УДК 546.682.86:548+621.382.61

Большакова І.А., Бондарєв А.П., Тихонюк Р.Б.
ДУ “Львівська політехніка”, лабораторія Магнітних Сенсорів

ОБ'ЄМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У ХОЛЛІВСЬКИХ ПЛАСТИНАХ В СИЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

Наведений тривимірний комп'ютерний симулятор електромагнітних процесів, які відбуваються у холлівській пластині під дією магнітного поля. Симулятор дозволяє отримати повний тривимірний опис електромагнітних величин у прямокутній пластині. Результати можна використати для дослідження і проектування холлівських давачів з покращеними властивостями. Це дає також можливість досліджувати давачі Холла при впливі неоднорідних високоградієнтних магнітних полів.

Three-dimensional computer simulator of electromagnetic processes in a Hall plate under the magnetic field influence is presented. The simulator allows obtaining full spatial description of electromagnetic quantities in a bar plate. The results may be used for studying and designing the Hall sensors with improved parameters. It also allows studying the Hall sensors under the inhomogeneous high-gradient magnetic fields.

Вступ

Магнітні поля, які застосовують у сучасній енергетиці, пристроях біомедичного призначення, матеріалознавстві, характеризуються значним діапазоном індукції ($10^{-6}\div50$ Т) та в деяких задачах мають значні градієнти. Одним із найбільш широко вживаних інструментів для перетворення магнітного поля є перетворювач Холла на основі напівпровідникових пластин та структур. Тому дослідження процесів, які відбуваються у напівпровідникових пластинах під дією магнітних полів, є дуже важливим і актуальним завданням. У випадку сильно неоднорідних магнітних полів залежність вихідного сигналу холлівського давача від індукції магнітного поля стає нелінійною [1]. Її визначення при цьому потребує врахування об'ємного розподілу як індукції магнітного поля, так і початкового значення потенціалу в кожній точці напівпровідникової пластини [2]. Тому об'ємне моделювання процесів у холлівських пластинах в сильно неоднорідних магнітних полях є важливим завданням розробки високопрецизійних перетворювачів магнітного поля. Таке моделювання повинне передбачати аналіз розташування керуючих та струмових контактів і неоднорідності матеріалу [3].

Формулювання задачі

Об'єктом моделювання є електромагнітні процеси у напівпровідниковій пластині, яка має форму прямокутного паралелепіпеда (наприклад, виготовленої за допомогою тонкоплівкової технології). До пластини прикладено постійну керуючу напругу V_c, причому вважаємо, що керуючі контакти виготовлені із ідеально провідного матеріалу і повністю покривають дві протилежні бічні грані. Крім цього, пластина знаходиться в магнітному полі. Вважаємо, що густина магнітного потоку B не залежить від часу, але довільно змінює напрямок і значення в межах об'єму пластини. Таке припущення дає змогу аналізувати задекларований випадок висукоградієнтних магнітних полів.

У пластині, яка знаходиться під впливом описаних умов [1], виникає ефект Холла. Для моделювання цього ефекту достатньо описати матеріал пластини трьома параметрами: питома провідність σ, холлівська рухливість μ та залежна від них холлівська стала R_H. Вважаємо, що твердотільна пластина є ізотропною і однорідною та виконана з матеріалу з одним типом основних носіїв (n або p), тобто параметри матеріалу є незмінними по всьому об'єму.

Основним результатом аналізу ефекту Холла є значення напруги на холлівських контактах, але для визначення цього значення напруги при можливій зміні розташування контактів необхідна інформація про розподіл потенціалу по всій пластині V(x,y,z). Крім того, значення густини струму та об'ємного заряду в різних частинах пластини відрізняються одне від одного, а в окремих частинах (особливо поблизу контактів) можуть значно перевищувати середні по об'єму пластини значення. Тому, для вирішення проблеми практичної придатності пластини з міцності (відсутність електричних пробоїв та локальних перегрівань), необхідно знати просторовий розподіл густини струму J(x,y,z) та об'ємного заряду $\rho(x,y,z)$. Вхідними даними для аналізу є скалярні параметри пластини (l,b,t – відповідно довжина, ширина і висота, σ – питома провідність, μ – холлівська рухливість), скалярна напруга U_c, просторово змінний вектор густини потоку магнітного поля B. Вихідними результатами аналізу є просторові розподіли двох скалярів (потенціалу V та заряду ρ) і одного вектора (густини струму J).

