

1. Shannon C.E. *Symbolic analysis of relax and switching circuits* // *Trans. AIEE*. 1938. Vol.57. P.713–723.
2. Авгуль Л.Б., Петроченко А.С. Декомпозиция симметрических булевых функций и булевых функций с частичной симметрией в базисе монотонных функций // *Кибернетика и системный анализ*. 1989. № 3. С.26–40.
3. Sasao T. *Logic synthesis and optimization* // *Kluwer Academic Publishers*. 1993. P.233–252.
4. Свирицева Э. А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. Харьков, 1998. 254 с.
5. Рицар Б.Є. До формалізації симетричних логічних функцій n змінних // Матеріали міжнар. конф. “Сучасні проблеми автоматизованої обробки і виробництва радіоелектронних засобів застосування засобів зв’язку”. Львів-Славськ, 1996. Ч.2. С.28–30.
6. Рицар Б.Є. Декомпозиція булевих функцій методом q -розбиття. 1. // *Управляющие системы и машины*. 1999. № 5. С.29–42.
7. Рицар Б.Є. Про декомпозиційні клони булевих функцій // *Вісн. ДУ “Львівська політехніка”*. 1999. № 385. С.21–30.
8. Curtis H.A. *A new approach to the desing of switching circuits*. N.J.: Toronto, 1962. 635 p.

УДК 519.95

КМЕТЬ А.Б.

k -ЗНАЧНІ СУМАТОРИ. СИНТЕЗ УЗАГАЛЬНЕНОЇ СХЕМИ

© КМЕТЬ А.Б., 2000

The problem of the k -valued adder synthesis is considered. A new ways of the synthesis, based on the new S_N -algebra's technique, which allows to modify task conditions by means of the truth table transformation, are proposed. Possibility to get in this case a generalised solution, which circuit configuration is invariant to the number system radix of the adder, is shown.

ВСТУП

Суматори – головна і неодмінна складова арифметико-логічних пристроїв ЕОМ, що набули в сучасній техніці статусу незамінних засобів, без яких тяжко уявити її подальший розвиток.

Більшість типів суматорів належать до класу комбінаційних схем. Тому, коли будь-де згадуються суматори і при цьому не зроблено певних застережень, то звичайно маються на увазі саме такі суматори. Якщо порівняти суматор першої ЕОМ із суматорами сучасних, відразу можна виявити їх логікову спорідненість, що генетично пов’язана з їх походженням – прояв використання булевої алгебри. Звідси і переважний шлях розвитку – покращання технології, зменшення розмірів електронних компонентів, навіть нові фізичні принципи та явища, проте нові рішення залишаються логіковими близнюками тих, що використовувалися раніше. Чи можна синтезувати суматор, який був би простішим за ті, що ми звикли бачити у всіх поколіннях ЕОМ? Зважаючи на тривалість і ступінь розвитку обчислювальної

техніки, це питання просто не сприймається і породжує бажання залишити його без уваги. Проте в дійсності відповідь схвальна [1].

В [2] запропонована нова математична модель логіки – інтегрована струмова логіка (ІСЛ). Математичний апарат ІСЛ становить S_N -алгебра, можливості якої перевищують ті, що надані булевою алгеброю. Зокрема, в S_N -алгебрі досить просто отримати традиційні рішення, до яких призводить використання булевої алгебри, але можливі і інші, що в рамках булевої алгебри є недосяжними [1]. Однак обмежуватися лише двійковими схемами недоречно, особливо тоді, коли треба використати всі можливості для оптимізації розв’язання завдання. В багатьох випадках, стосовно суматорів, наприклад [3], використання k -значних схем не викликає сумнівів.

Розглядається задача синтезу k -значного суматора. На перший погляд задача в такому вигляді не визначена: не зафіксувавши k , не можна побудувати таблицю істинності, що є вихідною для синтезу, тобто необхідна цілком зрозуміла конкретизація, наприклад, 3-значний суматор або, на разі, 7-значний. Але, можливість розв’язку такого роду задачі не слід виключати.

Нагадаємо, що власне алгоритм підсумовування багаторозрядних чисел не залежить від використовуваної системи числення, тобто від значності. Точніше має місце залежність, де k (значність) виступає як параметр, що визначає потрібну таблицю додавання. Відповідно і блок-схема багаторозрядного суматора також не залежить від значності. З іншого боку, елементна база S_N -алгебри інваріантна до значності, наприклад, оператор $\chi_2(x)$ однаково може належати і до 3-значної логіки і до 4-значної і т.д., проте його схемотехнічна реалізація при цьому не змінюється. З цих міркувань можна припустити існування для суматора (взагалі і не тільки для суматора) реалізацій, які не залежать від значності, тобто таких, що їх схемотехнічна конфігурація не міняється із зміною k . Це легко перевірити – достатньо провести синтез суматора для кількох фіксованих значень k (скажімо, $k = 2, 3$ і, можливо, 4), а потім порівняти результати. Такий шлях дозволить знайти розв’язок у загальному вигляді, тобто описати суматор аналітичним виразом S_N -алгебри з параметром k , що і буде визначати його функціонування.

Питання синтезу двійкових суматорів засобами S_N -алгебри вже розглянуте, що дає можливість скористатися отриманими результатами і, таким чином, зменшити обсяг роботи [1]. Тому для розв’язання даної задачі достатньо провести синтез суматора при $k = 3$ та $k = 4$.

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО S_N -АЛГЕБРУ

Алгеброю в математиці прийнято називати систему $\langle \text{носій, базис} \rangle$. S_N -алгебра – це система $S_N = \langle N \cup \omega, \Omega \rangle$, у якої і носій, і базис є нескінченними множинами. Носієм S_N -алгебри є множина всіх невід’ємних цілих чисел $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ з присланим нерегулярним елементом ω , який буквально відповідає терміну “багато”, що означає велике число без індивідуального чисельного значення, тобто $N \cup \omega = N \cup \{\omega\}$. Множина $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ загальноприйнята як носій в алгебраїчних системах, що зветься k -значними логіками. Очевидно, $E_k \subset N$, що дозволяє використовувати S_N -алгебру для опису функцій

k -значної логіки: $f(\vec{x}^n): \mathbf{E}_k^n \mapsto \mathbf{E}_k$ (клас $\mathbf{P}_k$). Множину $\mathbf{E}_\omega = \{0, \omega\}$ належить ототожнювати з носієм булевої алгебри {хиба (0), істина (1)}, для якої характерна якісна оцінка логікового значення. В $\mathbf{S}_N$ -алгебрі множина $\mathbf{E}_2 = \{0, 1\}$ вводить кількісну оцінку для логікових значень {хиба (0), істина (1)}, тобто нормує їх. Очевидно, що $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_k \subset \mathbf{N}$, проте $1(\omega) \neq 1, 1 \in \mathbf{N}$. В $\mathbf{S}_N$ -алгебрі $1(\omega) \geq k$ і це єдина кількісна характеристика нерегулярного елемента ω . Завдяки цьому $\mathbf{S}_N$ -алгебра дозволяє опис, як *булевих*: $f(\vec{x}^n): \mathbf{E}_\omega^n \mapsto \mathbf{E}_\omega$ (клас $\mathbf{P}_\omega$), так і *нормованих булевих*: $f(\vec{x}^n): \mathbf{E}_2^n \mapsto \mathbf{E}_2$ (клас $\mathbf{P}_2$) функцій.

