

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

І. І. Волянська, М. М. Симолюк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна*

(Отримано 1 вересня 2017 р.)

Встановлено умови розв’язності в необмеженій за просторовою змінною смузі задачі з багатоточковими умовами за часовою координатою для лінійного рівняння із частинними похідними, корені характеристичного рівняння якого мають різні ненульові дійсні частини.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, багатоточкова задача.

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.946+511.37

Вступ

У статті в смузі $\Pi(T) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0; T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, для диференціального рівняння із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) \equiv \sum_{s_1+s_2 \leq n} a_{s_1, s_2} \frac{\partial^{s_1+s_2} u}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}} = 0, \quad (1)$$

досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами

$$l_j \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) \Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де $a_{s_1, s_2} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $t_1, \dots, t_n$ – різні числа з відрізка $[0, T]$, причому $t_1 < \dots < t_n$, а $l_j \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$, – диференціальний вираз порядку m_j , $j = 1, \dots, n$, причому $m_j \leq n - 1$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$

$$l_j \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{s_1+s_2 \leq m_j} b_{s_1, s_2}^j \frac{\partial^{s_1+s_2}}{\partial t^{s_1} \partial x^{s_2}},$$

$b_{s_1, s_2}^j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$.

Частковими випадками умов (2) є:

1) стандартні багатоточкові умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

(якщо усі диференціальні вирази l_j тотожно дорівнюють 1);

2) умови Ніколетті

$$\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

(якщо $l_j(\partial/\partial t, \partial/\partial x) \equiv (\partial/\partial t)^{j-1}$, $j = 1, \dots, n$).

Загалом, вивчення задач з багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними почалось порівняно недавно. Частково це зумовлено

тим, що такі задачі умовно коректні, а їх розв’язність пов’язана з проблемою малих знаменників, які виникають під час побудови розв’язку.

Систематичне вивчення багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними започаткував член-кореспондент НАН України, професор Б. Й. Пташник. Зокрема, у роботах [2, 6], [13]–[22] у обмежених циліндричних областях, на основі метричного підходу встановлено умови існування єдиного розв’язку задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними та певними умовами (умовами періодичності, умовами Діріхле, умовами Штурма–Ліувілля) за рештою координат для гіперболічних, параболічних та безтипних рівнянь із частинними похідними у відповідних функціональних просторах. Ці умови виражаються у термінах виконання степеневих або експоненціальних оцінок знизу для малих знаменників, що виникають під час побудови розв’язку у вигляді ряду Фур’є.

У необмежених за просторовими змінними областях у роботах [1, 3, 7, 20] встановлено класи єдиності розв’язку багатоточкових задач за часовою змінною для рівнянь та лінійних еволюційних систем рівнянь із частинними похідними. У працях [9]–[12] для конструктивної побудови розв’язків багатоточкових задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними у безмежному шарі застосовано диференціально-символьний метод відокремлення змінних.

Умови коректної розв’язності задач з багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціально-операторних рівнянь досліджено у роботах [4, 5, 8, 21].

Характерною особливістю цієї роботи є виділення класів рівнянь (1) та багатоточкових умов (2), для яких багатоточкова задача (1), (2) коректна у класах функцій експоненційного типу.

I. Умовні позначення та введення функціональних просторів експоненційного типу

Використовуємо такі позначення: S_n – симетрична група перестановок множини з n елементів; $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, – простір таких функцій $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, що $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi\|_{\mathbf{E}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi},$$

де

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$$

є перетворенням Фур'є функції $\varphi(x)$, $C^n([0, T]; \mathbf{E}_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, – простір таких функцій $u(t, x) : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{C}$, що похідні $\partial^r u(t, x) / \partial t^r$, $r = 0, 1, \dots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Норму в просторі $C^n([0, T]; \mathbf{E}_{\alpha,\beta})$ визначаємо за формулою

$$\|u(t, x); C^n([0, T]; \mathbf{E}_{\alpha,\beta})\| = \sum_{r=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} \right\|_{\mathbf{E}_{\alpha,\beta}}.$$