Неперервна математична модель процесу

Електромагнітні процеси в холлівській пластині описують рівняння Максвелла та закон Ома із врахуванням сили Лоренца. Прийнявши припущення про стаціонарність просторового розподілу заряду та магнітного поля, характерне для низькочастотного режиму, отримаємо систему рівнянь, яка описує електродинамічні процеси в холлівській пластині

$$\begin{cases} \overline{\nabla}^2 V = -\rho/\varepsilon\,; & (1)\\ J = -A\overline{\nabla}\,V\,; & (2)\\ \rho/\varepsilon = R_H\,\overline{\nabla}(J\times B). & (3) \end{cases}$$

Тут позначено $A = \sigma\begin{bmatrix} 1 & \mp\mu B_z & \pm\mu B_y \\ \pm\mu B_z & 1 & \mp\mu B_x \\ \mp\mu B_y & \pm\mu B_x & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

Аналогічні математичні моделі (з точністю до позначень) наведені в [1, 4]. Умовами справедливості моделі є стаціонарність розподілів ρ і B: $d\rho/dt=0$, $dB/dt=0$, а також відсутність

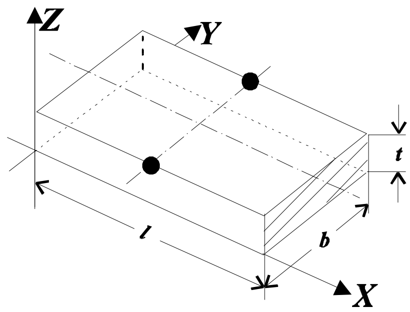

Рис.1. Вигляд холлівської пластини.

іонізації матеріалу пластини і зміни концентрації носіїв під впливом великих струмів чи зовнішніх полів. У прикладах, до яких застосовували модель в цій роботі, такі умови виконуються.

Очевидно, що система рівнянь може мати однозначний розв'язок тільки при встановленні відповідних початкових умов. Визначимо ці початкові умови з фізичних міркувань, розташувавши координатну сітку так, як показано на рис.1.

Оскільки керуючі контакти, згідно з припущенням, повністю перекривають бічні грані в площинах {x=0, x=l}, то граничні умови для потенціалу мають вигляд

$$V(0, y, z) = V_c; \quad V(l, y, z) = 0 . \tag{4}$$

Крайові умови для складових густини струму J на гранях пластини можна записати

$$J_y(x, 0, z) = J_y(x, b, z) = 0;$$
$$J_z(x, y, 0) = J_z(x, y, t) = 0 . \tag{5}$$

Крім того, оскільки керуючі контакти вважаємо ідеально провідними, то вони є еквіпотенціальними поверхнями і складові струму вздовж них відсутні

$$J_y(0, y, z) = J_z(0, y, z) = J_y(l, y, z) = J_z(l, y, z) = 0 . \tag{6}$$

Об'ємне моделювання процесів у холлівській пластині дозволяє врахувати довільну форму і розташування керуючих контактів модифікацією крайових умов (4)–(6).

Оскільки математична модель дає змогу розрахувати просторовий розподіл густини струму J, то для перевірки правильності розв'язку використовують умови неперервності струму, які для описаної форми контактів мають вигляд

$$\int_0^t \int_0^b J_x \, dy \, dz = \text{const} ;$$
$$\int_0^t \int_0^b J_y \, dx \, dz = \int_0^t \int_0^b J_z \, dx \, dy = 0 . \tag{7}$$

Аналітичний розв'язок математичної моделі холлівської пластини отримано методом конформних перетворень тільки для двовимірного випадку за умови однорідного магнітного поля [5]. Розв'язок системи рівнянь (1)–(3) з граничними умовами (4)–(6) у високоградієнтних магнітних полях можливий лише за допомогою ітераційних наближень.