На вказаних множинах можливі і інші відображення, зокрема: $f(\vec{x}^n): \mathbf{E}_k^n \mapsto \mathbf{E}_\omega$ (клас $\mathbf{P}_\omega$) та $f(\vec{x}^n): \mathbf{E}_\omega^n \mapsto \mathbf{E}_k$ (клас $\mathbf{P}_k$). Функції з класів $\mathbf{P}_\alpha$ та $\mathbf{P}_\beta$, що отримали назву відповідно *аналогікових* та *каталогікових*, можуть описувати на логіковому рівні роботу різного роду перетворювачів, наприклад, АЦП і ЦАП.

Базис $\mathbf{S}_N$ -алгебри становлять одна бінарна операція та нескінченна множина унарних операторів, зокрема: $\Omega = \langle +, \chi_\sigma(x), \vartheta_\sigma(x) \rangle, \sigma \in \mathbf{N}$, де $+$ – арифметична операція додавання, що визначена на множині $\mathbf{N} \cup \omega$, а $\chi_\sigma(x) = \begin{cases} \sigma - x, & x \leq \sigma, \\ 0, & x \geq \sigma \end{cases}$, і $\vartheta_\sigma(x) = \begin{cases} \omega, & x < \sigma, \\ 0, & x \geq \sigma \end{cases}$ – відповідно, квазілінійні та порогові оператори, які не мають спеціальних назв, за винятком операторів інверсії. Якщо $x \mid \mathbf{E}_k$, то оператор $\chi_{k-1}(x)$ зветься оператором інверсії, який позначається $\bar{x}$. Якщо ж $x \mid \mathbf{E}_\omega$, то оператор $\vartheta_\sigma(x)$, $\sigma \neq 0$ зветься булевою інверсією і позначається $\neg x$. З метою спрощення запису логікових виразів у $\mathbf{S}_N$ -алгебрі разом з позначкою $\vartheta_\sigma(x)$ використовується також і позначка x^σ , тобто $\vartheta_\sigma(x) = x^\sigma$. При аналітичному опису булевих або аналогікових функцій формально можливий оператор x^ω . Оскільки ω не має індивідуального чисельного значення, то можна використовувати будь-який оператор x^σ , $\sigma \neq 0$ з тим самим остаточним результатом, проте прийнято застосовувати в цьому випадку оператор з мінімальним верхнім індексом, тобто x^1 . Властивості операції додавання, що визначена на $\mathbf{N}$, відомі: [4]. Щодо нерегулярного елемента ω , то достатньо знати: **B1.** $x + \omega = \omega$. Мнемоніка: “фіксоване число” + “багато” = “багато”, тобто логіка відповідає інтуїтивному сприйманню. Звідси: **B1a.** $\omega + \omega = \omega$ – додавання є ідемпотентним, щодо нерегулярного елемента ω . З властивостей унарних операторів для подальшого розуміння необхідні такі: **B2.** $\chi_0(x) = 0, \vartheta_0(x) = 0$; якщо $\sigma \neq 0$, то: **B3.** $\chi_\sigma(0) = \sigma, \vartheta_\sigma(0) = \omega$ і **B4.** $\chi_\sigma(\omega) = 0, \vartheta_\sigma(\omega) = 0$. Нехай $x \mid \mathbf{E}_k$, тоді:

$$\mathbf{B5.} \vartheta_1(x^\sigma) = \bar{x}^{k-\sigma}, \vartheta_1(\bar{x}^\sigma) = x^{k-\sigma}; \mathbf{B5a.} x^\sigma = \vartheta_1(\bar{x}^{k-\sigma}), \bar{x}^\sigma = \vartheta_1(x^{k-\sigma});$$

$$\mathbf{B6.} \vartheta_1(x^\alpha + \bar{x}^\beta) = (x + x^\alpha)^{k-\beta}, \vartheta_1(x^\alpha + \bar{x}^\beta) = (\bar{x} + \bar{x}^\beta)^{k-\alpha};$$

$$\mathbf{B6a.} x^\alpha + \bar{x}^\beta = \vartheta_1\left((x + x^\alpha)^{k-\beta}\right) x^\alpha + \bar{x}^\beta = \vartheta_1\left((\bar{x} + \bar{x}^\beta)^{k-\alpha}\right);$$

$$\mathbf{B7.} \vartheta_1 \left(\left(x + x^\alpha \right)^\beta \right) = x^\alpha + \bar{x}^{k-\beta}, \quad \vartheta_1 \left(\left(\bar{x} + \bar{x}^\alpha \right)^\beta \right) = x^{k-\beta} + \bar{x}^\alpha;$$

$$\mathbf{B7a.} \left(x + x^\alpha \right)^\beta = \vartheta_1 \left(x^\alpha + \bar{x}^{k-\beta} \right), \quad \left(\bar{x} + \bar{x}^\alpha \right)^\beta = \vartheta_1 \left(x^{k-\beta} + \bar{x}^\alpha \right);$$

$$\mathbf{B8.} \left(x + x^\alpha \right)^\beta = \left(\bar{x} + \bar{x}^{k-\beta} \right)^{k-\alpha}, \quad \left(\bar{x} + \bar{x}^\alpha \right)^\beta = \left(x + x^{k-\beta} \right)^{k-\alpha}.$$

Поки скрутно запропонувати добру назву для цих перетворень, проте подібність їх до відомих під назвою правил де Моргана безперечно. Мабуть вони описують ту саму властивість, що зветься дуальністю. Більш повний опис властивостей операцій $\mathbf{S_N}$ -алгебри можна знайти в [2].

Відомості про подання функцій обмежимо лише класами функцій $\mathbf{P_k}$, $\mathbf{P_\alpha}$ та $\mathbf{P_x}$ і традиційними розкладами, які є розкладом функції за її підфункціями (розклад Шеннона).