Означення 1. Задачу (1), (2) називатимемо $(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta)$ -коректною, якщо для довільних $\varphi_j \in \mathbf{E}_{\alpha,\beta}$, $j = 1, \dots, n$, у просторі $C^n([0, T]; \mathbf{E}_{\alpha_0, \beta_0})$ існує єдина функція $u(t, x)$, яка справджує рівняння (1) та умови (2) і виконується нерівність

$$\|u; C^n([0, T]; \mathbf{E}_{\alpha_0, \beta_0})\| \leq C \sum_{j=1}^n \|\varphi_j; \mathbf{E}_{\alpha,\beta}\|,$$

де стала $C > 0$ не залежить від вибору функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Метою роботи є опис вимог до диференціальних виразів $L(\partial_t, \partial_x)$ та $l_j(\partial_t, \partial_x)$, $j = 1, \dots, n$, у разі виконання яких багатоточкова задача (1), (2) є $(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta)$ -коректною.

II. Основні вимоги до диференціальних виразів задачі (1), (2)

Нехай $L_0(\lambda, i\xi)$ та $l_j^0(\lambda, i\xi)$, $j = 1, \dots, n$, – головні частини многочленів $L(\lambda, i\xi)$ та $l_j(\lambda, i\xi)$, $j = 1, \dots, n$, відповідно, тобто

$$L_0(\lambda, i\xi) = \sum_{s=0}^n a_{s,n-s} \lambda^s (i\xi)^{n-s},$$

$$l_j^0(\lambda, i\xi) = \sum_{s=0}^{m_j} b_{s,m_j-s}^j \lambda^s (i\xi)^{m_j-s}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Говоритимемо, що для диференціального виразу $L(\partial_t, \partial_x)$ виконується вимога A , якщо рівняння

$L_0(\lambda, i) = 0$ має такі ненульові λ -корені $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$, для яких виконуються нерівності

$$\operatorname{Re} \lambda_j^0 \neq \operatorname{Re} \lambda_q^0 \quad (j \neq q), \quad j, q = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо, що у разі виконання вимоги A нумерацію коренів $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$ вибрано так, що

$$\operatorname{Re} \lambda_1^0 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n^0. \quad (4)$$

Приклад 1. Вимога A виконується для виразу $L(\partial_t, \partial_x)$, який має вигляд

$$L(\partial_t, \partial_x) = (\partial_t^2 + a^2 \partial_x^2) (\partial_t^2 + b^2 \partial_x^2),$$

де $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \neq \pm b$. Справді, у цьому випадку многочлен $L_0(\lambda, i) = (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)$ має дійсні корені $\lambda_1^0 = a$, $\lambda_2^0 = -a$, $\lambda_3^0 = b$, $\lambda_4^0 = -b$.

Приклад 2. Вимога A порушується для виразу

$$L(\partial_t, \partial_x) = (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2) (\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2), \quad a \neq \pm b,$$

де $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Множиною коренів $\{\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0\}$ у цьому випадку є множина уявних чисел $\{ia, -ia, ib, -ib\}$.

Вважатимемо, що для диференціальних виразів L та l_j , $j = 1, \dots, n$, виконується вимога B , якщо результанти $\operatorname{Res}_\lambda(L_0(\lambda, i), l_j^0(\lambda, i))$ многочленів $L_0(\lambda, i)$ та $l_j^0(\lambda, i)$, $j = 1, \dots, n$, за змінною λ є відмінними від нуля. Зауважимо, що виконання вимоги B означає, що λ -корені многочлена $L_0(\lambda, i)$ не є коренями многочленів $l_j^0(\lambda, i)$, $j = 1, \dots, n$, тобто

$$l_j^0(\lambda_1, i) \neq 0, \dots, l_j^0(\lambda_n, i) \neq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Приклад 3. Якщо

$$L(\partial_t, \partial_x) = \sum_{s=0}^n d_s \partial_t^s \partial_x^{n-s}, \quad d_n = 1, d_0 \neq 0,$$

$$l_j(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^j, \quad j = 1, \dots, n,$$

то вимога B , очевидно, виконується. У цьому випадку вирази $l_j(\partial_t, \partial_x)$, $j = 1, \dots, n$, у багатоточкових умовах (2) задають умови Ніколетті

$$\left. \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

Для встановлення умов коректності задачі (1), (2) знадобляться допоміжні твердження (леми 1–3).