Дискретна математична модель

Оскільки знаходження аналітичного розв'язку описаної крайової задачі пов'язане із значними труднощами, то шукатимемо цей розв'язок числовими методами.

Об'єм холлівської пластини покриємо прямокутною сіткою площин

$$x = (i-1)h_x, \; i = \overline{1, n1}, \; n1 = [l/h_x] + 1 ;$$
$$y = (j-1)h_y, \; j = \overline{1, n2}, \; n2 = [b/h_y] + 1; \tag{8}$$
$$z = (k-1)h_z, \; k = \overline{1, n3}, \; n3 = [t/h_z] + 1,$$

де h_x, h_y, h_z – кроки дискретизації змінних відповідно x, y, z, [•] – ціла частина числа.

Замінимо в (1) другі просторові похідні другим центральним різницевим відношенням, просторові похідні в (2) для i=0 – першим різницевим відношенням вперед, для i=n1 – першим різницевим відношенням назад, а для $i=\overline{2,n1-1}$ – першим центральним різницевим відношенням. Розв'язавши отримане різницеве рівняння відносно V(i,j,k), отримаємо для внутрішніх точок пластини

$$V_{i,j,k}=\frac{1}{2}\frac{\left(h_x h_y h_z\right)^2}{\left(h_x h_y\right)^2+\left(h_x h_z\right)^2+\left(h_y h_z\right)^2}\cdot \\ \cdot\left[\frac{V_{i+1,j,k}+V_{i-1,j,k}}{h_x^2}+\frac{V_{i,j+1,k}+V_{i,j-1,k}}{h_y^2}+\frac{V_{i,j,k+1}+V_{i,j,k-1}}{h_z^2}+\frac{\rho}{\varepsilon}\right] \tag{9}$$

Для точок на гранях пластини різницеву схему (9) використовуємо із врахуванням граничних умов (5). Наприклад, для нижньої поверхні умову $J_z=0$ забезпечує різницева схема

$$V_{i,j,1}=\frac{1}{2}\frac{\left(h_x h_y h_z\right)^2}{\left(h_x h_y\right)^2+\left(h_x h_z\right)^2+\left(h_y h_z\right)^2}\cdot \\ \cdot\left[\begin{array}{l} V_{i+1,j,1}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{a_{31}}{h_x h_y a_{33}}\right)+V_{i-1,j,1}\left(\frac{1}{h_x^2}-\frac{a_{31}}{h_x h_y a_{33}}\right)+V_{i,j+1,1}\left(\frac{1}{h_y^2}+\frac{a_{32}}{h_y h_z a_{33}}\right)+ \\ +V_{i,j-1,1}\left(\frac{1}{h_y^2}-\frac{a_{32}}{h_y h_z a_{33}}\right)+2\frac{V_{i,j,2}}{h_z^2}+\frac{\rho}{\varepsilon} \end{array}\right], \tag{10}$$

де a_{nm} – компоненти матриці A, яка входить в рівняння (2).

Ще три вирази, аналогічних до (10), отримані для верхньої, передньої та задньої поверхонь. Спеціального вигляду набуває (9) на ребрах пластини, для яких отримано ще чотири вирази. Наприклад, при рівномірному вертикально спрямованому магнітному полі крайові умови (5) на ребрах набувають вигляду

$$\begin{array}{l} V_{i,j,k+1}-V_{i,j,k-1}=0, \\ h_x\left(V_{i,j+1,k}-V_{i,j-1,k}\right)+\mu B_z\left(V_{i+1,j,k}-V_{i-1,j,k}\right)=0, \end{array} \tag{11}$$

що і спричиняє відповідні зміни виразу (9).

Отже, використання числового різницевого методу дозволило перейти від векторних диференціальних рівнянь (1)–(3) до лінійних алгебраїчних вигляду (9). Але цей підхід не позбавляє необхідності виконання ітераційних наближень.

Програмна реалізація моделі

Обчислення ітераційних наближень до розв'язку моделі (1)–(3) здійснюється в такій послідовності:

1. Ввід вхідних даних, розрахунок компонентів матриць.
2. Встановлення початкового наближення розподілів заряду і потенціалу.
3. Розрахунок наступного наближення розподілу потенціалу (9,10).
4. Розрахунок розподілу густини струму (2).
5. Розрахунок розподілу заряду (3).