Теорема 1 (перша про розклад). Нехай $f(\vec{x}^n)$ – довільна функція k -значної логіки.

Тоді функцію $f(\vec{x}^n)$ можна подати у такій формі:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^m} \chi_{\alpha_{\vec{\sigma}^m}} \left(\bar{f}(\vec{x}^n | \vec{\sigma}^m) + \sum_{i=1}^m \left(x_{l_i}^{\sigma_{l_i}} + \bar{x}_{l_i}^{\bar{\sigma}_{l_i}} \right) \right), \quad (1)$$

де $\alpha_{\vec{\sigma}^m} = \max_{\vec{\sigma}^m} f(\vec{x}^n | \vec{\sigma}^m)$, тобто максимальне значення підфункції при фіксованому наборі $\vec{\sigma}^m$.

Наслідок 1.1. Якщо $m = n$, то розклад (1) буде мати такий вигляд:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^n | f(\vec{\sigma}^n) \neq 0} \chi_{f(\vec{\sigma}^n)} \left(\sum_{i=1}^n \left(x_i^{\sigma_i} + \bar{x}_i^{\bar{\sigma}_i} \right) \right). \quad (2)$$

Подання (2) називається досконалою канонічною точковою формою (**ДКТФ**) функції $f(\vec{x}^n)$.

Теорема 2 (перша про розклад). Якщо $f(\vec{x}^n)$ – довільна аналогікова функція, то функцію $f(\vec{x}^n)$ можна подати у такому вигляді:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^m} \chi_{\alpha_{\vec{\sigma}^m}} \left(\bar{f}(\vec{x}^n | \vec{\sigma}^m) + \sum_{i=1}^m \left(x_{l_i}^{\sigma_{l_i}} + \neg x_{l_i}^{\neg \sigma_{l_i}} \right) \right), \quad (3)$$

де $\alpha_{\vec{\sigma}^m} = \max_{\vec{\sigma}^m} f(\vec{x}^n | \vec{\sigma}^m)$.

Наслідок 2.1. Якщо $m = n$, то розклад (3) перетворюється в **ДКТФ**:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^n | f(\vec{\sigma}^n) \neq 0} \chi_{f(\vec{\sigma}^n)} \left(\sum_{i=1}^n \left(x_i^{\sigma_i} + \neg x_i^{\neg \sigma_i} \right) \right). \quad (4)$$

Теорема 3 (перша про розклад). Якщо $f(\vec{x}^n)$ – довільна каталогікова функція, то функцію $f(\vec{x}^n)$ можна подати у такому вигляді:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^m} \vartheta_1 \left(\neg f(\vec{x}^n | \vec{\sigma}^m) \right) + \sum_{i=1}^m \left(x_{l_i}^{\sigma_{l_i}} + \bar{x}_{l_i}^{\bar{\sigma}_{l_i}} \right). \quad (5)$$

Наслідок 3.1. Якщо $m = n$, то розклад (5) буде мати вигляд **ДКТФ**:

$$f(\vec{x}^n) = \sum_{\forall \vec{\sigma}^n \mid f(\vec{\sigma}^n \neq 0)} \vartheta_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(x_i^{\sigma_i} + \bar{x}_i^{\bar{\sigma}_i} \right) \right). \quad (6)$$

Доведення цих стверджень можна знайти в [2]. Там же слід шукати і повнішу інформацію про подання логікових функцій. Питання мінімізації логікових функцій також розглянуто в [2]. Зокрема, виконана адаптація методу Квайна до умов, визначених математичною моделлю **ІСЛ** (базис S_N -алгебри, широкий спектр класів мінімізовуваних функцій – булеві, нормовані булеві, функції k -значної логіки і т.д.). Проте розглядувана задача потребує для успішного розв’язання ще й застосування нового методу мінімізації, що отримав назву “метод субімплікант” [5].

СИНТЕЗ 3-ЗНАЧНОГО СУМАТОРА

Функціонування повного однорозрядного суматора на логіковому рівні подається двома функціями $S(\vec{x}^3)$ і $P(\vec{x}^3)$, які називають, відповідно, сумою і переносом. Розглянемо варіант суматора з ненормованим переносом, що відповідає другій з розв’язаних в [1] задач. Таблиці істиності функцій S і P для такого 3-значного суматора показані в табл.1, яка і визначає умови завдання на синтез.

Спроба синтезувати суматор за табл.1 не приводить до бажаного результату: схема суматора занадто відрізняється від двійкових, а складність ставить під сумнів доцільність її використання навіть у випадку, коли завдання цього вимагає. Тому скористаємося для синтезу рекомендаціями та прийомами, запропонованими в [1].

Введемо проміжну змінну x , яку визначимо, враховуючи, що символ ω інтерпретується як 1, таким чином:

$$x = 5 - \sum_{i=1}^3 x_i. \quad (7)$$

Перетворення (7) дозволяє замінити табл.1 двома таблицями істинності – табл.2 і 3, що також визначають той самий суматор.

Таблиця 1

x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω
x_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
S	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2
P	0	0	0	0	0	ω	0	ω	ω	0	0	ω	0	ω	ω	ω	ω	ω

Таблиця 2

x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2
x_1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
x	5	4	3	4	3	2	3	2	1	4	3	2	3	2	1	2	1

Таблица 3

x	0	1	2	3	4	5
S	2	1	0	2	1	0
P	ω	ω	ω	0	0	0

Після такого перетворення синтез полягає у мінімізації аналітичних виразів для функцій, що задані табл.2 та 3. Мінімізацію будемо проводити за методом субімпліконт [5]. Змінімізуємо спочатку подання проміжної змінної x . Її **ДКТФ**, записана за табл.2, має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
x = & \chi_5 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \chi_4 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \\
& + \chi_3 \left(x_1^2 + \bar{x}_1^0 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \chi_4 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \\
& + \chi_3 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \chi_2 \left(x_1^2 + \bar{x}_1^0 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \\
& + \chi_3 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^2 + \bar{x}_2^0 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \chi_2 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^2 + \bar{x}_2^0 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \\
& + \chi_1 \left(x_1^2 + \bar{x}_1^0 + x_2^2 + \bar{x}_2^0 + x_3^0 + \neg x_3^1 \right) + \chi_4 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \\
& + \chi_3 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \chi_2 \left(x_1^2 + \bar{x}_1^0 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \\
& + \chi_3 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \chi_2 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \\
& + \chi_1 \left(x_1^2 + \bar{x}_1^0 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \chi_2 \left(x_1^0 + \bar{x}_1^2 + x_2^2 + \bar{x}_2^0 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right) + \\
& + \chi_1 \left(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^2 + \bar{x}_2^0 + x_3^1 + \neg x_3^0 \right).
\end{aligned}$$