Лема 1. Існують такі додатні числа R_1, M_1 , що для кожного $j = 1, \dots, n$, існує аналітична, якщо $|\xi| > R_1$, функція $\lambda_j(\xi)$ така, що

$$L(\lambda_j(\xi), i\xi) = 0$$

і виконується нерівність

$$|\lambda_j(\xi) - \lambda_j^0 \xi| \leq \frac{M_1}{1 + |\xi|}, \quad j = 1, \dots, n, \quad |\xi| \geq R_1.$$

Лема 2. Якщо виконується вимога B , то існують такі додатні числа R_2, M_2 , що для всіх $|\xi| > R_2$ виконуються нерівності

$$|l_j(\lambda_q(\xi), i\xi)| \geq M_2(1 + |\xi|)^{m_j}, \quad j, q = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned}
 l_1(\lambda_1(\xi), i\xi) &= \sum_{s_1+s_2 \leq m_1} b_{s_1, s_2}^1(\lambda_1(\xi))^{s_1} (i\xi)^{s_2} = \\
 &= \sum_{s_1+s_2=m_1} b_{s_1, s_2}^1(\lambda_1(\xi))^{s_1} (i\xi)^{m_1-s_1} + \\
 &+ \sum_{s_1+s_2 \leq m_1-1} b_{s_1, s_2}^1(\lambda_1(\xi))^{s_1} (i\xi)^{s_2} = \\
 &= \sum_{s_1+s_2=m_1} b_{s_1, s_2}^1(\lambda_1^0 \xi + \mu_1(\xi))^{s_1} (i\xi)^{m_1-s_1} + \\
 &+ \sum_{s_1+s_2 \leq m_1-1} b_{s_1, s_2}^1(\lambda_1^0 \xi + \mu_1(\xi))^{s_1} (i\xi)^{s_2} = \\
 &= \xi^{m_1} \left(\sum_{s_1+s_2=m_1} i^{m_1-s_1} b_{s_1, s_2}^1 \left(\frac{\lambda_1^0 \xi + \mu_1(\xi)}{\xi} \right)^{s_1} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{s_1+s_2 \leq m_1-1} b_{s_1, s_2}^1 (\lambda_1^0 \xi + \mu_1(\xi))^{s_1} (i)^{s_2} (\xi)^{s_2-m_1} \right) = \\
 &= \xi^{m_1} \left(\sum_{s_1+s_2=m_1} i^{m_1-s_1} b_{s_1, s_2}^1 \left(\lambda_1^0 + \frac{\mu_1(\xi)}{\xi} \right)^{s_1} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{s_1+s_2 \leq m_1-1} b_{s_1, s_2}^1 (\lambda_1^0 \xi + \mu_1(\xi))^{s_1} (i)^{s_2} (\xi)^{s_2-m_1} \right).
 \end{aligned}$$

Лема 3. Нехай $x_1 < \dots < x_n$, $y_1 < \dots < y_n$. Тоді для довільного набору $\omega = (i_1, \dots, i_n) \in S_n$ такого, що $(i_1, \dots, i_n) \neq (1, \dots, n)$, виконується нерівність

$$x_{i_1} y_1 + \dots + x_{i_n} y_n < x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Лема 4. Нехай $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$, причому

$$t_1 < \dots < t_n.$$

Якщо виконується вимога A і нерівність (4), то для довільного набору $\omega = (i_1, \dots, i_n) \in S_n$ такого, що $(i_1, \dots, i_n) \neq (1, \dots, n)$, справджується оцінка

$$e^{\operatorname{Re} \lambda_1^0 \xi t_1} \dots e^{\operatorname{Re} \lambda_n^0 \xi t_n} > e^{\operatorname{Re} \lambda_{i_1}^0 \xi t_1} \dots e^{\operatorname{Re} \lambda_{i_n}^0 \xi t_n},$$

якщо $\xi > 0$, і оцінка

$$e^{\operatorname{Re} \lambda_n^0 \xi t_1} \dots e^{\operatorname{Re} \lambda_1^0 \xi t_n} > e^{\operatorname{Re} \lambda_{i_1}^0 \xi t_1} \dots e^{\operatorname{Re} \lambda_{i_n}^0 \xi t_n}.$$

якщо $\xi < 0$.

