f(r,a)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N_{g_\omega}(r,a)}{n_{g_\omega}(r,a)} = \delta.$$

Отже, нами доведено перше зі співвідношень (3).

Нехай $a \in \mathbb{C}$, а $(\zeta_n(a))$ – послідовність усіх a-точок функції f, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Тоді зі співвідношення (12) випливає, що

$$|\zeta_n(a)| \sim (n\delta)^\delta, \quad n \to \infty,$$

а тому

$$\lim_{n\to\infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n\delta)^\delta \left(\frac{e}{n\delta}\right)^\delta = e^\delta,$$

тобто виконується друге зі співвідношень (3). Теорему 2 повністю доведено.

III. Доведення теореми 3

Покажемо, що при $a = 0$ нерівність (4) виконується, наприклад, для функції $f(z) = e^z \pi(z)$, де

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{e^n}\right).$$

Справді, для функції f, як і для функції π, маємо $\zeta_n(0) = -e^{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, звідки випливає, що

$$n_f(r,0) = n_\pi(r,0) \sim \ln r, \quad r \to +\infty.$$

Скориставшись правилом Лопіталя, отримуємо

$$N_f(r,0) = N_\pi(r,0) \sim \frac{1}{2}\ln^2 r, \quad r \to +\infty.$$

Тому,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,0)}{n_f(r,0)} = +\infty. \tag{13}$$

Далі зауважимо, що

$$M_\pi(r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{e^n}\right), \quad M_f(r) = e^r M_\pi(r),$$

і, як нескладно довести (див., наприклад, [6]),

$$\ln M_\pi(r) \sim N_\pi(r,0) \sim \frac{1}{2}\ln^2 r, \quad r \to +\infty.$$

Звідси отримуємо

$$\ln M_f(r) \sim r, \quad r \to +\infty.$$

Отже, функція f має порядок 1, а тому, як зазначалось при доведенні теореми 2,

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r) \sim r, \quad r \to +\infty,$$

звідки випливає, що

$$\nu_f(r) \sim r, \quad r \to +\infty.$$

Отже,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = 1. \tag{14}$$

З (13) і (14) бачимо, що при $a = 0$ виконується нерівність (4). Першу частину теореми 3 доведено.

Перейдемо до доведення частини (ii) цієї теореми.

Нехай $\rho \in (0, +\infty)$. Як доведено в роботі [4] (див. твердження 2 цієї роботи і його доведення), існують ціла функція f і число $\alpha > 1$ такі, що виконуються співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} = 1, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{T_f(\alpha r)}{T_f(r)} > \alpha^\rho, \tag{15}$$

де $T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ — характеристика Неванлінни функції f.

Зрозуміло, що функція f має порядок ρ, а тому, як зазначалось при доведенні теореми 2,

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r) \sim r^\rho, \quad r \to +\infty,$$

звідки випливає, що

$$\nu_f(r) \sim \rho r^\rho, \quad r \to +\infty.$$

Отже,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \frac{1}{\rho}.$$

Далі зауважимо, що за відомою теоремою Валірона (див. теорему 2.1 в [1, с. 151]) для всіх $a \in \mathbb{C}$, за винятком множини значень $a \in \mathbb{C}$ нульової плоскої лебегової міри (такі значення називаються неванлінновими винятковими), виконується співвідношення

$$N_f(r,a) \sim T_f(r), \quad r \to +\infty.$$

Зафіксуємо довільне $a \in \mathbb{C}$, яке не є валіроновим винятковим значенням функції f, і доведемо, що для нього виконуватиметься співвідношення (5), тобто, що

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)} < \frac{1}{\rho}. \tag{16}$$

Скористаємось тим, що з другого зі співвідношень (15) випливає існування числа $\rho' > \rho$, для якого

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(\alpha r,a)}{N_f(r,a)} > \alpha^{\rho'}. \tag{17}$$

Якщо б співвідношення (16) не виконувалась, то справджувалась би нерівність

$$\frac{N_f(r,a)}{n_f(r,a)} \geq \frac{1}{\rho'}, \quad r \geq r_0,$$

з якої, всупереч співвідношенню (17), для всіх $r \geq r_0$ випливала б нерівність

$$\ln \frac{N_f(\alpha r,a)}{N_f(r,a)} = \int_r^{\alpha r} \frac{n_f(r,a)}{r N_f(r,a)} \leq \rho' \ln \alpha.$$

Теорему 3 повністю доведено.

Література

[1] *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[2] *Пельчарська І. В., Шеремета М. М.* Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 21–25.

[3] *Андрусяк І. В.* Нулі і коефіцієнти аналітичних функцій // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 625. – С. 43–47.

[4] *Філевич П. В., Шеремета М. М.* Про правильну зміну основних характеристик цілої функції // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 840–849.

[5] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

[6] *Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Мат. заметки. – 1999. Т. 65, № 2. – С. 206—214.

[7] *Filevych P. V., Mahola M. P.* The angular value distribution of random analytic functions // Mat. Stud. – 2012. – V. 37, № 1. – P. 34–51.

[8] *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЕПЕННОГО РАЗВИТИЯ И a-ТОЧКИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Андрусяк И. В.[a], Филевич П. В.[b]

[a] *Национальный университет “Львивська политэхника”*
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина
[b] *Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника*
ул. Шевченко, 57, 76025, г. Ивано-Франковск, Украина

Для трансцендентных целых функций установлено связь между скоростью стремления к ∞ последовательности их a-точек и скоростью стремления к 0 последовательности их тейлоровских коэффициентов.

Ключевые слова: целая функция, a-точка, считательная функция a-точек, усредненная считательная функция a-точек, максимальный член, центральный индекс, максимум модуля, характеристика Неванлинны.

2000 MSC: 30D20, 30D35

УДК: 517.53

THE COEFFICIENTS OF POWER EXPANSION AND a-POINTS OF ENTIRE FUNCTION

Andrusyak I. V.[a], Filevych P. V.[b]

[a] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine
[b] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*
57, Shevchenko Str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine

For transcendental entire functions the connection between the rate of tendency to ∞ for the sequence of their a-points and the rate of tendency to 0 for the sequence of their Taylor's coefficients are investigated.

Key words: entire function, a-point, counting function of a-points, integrated counting function of a-points, maximal term, central index, maximum modulus, Nevanlinna characteristic.

2000 MSC: 30D20, 30D35

UDK: 517.53