Множина всіх простих субімплікант визначається так само, як і за методом Квайна, але використовуються модифіковані співвідношення для склеювань, що на сегментах склеювання мінімізовуваної функції відповідають залежностям $f(x) = \alpha$ і $f(x) = \chi_{\sigma}(x)$, α , $\sigma = 1, 2, 3, 4, 5$ [5]. Наприклад, на першому кроці по x_1 за залежністю $x = 3$ склеюються

перша, друга і третя конституенти (рахунок за записом в ДКТФ) з результатом $\chi_3(x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1)$, а за залежністю $x = \chi_5(x_1)$ – з результатом $\chi_5(x_1 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1)$; перша і друга конституенти з результатом $\chi_4(x_1^0 + \bar{x}_1^1 + x_2^0 + \bar{x}_2^2 + x_3^0 + \neg x_3^1)$ склеюються за залежністю $x = 4$ і т.д. Певно нема необхідності вдаватися до таких докладних пояснень всіх склеювань. Обмежимося лише основними проміжними результатами.

Після першого кроку отримаємо таку множину субімплікант:

$$\begin{aligned} & \{ \chi_5(x_1 + \bar{x}_2^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(x_1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_3(x_1 + x_2^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(x_1 + x_2^2 + x_3^1), \\ & \chi_3(x_1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \quad \chi_3(x_1 + x_2^2 + x_3^1), \quad \chi_5(\bar{x}_1^2 + x_2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2 + \neg x_3^1), \\ & \chi_3(x_1^2 + x_2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(\bar{x}_1^2 + x_2 + x_3^1), \quad \chi_3(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2 + x_3^1), \quad \chi_2(x_1^2 + x_2 + x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_2^2 + \neg x_3^1), \\ & \chi_4(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(x_2^1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_1(x_2^2 + \neg x_3^1), \\ & \chi_2(\bar{x}_1^1 + x_2^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_2^2 + x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^2 + x_3^1), \quad \chi_1(x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \\ & \chi_1(\bar{x}_1^1 + x_2^2 + x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_1^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + \neg x_3^1), \\ & \chi_3(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_1(x_1^2 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(x_1^2 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^2 + x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \\ & \chi_1(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_3^1), \quad \chi_2(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \quad \chi_1(x_1^2 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \quad \chi_4(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2), \quad \chi_3(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^2), \\ & \chi_2(x_1^2 + \bar{x}_2^2), \quad \chi_3(\bar{x}_1^2 + x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_2(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_1(x_1^2 + x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^2 + x_2^2), \\ & \chi_1(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2^2) \}. \end{aligned}$$

Другий крок склеювань виконуємо вже на множині субімплікант. Після виконання всіх можливих склеювань і елементарних поглинань наступна множина субімплікант виглядає так:

$$\begin{aligned} & \{ \chi_5(x_1 + x_2 + \neg x_3^1), \quad \chi_4(x_1 + x_2 + x_3^1), \quad \chi_3(x_2 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(x_2 + x_3^1), \quad \chi_4(\bar{x}_1^1 + x_2 + \neg x_3^1), \\ & \chi_3(\bar{x}_1^1 + x_2 + x_3^1), \quad \chi_3(x_1 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(x_1 + x_3^1), \quad \chi_4(x_1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_3(x_1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \\ & \chi_4(x_1 + \bar{x}_2^2), \quad \chi_3(x_1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_2(x_1 + x_2^2), \quad \chi_4(\bar{x}_1^2 + x_2), \quad \chi_3(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + x_2), \quad \chi_2(x_1^2 + x_2), \\ & \chi_1(\neg x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_3(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1 + \neg x_3^1), \quad \chi_1(\bar{x}_1^1 + x_3^1), \quad \chi_1(\bar{x}_2^1 + x_3^1), \\ & \chi_2(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1 + x_3^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^2), \quad \chi_3(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^2), \quad \chi_1(x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_2(\bar{x}_1^1 + x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_1(\bar{x}_1^1 + x_2^2), \\ & \chi_2(\bar{x}_1^2), \quad \chi_3(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_1(x_2^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_2(x_1^1 + \bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1), \quad \chi_1(x_1^2 + \bar{x}_2^1) \}. \end{aligned}$$

Нарешті, на третьому кроці в отриманій множині субімплікант знову виконуємо всі можливі склеювання та елементарні поглинання. Враховуючи, що цей крок є останнім,

усуваємо подвійні заперечення (інволюція $\neg x_3^1 = x_3$). В результаті отримуємо множину субімплікант, що вважаються простими:

$$\{\chi_5(x_1 + x_2 + x_3), \chi_3(x_2 + x_3), \chi_4(\bar{x}_1^1 + x_2 + x_3), \chi_3(x_1 + x_3), \chi_1(x_3), \\ \chi_4(x_1 + \bar{x}_2^1 + x_3), \chi_2(\bar{x}_1^1 + x_3), \chi_2(\bar{x}_2^1 + x_3), \chi_3(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1 + x_3), \chi_2(x_2), \chi_3(\bar{x}_1^1 + x_2), \\ \chi_4(x_1 + x_2), \chi_1(\bar{x}_1^1), \chi_2(x_1), \chi_1(\bar{x}_2^1), \chi_2(\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1), \chi_3(x_1 + \bar{x}_2^1)\}.$$

Позначивши отримані прості субімпліканти відповідно до наведеного запису латинськими літерами в алфавітному порядку, будемо зведену таблицю істинності (табл.4).

Таблиця 4

x	5	4	3	4	3	2	3	2	1	4	3	2	3	2	1	2	1
A*	5	4	3	4	3	2	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
B	3	3	3	2	2	2	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
C	4	4	—	3	3	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
D	3	2	1	3	2	1	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
E	4	3	2	4	3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
G	2	2	—	2	2	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
H	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
I	3	3	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
J	2	2	2	1	1	1	—	—	—	2	2	2	1	1	1	—	—
K	3	3	—	2	2	—	1	1	—	3	3	—	2	2	—	1	1
L	4	3	2	3	2	1	2	1	—	4	3	2	3	2	1	2	1
M	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1
N	2	1	—	2	1	—	2	1	—	2	1	—	2	1	—	2	1
O	1	1	1	1	1	1	—	—	—	1	1	1	1	1	1	—	—
P	2	2	—	2	2	—	—	—	—	2	2	—	2	2	—	—	—
Q	3	2	1	3	2	1	—	—	—	3	2	1	3	2	1	—	—
Індекс	0	0	7	0	0	7	7	7	13	8	8	12	8	8	12	12	12