□ **Доведення.** За умовою леми $t_1 < \dots < t_n$ і $\operatorname{Re} \lambda_1^0 \xi < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n^0 \xi$ для всіх $\xi > 0$. Тому на підставі леми 3 одержуємо, що

$$\operatorname{Re} \lambda_1^0 \xi t_1 + \dots + \operatorname{Re} \lambda_n^0 \xi t_n > \operatorname{Re} \lambda_{i_1}^0 \xi t_1 + \dots + \operatorname{Re} \lambda_{i_n}^0 \xi t_n,$$

де $\xi > 0$ і набір $(i_1, \dots, i_n) \in S_n$ є таким, що

$$(i_1, \dots, i_n) \neq (1, \dots, n).$$

Із отриманої нерівності випливає, що

$$e^{\operatorname{Re} (\lambda_1^0 \xi t_1 + \dots + \lambda_n^0 \xi t_n)} > e^{\operatorname{Re} (\lambda_{i_1}^0 \xi t_1 + \dots + \lambda_{i_n}^0 \xi t_n)}, \quad \xi > 0, \quad (6)$$

тобто твердження леми 4 є істинним для $\xi > 0$. Доведення леми для випадку, коли $\xi < 0$, здійснюється аналогічно. ■

III. Умови коректної розв'язності задачі (1), (2)

Надалі вважатимемо, що умови A, B виконуються. Нехай $\tilde{u}(t, \xi)$ та $\tilde{\varphi}_j(\xi)$, $j = 1, \dots, n$, – перетворення Фур'є за змінною x функцій $u(t, x)$ та $\varphi_j(x)$ $j = 1, \dots, n$, відповідно. Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1) та умов (2), отримаємо, що функція $\tilde{u}(t, \xi)$ для кожного $\xi \in \mathbb{R}$ є розв'язком такої багаточислової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$L \left(\frac{d}{dt}, i\xi \right) \tilde{u}(t, \xi) \equiv \sum_{j=0}^n c_j(\xi) \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} = 0, \quad (7)$$

$$l_j \left(\frac{d}{dt}, i\xi \right) \tilde{u}(t, \xi) \Big|_{t=t_j} = \tilde{\varphi}_j(\xi), \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

де $c_j(\xi) = \sum_{q=0}^{n-j} a_{j,q}(\xi) \xi^q$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $c_n(\xi) = 1$.

Через $f_1(t, \xi), \dots, f_n(t, \xi)$ позначимо фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (7), для якої справджуються такі початкові умови:

$$f_q^{(j-1)}(0, \xi) = \delta_{j,q}, \quad j, q = 1, \dots, n,$$

де $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера. Зауважимо, що за теоремою Пуанкаре функції $f_1(t, \xi), \dots, f_n(t, \xi)$ аналітично залежать від параметра $\xi \in \mathbb{R}$.

Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\tilde{u}(t, \xi) = \sum_{q=1}^n C_q(\xi) f_q(t, \xi),$$

де сталі $C_1(\xi), \dots, C_n(\xi)$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^n C_q(\xi) l_j \left(\frac{d}{dt}, i\xi \right) f_q(t, \xi) \Big|_{t=t_j} = \tilde{\varphi}_j(\xi), \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Позначимо:

$$\Delta(\xi) = \left\| l_j \left(\frac{d}{dt}, i\xi \right) f_q(t, \xi) \Big|_{t=t_j} \right\|_{j,q=1}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Якщо

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \Delta(\xi) \neq 0, \quad (10)$$

то система (9) має єдиний розв'язок

$$C_q(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} \tilde{\varphi}_j(\xi), \quad q = 1, \dots, n, \quad (11)$$

де $\Delta_{j,q}(\xi)$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j -го рядка та q -го стовпця у визначнику Δ .