6. Прогнозування наступного розподілу заряду (12).
7. Перевірка відхилення розподілів заряду і потенціалу.
8. Продовження розрахунків з п.3, поки відхилення досягне заданої точності.
9. Виведення вихідних даних.

Аналогічна схема розрахунків використана в роботі [4]. Програма містить, як мінімум, чотири вкладених цикли – три по просторових координатах і один цикл ітераційних наближень. За таких умов важливим стає скорочення часу обчислень. Для цього в програмі, по-перше, встановлюється початкове наближення потенціалу у вигляді лінійної функції від x. Це дає можливість скоротити кількість ітерацій приблизно на n1 разів. По-друге, використані деякі методи прискорюючого прогнозування розподілів на наступній ітерації. Наприклад, лінійне прогнозування здійснюється за формулою

$$\rho_{n+1} = \rho_n + k(\rho_n - \rho_{n-1}), \qquad (12)$$

де n – номер ітерації, k – прискорюючий коефіцієнт, ρ_{n-1}, ρ_n, ρ_{n+1} – відповідно розподіли об'ємного заряду на попередній ітерації, розрахований за рівнянням (3), та спрогнозований на наступну ітерацію.

Після закінчення ітераційного процесу, що визначається п.8, результат є розподілом трьох пов'язаних полів (потенціалу, об'ємного заряду і густини струму). Ці поля повністю враховують всі граничні умови і вичерпно описують електродинамічні процеси в холлівській пластині.

Алгоритм реалізований в середовищі Borland Paskal 70, а представлення результатів – в оболонці Microsoft Excel 97. Числові результати застосування програмної реалізації математичної моделі наведені в наступному розділі.

Результати та обговорення

Створений програмний симулятор був застосований для аналізу холлівських пластин з такими параметрами: l = 1000 мкм; b = 500 мкм; t = 10 мкм; μ = 1 $м^2/(В\cdot с)$; n = 10^{16} $см^{-3}$; ε = 12. Параметри сітки дискретизації: n1 = 41; n2 = 21; n3 = 3. Параметри зовнішніх впливів (якщо не оговорено інше): V_c = 10 В; $B_x = B_y$ = 0 Т; B_z = 0.5 Т.

1. Демонстрація коректності роботи симулятора. Для перевірки коректності роботи симулятора наведені параметри пластини і поля обрані ідентичними до параметрів, використаних в роботах [4, 5]. При розташуванні холлівських контактів згідно з рис.1 отримане значення напруги на цих контактах становить 2,23 В. Аналітичний розрахунок [5] дає результат 2,30 В; симуляція з роботи [4] – 2,34 В. Отже, незбіг знаходиться в межах 3 %, що свідчить про коректність роботи програмного симулятора.

2. Вплив високоградієнтних магнітних полів. Процеси в пластині розглядаються при дії поля, розподіл вертикальної складової якого показано на рис.2. На ділянках пластини, які безпосередньо межують з холлівськими контактами поле відсутнє, а в середині пластини досягає 0.5 Т. Оскільки просторова зміна потенціалу, зумовлена силою Лоренца, значно менша, ніж зміна потенціалу, зумовлена керуючою напругою, то, з метою підвищення наочності, авторами роботи [4] практикується представлення результатів у вигляді різницевого потенціалу (різниця між фактичним і базовим, який спостерігається за умов відсутності магнітного поля). Таке представлення дозволяє безпосередньо на графіку спостерігати напругу при розташуванні холлівських контактів на прямій, паралельній осі OY, або визначати цю напругу елементарними перерахунками при довільному розташуванні контактів.