Для знаходження імплікант мінімізовуваної функції скористаємося методом контрольних списків [5]. Помітимо в табл.4 зірочкою субімпліканту **A**, яка одночасно є імплікантою. Вихідний список імплікант складемо за шостим стовпчиком зведеної таблиці істинності (індекс 0, $x = 3$). У цей список внесемо всі суми субімплікант, що дорівнюють 3 і складаються не менше ніж з двох і не більше ніж з трьох складників (значення функції в цьому стовпчику 3):

B+F, B+J, B+M, B+N, B+O, D+F, D+J, D+M, D+N, D+O, F+G, F+H, F+K, F+L, F+P, F+Q, G+J, G+M, G+N, G+O, H+J, H+M, H+N, H+O, J+K, J+L, J+P, J+Q, K+M, K+N, K+O, L+M, L+N, L+O, M+P, M+Q, N+P, N+Q, O+P, O+Q, F+J+M, F+J+N, F+J+O, J+M+N, J+N+O, M+N+O.

Уточнюємо список за другим стовпчиком табл.4 (індекс 3). Оскільки значення функції в цьому стовпчику дорівнює 5, то викреслюємо всі суми, що не дорівнюють 5 або 0:

~~$B+F=4$~~ , $B+J=5$, ~~$B+M=4$~~ , $B+N=5$, ~~$B+O=4$~~ , ~~$D+F=4$~~ , $D+J=5$, ~~$D+M=4$~~ , $D+N=5$, ~~$D+O=4$~~ , ~~$F+G=3$~~ , ~~$F+H=3$~~ , ~~$F+K=4$~~ , $F+L=5$, ~~$F+P=3$~~ , ~~$F+Q=4$~~ , ~~$G+J=4$~~ , ~~$G+M=3$~~ , ~~$G+N=4$~~ , ~~$G+O=3$~~ , ~~$H+J=4$~~ , ~~$H+M=3$~~ , ~~$H+N=4$~~ , ~~$H+O=3$~~ , $J+K=5$, ~~$J+L=6$~~ , ~~$J+P=4$~~ , $J+Q=5$, ~~$K+M=4$~~ , $K+N=5$, ~~$K+O=4$~~ , $L+M=5$, ~~$L+N=6$~~ , $L+O=5$, ~~$M+P=3$~~ , ~~$M+Q=4$~~ , ~~$N+P=4$~~ , $N+Q=5$, ~~$O+P=3$~~ , ~~$O+Q=4$~~ , ~~$F+J+M=4$~~ , $F+J+N=5$, ~~$F+J+O=4$~~ , $J+M+N=5$, $J+N+O=5$, ~~$M+N+O=4$~~ .

Тепер список виглядає так:

$B+J$, $B+N$, $D+J$, $D+N$, $F+L$, $J+K$, $J+Q$, $K+N$, $L+M$, $L+O$, $N+Q$, $F+J+N$, $J+M+N$, $J+N+O$.

Наступне уточнення проводимо, наприклад, за третім стовпчиком зведеної таблиці істинності, індекс якого також дорівнює 0. Значення функції тут дорівнює 4, тобто належить викреслити всі суми, що не дорівнює 4 або 0:

~~$B+J=5$~~ , $B+N=4$, $D+J=4$, ~~$D+N=3$~~ , $F+L=4$, ~~$J+K=5$~~ , $J+Q=4$, $K+N=4$, $L+M=4$, $L+O=4$, ~~$N+Q=3$~~ , $F+J+N=4$, $J+M+N=4$, $J+N+O=4$.

Продовжуємо уточнення списку, що містить тепер імпліканти $B+N$, $D+J$, $F+L$, $J+Q$, $K+N$, $L+M$, $L+O$, $F+J+N$, $J+M+N$, $J+N+O$. Перевірка списку за п'ятим стовпчиком (індекс 0, $x=4$) не вносить змін. Тепер перевіряємо список за четвертим стовпчиком табл.4 (індекс 7). Оскільки тут $x=3$, то належить викреслювати всі суми, що не дорівнюють 3 або 0:

$B+N=3$, $D+J=3$, $F+L=3$, $J+Q=3$, $K+N=0$, ~~$L+M=2$~~ , $L+O=3$, $F+J+N=3$, ~~$J+M+N=2$~~ , $J+N+O=3$.

Подальше уточнення списку, який вже містить імпліканти $B+N$, $D+J$, $F+L$, $J+Q$, $K+N$, $L+O$, $F+J+N$, $J+N+O$, можна провести за восьмим стовпчиком табл.4 (індекс 7, $x=3$), тобто умови перевірки ті самі:

$B+N=3$, $D+J=3$, $F+L=3$, $J+Q=0$, $K+N=3$, ~~$L+O=2$~~ , $F+J+N=3$, ~~$J+N+O=2$~~ .

Перевірка отриманого списку $B+N$, $D+J$, $F+L$, $J+Q$, $K+N$, $F+J+N$ за сьомим та дев'ятим стовпчиками зведеної таблиці істинності (індекс 7, $x=2$) не змінює списку. Далі уточнюємо список за одинадцятим стовпчиком (індекс 9). Оскільки тут $x=4$, то слід викреслити ті суми, що не дорівнюють 4 або 0:

~~$B+N=2$~~ , ~~$D+J=2$~~ , $F+L=4$, ~~$J+Q=5$~~ , ~~$K+N=5$~~ , $F+J+N=4$.

Отже, список скоротився до двох імплікант $F+L$, $F+J+N$. Продовжуємо уточнення списку за іншими стовпчиками табл.4 у порядку збільшення індексу. Можна впевнитися, що жодна імпліканта з цього списку не може бути виключена. Остаточний список отримуємо, додавши імпліканту A , що помічена зірочкою.