Із формул (6), (11) випливає, що у разі виконання умови (10) задача (7), (8) має для кожного $\xi \in \mathbb{R}$ єдиний розв'язок

$$\tilde{u}(t, \xi) = \sum_{j,q=1}^n \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} f_q(t, \xi) \tilde{\varphi}_j(\xi). \quad (12)$$

Отже, формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується рівністю

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(t, \xi) e^{ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,q=1}^n \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} f_q(t, \xi) \tilde{\varphi}_j(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Дослідимо тепер питання про належність функції, зображеної рівністю (13), до простору $C^n([0, T], \mathbf{E}_{\alpha_0, \beta_0})$, якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbf{E}_{\alpha, \beta}$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (3) та (5). Тоді існує таке число $R > 0$, що для всіх ξ , $|\xi| > R$ виконується оцінка

$$\begin{aligned} |\Delta(\xi)| &\geq C_1(1 + |\xi|)^{m_1 + \dots + m_n} \times \\ &\times \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)t_1 + \dots + \lambda_n(\xi)t_n)}, & \xi > 0, \\ e^{\operatorname{Re}(\lambda_n(\xi)t_1 + \dots + \lambda_1(\xi)t_n)}, & \xi < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

□ *Доведення.* Із кожного j -го рядка, $1 \leq j \leq n$, визначника $\Delta(\xi)$ винесемо ξ^{j-1} . Тоді

$$\Delta(\xi) = \xi^{m_1 + \dots + m_{n-1}} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \begin{vmatrix} e^{\lambda_1(\xi)t_1} l_1(\lambda_1(\xi), i) & \dots & e^{\lambda_n(\xi)t_1} l_1(\lambda_n(\xi), i) \\ e^{\lambda_1(\xi)t_2} l_2(\lambda_1(\xi), i) & \dots & e^{\lambda_n(\xi)t_2} l_2(\lambda_n(\xi), i) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_1(\xi)t_n} l_n(\lambda_1(\xi), i) & \dots & e^{\lambda_n(\xi)t_n} l_n(\lambda_n(\xi), i) \end{vmatrix} = \\ &= \xi^{m_1 + \dots + m_{n-1}} \delta(\xi). \end{aligned}$$

Розкриваючи визначник $\delta(\xi)$, одержимо

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= \sum_{\omega=(i_1, \dots, i_n) \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign} \omega} \times \\ &\times l_1(\lambda_{i_1}(\xi), i) e^{\lambda_{i_1}(\xi)t_1} \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_{i_n}(\xi), i) e^{\lambda_{i_n}(\xi)t_n} = \\ &= \sum_{\omega=(i_1, \dots, i_n) \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign} \omega} l_1(\lambda_{i_1}(\xi), i) \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_{i_n}(\xi), i) \times \\ &\times e^{(\lambda_{i_1}(\xi)t_1 + \dots + \lambda_{i_n}(\xi)t_n)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Із формул (15) випливає, що визначник $\Delta(\xi)$ є квазімногочленом за змінною ξ . Оскільки виконуються умови (3), то враховуючи лему 2, якщо $\xi > 0$, доданок

$$l_1(\lambda_1(\xi), i) \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_n(\xi), i) e^{\lambda_1(\xi)t_1 + \dots + \lambda_n(\xi)t_n}$$

домінує у розвиненні для $\Delta(\xi)$, а якщо $\xi < 0$, то домінує доданок

$$l_1(\lambda_n(\xi), i) \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_1(\xi), i) e^{(\lambda_n(\xi)t_1 + \dots + \lambda_1(\xi)t_n)\xi}.$$

Враховуючи умови (5), отримаємо оцінку (14).

Теорему доведено. ■

Теорема 2. Нехай виконуються умови (3) та (5). Тоді існує таке число $R_1 > 0$, що для всіх ξ , $|\xi| > R_1$, для алгебричних доповнень $\Delta_{j,q}(\xi)$, $j, q = 1, \dots, n$, виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |\Delta_{j,q}(\xi)| &\leq C_2(1 + |\xi|)^{m_1 + \dots + m_n - m_{j-1}} \times \\ &\times \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)t_1 + \dots + \lambda_n(\xi)t_n) - \operatorname{Re} \lambda_q(\xi)t_j}, & \xi > 0, \\ e^{\operatorname{Re}(\lambda_n(\xi)t_1 + \dots + \lambda_1(\xi)t_n) - \operatorname{Re} \lambda_q(\xi)t_j}, & \xi < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

□ *Доведення.* У визначнику $\Delta_{j,q}(\xi)$ з j -го рядка винесемо ξ^{j-1} , тоді

$$\Delta_{j,q}(\xi) = \xi^{m_1 + \dots + m_n - m_{j-1}} \delta_{j,q}(\xi),$$

де $\delta_{j,q}$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j -го рядка та q -го стовпця у визначнику $\delta(\xi)$.