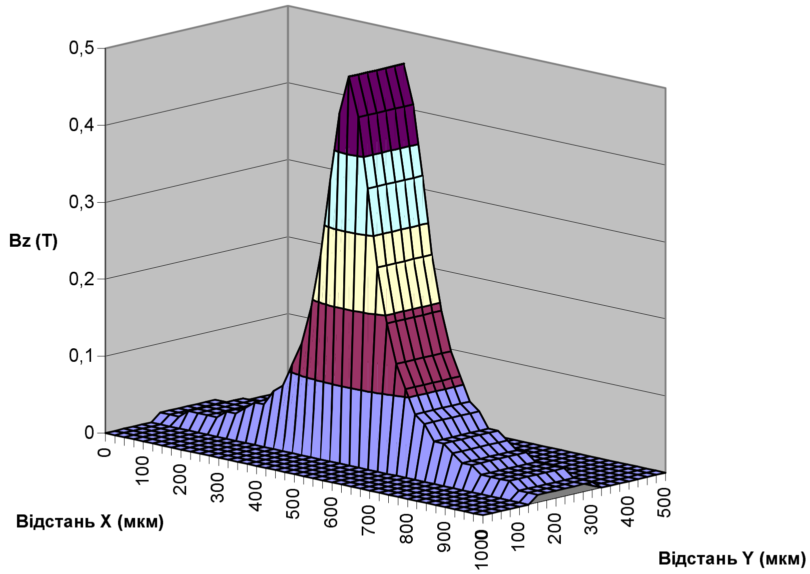

Рис.2. Вертикальна складова індукції магнітного поля.

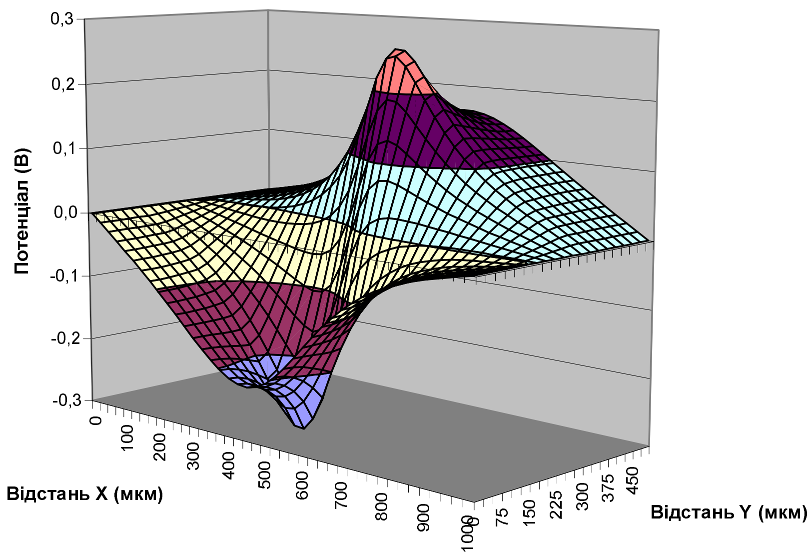

Рис.3. Різницевий розподіл потенціалу на верхній поверхні холлівської пластини

З рис.3 видно, що в разі високоградієнтних магнітних полів холлівська напруга не може вичерпно описати процеси в пластині, оскільки значення потенціалів на внутрішніх ділянках пластини можуть значно перевищувати значення потенціалів на контактах. Отриманий результат демонструє також, що навіть на ділянках пластини, де відсутнє магнітне поле, спостерігається перерозподіл потенціалу і виникнення відповідних складових густини струму.

Розглянутий приклад свідчить, що розроблений симулятор дає змогу вичерпно аналізувати процеси в холлівській пластині (зокрема визначати напругу U_x) при дії довільного магнітного поля із заданим користувачем розподілом.

3. Зміна параметрів матеріалу і магнітного поля. Заходи з підвищення швидкодії симулятора дозволили застосувати його багаторазово при переборі вхідних параметрів. Завдяки цьому отримані залежності холлівської напруги від параметрів матеріалу і магнітного поля. Вважаємо, що холлівські контакти є точковими і розташовані в точках з координатами (l/2, 0, t) та (l/2, b, t). Вказані залежності зображені на рис.4.