Оскільки маємо лише три імпліканти, то будувати таблицю покриттів немає сенсу – імпліканти $F+L$ і $F+J+N$ поглинають імпліканту A і кожна з них накриває всі конституенти мінімізовуваної функції. Ранги (кількість операторів в логіковому виразі) імплікант $F+L$ і $F+J+N$, відповідно, 2 і 3. Отже, мінімальне подання проміжної змінної буде:

$$x = F+L = \chi_1(x_3) + \chi_4(x_1 + x_2). \quad (8)$$

Оскільки імпліканта $F+J+N$ лише на один оператор складніша за $F+L$, то практичний інтерес становить і подання

$$x = F+J+N = \chi_1(x_3) + \chi_1(x_2) + \chi_1(x_1) = \sum_{i=1}^3 \chi_1(x_i). \quad (9)$$

Тепер знайдемо мінімальні форми зображення функцій з табл.3. ДКТФ функції $S(x)$ має такий вигляд:

$$S(x) = \chi_2(x^0 + \bar{x}^5) + \chi_1(x^1 + \bar{x}^4) + \chi_2(x^3 + \bar{x}^2) + \chi_1(x^4 + \bar{x}^1).$$

Виконавши всі можливі склеювання та елементарні поглинання, отримаємо таку множину субімплікант:

$$\begin{aligned} & \{ \chi_2(\bar{x}^2 + (x+x^1)^3), \chi_2(\bar{x}^2 + (\bar{x} + \bar{x}^3)^5), \chi_1(\bar{x}^2 + (x+x^1)^3), \chi_4(x+x^3), \\ & \chi_1(\bar{x}^2 + (\bar{x} + \bar{x}^3)^5), \chi_1(\bar{x}^1 + (x+x^2)^3), \chi_1(\bar{x}^1 + (\bar{x} + \bar{x}^3)^4), \chi_5(x+x^3), \\ & \chi_2(x), \chi_1(x) \}. \end{aligned}$$

Позначимо їх згідно із записом латинськими літерами в алфавітному порядку і будемо зведену таблицю істинності (табл.5).

У табл.5 помічаємо зірочкою ті субімпліканти, які одночасно є імплікантами функції $S(x)$. В рядку індексів вказуємо кількість прочерків в кожному стовпчику без врахування виділених рядків, що помічені зірочкою.

Таблиця 5				
$S(x)$	2	1	2	1
A^*	2	–	2	–
B^*	2	–	2	–
C	1	–	1	–
D	1	–	1	–
E	1	1	1	1
F	1	1	1	1
G^*	2	1	–	–
H	1	–	–	–
I	–	–	1	–
J^*	–	–	2	–
Індекс	1	4	1	4

Знаходимо за допомогою контрольних списків імпліканти функції $S(x)$ у вигляді суми двох (2 – максимальне значення $S(x)$) субімплікант. Вихідний список складаємо за другим (індекс 1) стовпчиком табл.5:

$$C+D, C+E, C+F, C+H, D+E, D+F, D+H, E+F, E+H, F+H.$$

Уточнюємо список за четвертим (індекс 1) стовпчиком табл.5. Оскільки тут $S(x) = 2$, то викреслюємо всі суми, що не дорівнюють 2 або 0:

$$C+D = 2, C+E = 2, C+F = 2, \cancel{C+H=1}, D+E = 2, D+F = 2, \cancel{D+H=1}, E+F = 2, \cancel{E+H=1}, \cancel{F+H=1}.$$

Тепер перевіряємо список за третім (індекс 4) стовпчиком табл.5. При цьому ті суми, що не дорівнюють 1 або 0, мають бути викреслені:

$$C+D = 0, C+E = 1, C+F = 1, D+E = 1, D+F = 1, \cancel{E+F=2}.$$

Перевірка за останнім стовпчиком табл.5 не змінює список. Отже, додавши імпліканти, що помічені зірочкою, остаточно маємо:

$$A, B, C+D, C+E, C+F, D+E, D+F, G, J.$$

Для знайдених імплікант будуємо таблицю покриттів (табл.6).

Таблиця 6

0	1	3	4	Ранг
A	-	A	-	5
B	-	B	-	5
C+D	-	C+D	-	8
C+E	C+E	C+E	C+E	9
C+F	C+F	C+F	C+F	9
D+E	D+E	D+E	D+E	9
D+F	D+F	D+F	D+F	9
G	G	-	-	1
-	-	J	J	2

Оскільки отримана таблиця покриттів проста, то результат можна вказати відразу. Очевидно, маємо п'ять не-надлишкових форм подання мінімізовуваної функції. Чотири з них **C+E**, **C+F**, **D+E** та **D+F** мають однакову складність (ранг 9); п'ята форма – **G+J** значно простіша (ранг 3). Тому приймаємо:

$$S(x) = G + J = \chi_2(x) + \chi_5(x + x^3).$$

Для функції $P(x)$ згідно з табл.3 можна записати

$$P(x) = \vartheta_1(x^0 + \bar{x}^5) + \vartheta_1(x^1 + \bar{x}^4) + \vartheta_1(x^2 + \bar{x}^3).$$

Всі три конституенти склеюються з результатом $\vartheta_1(x^0 + \bar{x}^3)$, тобто $P(x) = \vartheta_1(\bar{x}^3)$. Далі, в силу **B5**, маємо $\vartheta_1(\bar{x}^3) = x^3$. Отже:

$$P(x) = x^3.$$

Отже, зменшивши на 0,5 в отриманих логікових виразах для x , $S(x)$ та $P(x)$ верхні індекси, результати синтезу можна подати у вигляді двох схем:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^2 \chi_1(x_i) + \chi_1(x_3), & S(x) &= \chi_2(x) + \chi_5(x + x^{2,5}), \\ P(x) &= x^{2,5} \end{aligned} \quad (10)$$

і

$$\begin{aligned} x &= \chi_4(x_1 + x_2) + \chi_1(x_3), & S(x) &= \chi_2(x) + \chi_5(x + x^{2,5}), \\ P(x) &= x^{2,5}. \end{aligned} \quad (11)$$

УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Скористаємося результатами [1]. В цій роботі показано, що двійковий суматор того ж типу, як і розглянутий вище 3-значний, можна реалізувати за схемами:

$$x = \sum_{i=1}^3 \chi_1(x_i), \quad S(x) = \chi_1(x) + \chi_3(x + x^{1,5}), \quad P(x) = x^{1,5} \quad (12)$$

і

$$\begin{aligned} x &= \chi_2(x_1 + x_2) + \chi_1(x_3), & S(x) &= \chi_1(x) + \chi_3(x + x^{1,5}), \\ P(x) &= x^{1,5} \end{aligned} \quad (13)$$

Порівнюючи результати синтезу 3-значного суматора з схемами (12) і (13), можна впевнитися, що їх схемотехнічні конфігурації збігаються, тобто припущення про можливість отримання схемотехнічних розв'язків, інваріантних до значності, підтверджується.

Досить легко помітити, що ці результати можна об'єднати, якщо ввести параметр k , що показує значність (основу системи числення, в якій працює суматор):

$$x = \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(x_i) + \chi_1(x_3), \quad S(x) = \chi_{k-1}(x) + \chi_{2k-1}(x + x^{k-0,5}),$$

$$P(x) = x^{k-0,5} \quad (14)$$

і

$$x = \chi_{2(k-1)}(x_1 + x_2) + \chi_1(x_3), \quad S(x) = \chi_{k-1}(x) + \chi_{2k-1}(x + x^{k-0,5}),$$

$$P(x) = x^{k-0,5}. \quad (15)$$

Графічне зображення схем (14) і (15) показано на рис.1 і 2 відповідно.