Застосовуючи аналогічні міркування, як і у доведенні теореми 1, матимемо, що у розвиненні $\Delta_{j,q}$, якщо $\xi > 0$, домінуватиме доданок

$$l_1(\lambda_1(\xi), i) \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_n(\xi), i) e^{\lambda_1(\xi)t_1 + \dots + \lambda_n(\xi)t_n - \lambda_q(\xi)t_j},$$

а якщо $\xi < 0$ – доданок

$$l_1(\lambda_n(\xi), i) \cdot \dots \cdot l_n(\lambda_1(\xi), i) e^{\lambda_n(\xi)t_1 + \dots + \lambda_1(\xi)t_n - \lambda_q(\xi)t_j}.$$

Враховуючи умови (5), отримаємо оцінку (16).

Теорему доведено. ■

Висновки

У статті встановлено умови однозначної розв'язності багатоточкової задачі для лінійного диференціального рівняння із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Описано вимоги до коренів характеристичного многочлена рівняння (1) та характеристичних многочленів умов (2), у разі виконання яких досліджувана задача буде коректною за Адамаром у класах функцій експоненційного типу.

Література

- [1] Антыпко И. И., Перельман М. А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
- [2] Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
- [3] Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
- [4] Валицкий Ю. Н. О корректности многоточечной задачи для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами // ДАН СССР. – 1986. – **286**, № 5. – С. 1041–1043.
- [5] Валицкий Ю. Н. Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 44–53.
- [6] Василишин П. Б., Ключ І. С., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.
- [7] Гадецкая С. В. Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравнений с нагрузками // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 3. – С. 79–82.
- [8] Городецкий В. В., Дринь Я. М. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій // Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 1. – С. 26–42.
- [9] Каленюк П. І., Нитребич З. Н. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2002. – 292 с.
- [10] Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісник Держ. ун-ту “Львівська політехніка”. – 1999. – № 364. – С. 223–227.
- [11] Каленюк П. І., Козут І. В., Нитребич З. Н. Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 7–17.
- [12] Ключ І. С., Нитребич З. М. Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників // Вісник Держ. ун-ту “Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 220–226.
- [13] Пташник Б. Й. Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
- [14] Пташник Б. Й. Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
- [15] Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К. : Наукова думка, 1984. – 264 с.
- [16] Пташник Б. Й., Силюга Л. П. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Доповіді НАН України. – 1996. – № 3. – С. 10–14.
- [17] Пташник Б. Й., Симолюк М. М. Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
- [18] Пташник Б. Й., Тимків І. Р. Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26.
- [19] Пташник Б. Й., Штабальок П. І. Багатоточкова задача у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – **35**. – С. 210–215.
- [20] Kenge E., Tayou Simo J. On well-posedness of multipoint integral boundary value problems in a strip // Visnyk Kharkivskogo natsionalnogo Universytetu. – 2003. – N.582. – P. 10–14.
- [21] Valitskiy Yu. N. Multipoint problem for a differential equation in the Hilbert space // Journ. of inverse and ill-posed problems. – 1994. – V.2, No 4. – P. 446–449.
- [22] Symotyuk M. M., Tymkiv I. R. Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time // Carpathian Mathematical Publication. – 2014. – V.6, No 2. – P. 351–359.

MULTIPOINT PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN THE UNLIMITED STRIP

I. I. Volyanska, M. M. Symotyuk

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine
3-b, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine*

The conditions of the solvability of the problem with multipoint conditions by the time coordinate for linear partial differential equation in the unlimited by spatial variable strip, in the case, when the roots of the characteristic equation have different nonzero real parts, are established.

Key words: partial differential equation, multipoint problem.

2000 MSC: 35E20

UDK: 517.946+511.37