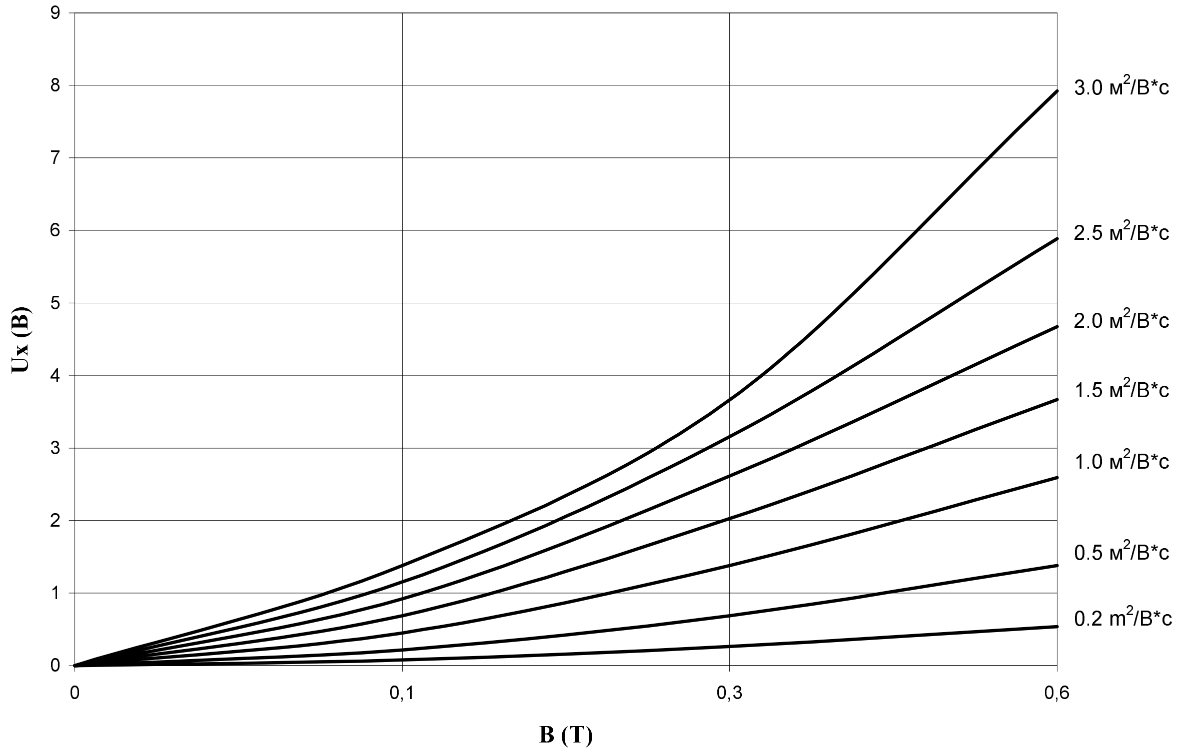

Рис.4. Залежність холлівської напруги від магнітної індукції для різних значень рухливості носіїв заряду.

При розрахунку цих залежностей було перебрано близько 50 комбінацій параметрів, що зайняло майже 80 хв машинного часу ПК з тактовою частотою 433 МГц.

Висновки

Програмний симулятор електродинамічних явищ у холлівській пластині, описаний в цій статті, дає змогу отримати повний тривимірний опис електромагнітних величин (розподілу потенціалу, розподілу об'ємного заряду та густини струмів) в прямокутній пластині. Використані значення параметрів відповідають GaAs і результати можна використовувати для дослідження і проектування відповідних холлівських давачів. Це дає також можливість досліджувати давачі Холла при впливі неоднорідних високоградієнтних магнітних полів, а в перспективі – досліджувати пластини з неоднорідного матеріалу. Наведені приклади показують коректність роботи симулятора та широкі можливості його використання.

[1] Popovic R.S. Hall Effect Devices, IOP Publishing. 1991. 307 p.

[2] Кучис Е.И. Гальваномагнитные эффекты и методы их исследования. М., 1990.

[3] Bellekom S. Origins of offset in conventional and current-spinning Hall plates, PhD Thesis, Delft Univ. Press, 1998. 130 p.

[4] Neudecker J., Hornung H., Frohmader K.P., Seitzer D. Three-dimensional numerical modeling of Hall plates in inhomogeneous magnetic fields // Solid-State Electronics. Vol.34. № 5. 1991. P.429–436.

[5] Kuhrt F. and Lippmann H.J. Hallgeneratoren, Springer, Berlin, 1968.