Впевнитися в тому, що (14) і (15) дійсно подають узагальнені схемотехнічні роз'язки, можна, наприклад, якщо знову синтезувати суматор, але при іншому значенні k . Така перевірка була проведена для $k = 4$. Отримані результати відповідають узагальненим схемам (14) і (15).

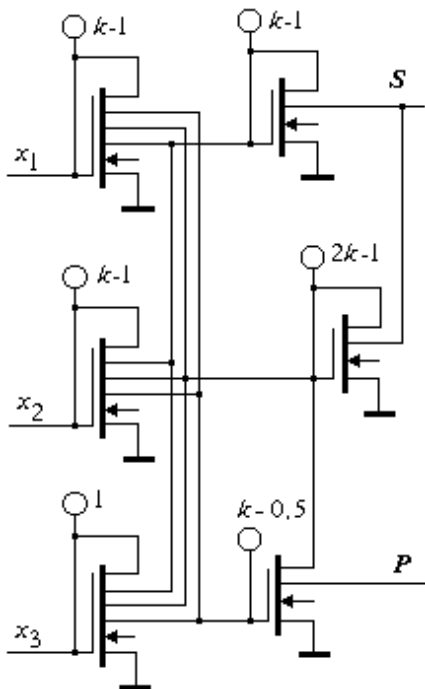


Рис.1. Графічне зображення схеми (14).

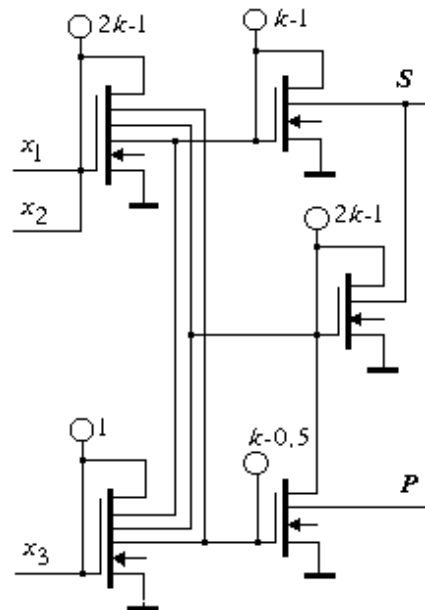


Рис.2. Графічне зображення схеми (15).

Реалізація схемотехнічних рішень такого роду безпосередньо пов'язана з рівнем розвитку мікроелектронних технологій. Майже всі сучасні технології у сфері мікроелектроніки розроблялися виключно для двійкової цифрової техніки. Роботи ж для створення мікроелектронних технологій, що мають за мету виробництво k -значних цифрових схем, взагалі ніколи не виконувались. Більше того, поки що все ще нема надії віднести їх хоч би до розряду тих, що плануються. Проте існуючі технології здатні забезпечити можливість виготовлення k -значних інтегрованих схем за умови невеликої значності, що є вже практично перевіреним фактом – існують зразки і дослідні партії 4(5)-значних мікросхем [3, 6]. Тому рівень розвитку сучасних мікроелектронних технологій можна оцінити в межах

$2 \leq k \leq 8$, вважаючи $k = 4(5)$ доступним типовим значенням. З цієї точки зору і дамо оцінку отриманим схемотехнічним рішенням.

Відразу видно, що починаючи з $k = 5$ і вище, тобто вже для 5-значного суматора, схеми (14) і (15) знаходяться за межами вказаного діапазону реалізації. Не вдаючись до детальних пояснень (слід пам'ятати лише про технологічну обумовленість причин, що через розвиток технологій мають тимчасовий характер і в майбутньому можуть бути усунені), до цього можна додати при $k \leq 4$: реалізація двійкового і 3-значного суматорів за схемами (14) і (15) вже тепер здійснима; реалізація ж 4-значного суматора спряжена з певними технологічними труднощами; з точки зору реалізації схема (14) краща за схему (15), хоч остання і має меншу складність.

Підсумовуючи, можна дати таку рекомендацію: для отримання схемотехнічних рішень, що найкраще відповідають існуючим зараз мікроелектронним технологіям, необхідно ввести обмеження зверху ($\sigma \leq k$) для використовуваних в цих рішеннях операторів $\chi_\sigma(x)$ і $\vartheta_\sigma(x)$. Виконати цю рекомендацію доволі просто.

Для цього навіть нема потреби переглядати процедуру синтезу – досить належним чином скоригувати її результати, що, правда, пов'язано з певним (мінімальним) ускладненням схемотехнічних рішень.

Повернемося до схем (14) і (15), про які вже відомо, що перша з них краща з точки зору реалізації. Простим їх порівнянням можна помітити, що з аналітичних виразів (14) і (15) для проміжної змінної x витікає $\chi_{2(k-1)}(x_1 + x_2) = \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(x_i)$. Тепер доволі просто сформулювати таке твердження.

Теорема 4. Нехай φ – довільна функція, каталогікова або булева. Якщо $\chi_{\sigma_i}(x_i)$ – оператори інверсії багатозначних змінних x_i , то

$$\chi_{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \left(\varphi + \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \chi_{\sigma_i}(\varphi + x_i). \quad (16)$$

Доведення. Оскільки φ – каталогікова або булева функція, то її значення належать до множини $\mathbf{E}_\omega$, тобто можливо або $\varphi = \omega$, або $\varphi = 0$. Припустимо $\varphi = \omega$, тоді (16) на підставі **B1** і **B4** набуває вигляду: $0 = 0 + 0 + \dots + 0$, що підтверджує наявність тотожності в цьому випадку. Припустимо тепер, що $\varphi = 0$, тоді (16) набуває вигляду $\chi_{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \chi_{\sigma_i}(x_i)$.

Оскільки $\chi_{\sigma_i}(x_i)$ – оператори інверсії, то за їх означенням маємо $\sigma_i = \mathbf{max} \ x_i$ і завжди виконуються нерівності $\sigma_i \geq x_i$ і $\sum_{i=1}^n \sigma_i \geq \sum_{i=1}^n x_i$. З цих нерівностей на підставі означення

оператора $\chi_\sigma(x)$ витікає, що $\chi_{\sigma_i}(x_i) = \sigma_i - x_i$, а $\chi_{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i - \sum_{i=1}^n x_i$. Тепер

легко обчислити значення лівої та правої частин, перевіряємої тотожності. Очевидно, ліва частина дорівнює $\sum_{i=1}^n \sigma_i - \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i - x_i$. Права ж частина даного виразу також дорівнює $\sum_{i=1}^n \sigma_i - x_i$. Отже, тотожність спостерігається і в цьому випадку, тобто при $\varphi = 0$.

Доведення закінчене.

Наслідок 4.1 (про лінійність операторів інверсії). Якщо $\varphi = 0$, то (16) набирає такого вигляду:

$$\chi_{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \chi_{\sigma_i}(x_i). \quad (17)$$

Тепер на підставі (17) можна записати $\chi_{2(k-1)}(x_1 + x_2) = \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(x_i)$. Зробивши

таке перетворення в схемі (15), отримаємо, очевидно, (14). Далі, на підставі (16), маємо

$$\begin{aligned} \chi_{2k-1}(x + x^{k-0,5}) &= \\ &= \chi_{2k-1}(\chi_{k-1}(x_1) + \chi_{k-1}(x_2) + \chi_1(x_3) + x^{k-0,5}) = \\ &= \chi_{k-1}(\chi_{k-1}(x_1) + x^{k-0,5}) + \\ &+ \chi_{k-1}(\chi_{k-1}(x_2) + x^{k-0,5}) + \chi_1(\chi_1(x_3) + x^{k-0,5}). \end{aligned}$$

Після такого перетворення схема k -значного суматора буде виглядати так:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(x_i) + \chi_1(x_3), \quad S(x) = \chi_{k-1}(x) + \\ &+ \chi_{k-1}(\chi_{k-1}(x_1) + x^{k-0,5}) + \\ &+ \chi_{k-1}(\chi_{k-1}(x_2) + x^{k-0,5}) + \chi_1(\chi_1(x_3) + x^{k-0,5}), \\ P(x) &= x^{k-0,5}. \end{aligned} \quad (18)$$

Графічне зображення схеми (18) показано на рис.3.

Звичайно ж, схема (18) складніша за схеми (14) і (15), але не набагато – всього лише на 2(3) додаткові елементи $\chi_{\sigma}(x)$, зате межі її реалізованості (у випадку необхідності зміни k) суттєво розширені.

На закінчення розглянемо приклад, який також стосується синтезу суматорів за допомогою апарату S_N -алгебри і може бути корисним, щоб скласти уявлення про новизну

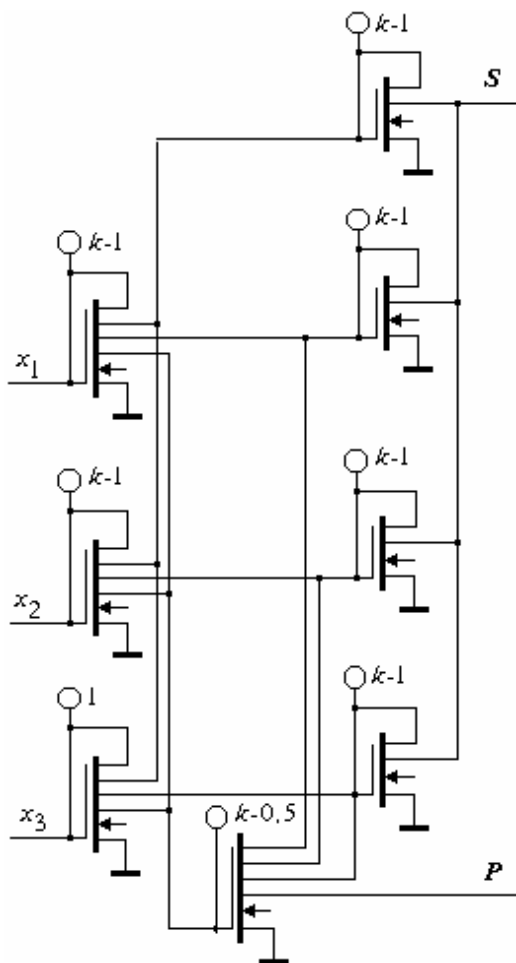


Рис.3. Графічне зображення схеми (18).

схемотехнічних рішень, що можуть бути отримані в результаті. З цією метою вибрана функція $S(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \bmod k$ та її відома реалізація, тобто суматор за модулем k .

Синтез цього пристрою за описаним методом не становить труднощів. Результат виглядає так:

$$x = \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(x_i), \quad S(x) = \chi_{k-2}(x) + \sum_{i=1}^2 \chi_{k-1}(\chi_{k-1}(x_i) + x^{k-1,5}). \quad (19)$$

Це вже зіставимий результат, бо таке схемотехнічне рішення (схема 19) відоме з 1981 р. Тоді воно було отримане евристичним шляхом і без застережень визнане винаходом. Тепер після створення S_N -алгебри, такі схеми, очевидно, можуть бути синтезовані.

1. Кметь А.Б. Двійкові суматори. Нові прийоми синтезу // Інформаційні технології і системи. 2000. 2. Кметь А.Б. Интегральная токовая логика. Львов, 1998. 186 с. 3. Kawahito S., Kameyama M., Higuchi T. and Yamada H. A 32×32-bit multiplier using multiple-valued MOS current-mode circuits // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 1988. Vol.23. № 1. P.124–132. 4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., 1979. 559 с. 5. Кметь А.Б. К минимизации логических функций. Метод субимпликант // Кибернетика и системный анализ. 2000. № 3. С.84–99. 6. Медведев В.И., Кметь А.Б., Стадник Г.М., Сухопаров А.И. БИС матричного умножителя на элементах пороговой и многозначной логики // Микроэлектроника. 1991. Т.20. Вып.4. С.50.

УДК 621.372.542

ВЕРХОЛА М.І., ЛУЦКІВ М.М.

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕКУРСИВНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ФІЛЬТРІВ

© Верхола М.І., Луцків М.М., 2000

The problem of synthesis of new structures of recourse chain filters is solved. The major attempts to the making of characteristics of frequency of chain filters are earned out.

The amplitude characteristics of recourse filters are the periodic function of filter. The period of it depends on the leg behind in the elements of filters and the ratio of this leg behind not on the frequency of discretion as it is observed in digital filters.

ВСТУП

В системах керування та обробки сигналів широко застосовуються аналогові та цифрові фільтри. Відомі методи аналізу та проектування фільтрів дозволяють розрахувати фільтри з потрібними характеристиками та властивостями [2].

Фільтрація здійснюється методом затримки вхідних сигналів, множення затриманих сигналів на коефіцієнти, їх підсумовування (накопичення) та рекурсії, яка полягає в тому, що вихідний сигнал фільтра також затримується, множиться і підсумовується із затриманими вхідними сигналами.