

charged bodies. The most serious aspect of the second method is the mathematical evaluation of selection of positions of individual point charges Q_{ij} and checkpoints P_{ij} . Optimization of their selection would surely contribute not only to their decrease (leading to system matrix of lower order) but also to higher accuracy of results.

Acknowledgement. This work has been financially supported from the Research Plans MSM 232200008 and MSM 212300016.

1. Ida, N. *Engineering Electromagnetics*. Springer-Verlag, New York, Inc., 2001. 2. Chari, M. V. K., Salon, S.J. *Numerical Methods in Electromagnetism*, Academic Press, San Diego, 2000. 3. Doležel, I., Kloucek, P., Šolín, P., Ulrych, B. *Distribution of Electrical Charge in a System of Finite Conductors*. *Acta Technica CSAV* 48, 2003. – P. 1–13.

УДК 519.62 – 519.711 : 621.34

В.І. Мороз

Національний університет “Львівська політехніка”

ПОГЛЯД ІНЖЕНЕРА-ЕЛЕКТРИКА НА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

© Мороз В.І., 2003

У статті розглянуті властивості числових методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, що описують моделі електроприводів.

There were analysed properties of the numeric methods for solving the ordinary differential equations that described the electric drives control systems.

Постановка проблеми. Завдяки розвитку комп'ютерної техніки переважна більшість технічних рішень обов'язково проходить етап комп'ютерного моделювання для перевірки їх правильності чи ефективності. Одним з визначальних етапів комп'ютерного моделювання є застосування числових методів для знаходження шуканого розв'язку. Зокрема, для розрахунку динаміки застосовуються числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. У сукупності з математичною моделлю об'єкта вони утворюють комп'ютерну модель, поведінка якої визначається дією обох компонентів.

Традиційно склалося, що особливості числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь не враховуються – вважається, що вони мало впливають на поведінку результуючої комп'ютерної моделі. Цю ілюзію особливо підсилюють сучасні алгоритми з автоматичним вибором кроку інтегрування, наприклад, застосовані у математичному пакеті MATLAB і його додатку – пакеті Simulink. Не применшуючи позитивних якостей Simulink (дуже зручний засіб для візуального імітаційного моделювання, зокрема, електроприводів), слід відзначити, що це середовище створює враження легкого розв'язання будь-якої задачі, яку можна подати структурною схемою з елементів Simulink. Майже десяток доступних реалізацій числових методів для розв'язування диференціальних рівнянь з автоматичним вибором кроку, що наявні в Simulink, ніби переконують у всесильності сучасної комп'ютерної науки. У той самий час ейфорія триває недовго – досить розпочати моделювання системи з жорсткими

нелінійностями типу релейних елементів, як тут же все стає на свої місця: час моделювання різко зростає, а вигляд отриманих результатів починає залежати від заданої локальної точності, яку доводиться зменшувати для прийнятного часу розрахунку. Причина полягає в тому, що класичні числові методи не призначені для розв'язування задач з розривами функцій та/або їх похідних. І це лише один з аспектів застосування числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, а є ще й інші.

Як приклад неочікуваного результату використання числового методу в [4] описано розв'язування тестового рівняння $y' + y = 0$ з початковою умовою $y(0) = 1$ за допомогою неявного методу трапецій, який стійкий для будь-якого кроку. Це рівняння має аналітичний розв'язок $y(t) = e^{-t}$ (загасаюча експонента), а от числовий розв'язок для кроків інтегрування $h > 2$ є стійким, але коливним, що в деяких випадках може ввести в оману навіть досвідченого дослідника.

Аналіз останніх досліджень. Традиційно специфіка поведінки числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь на окремих задачах не розглядається [6, 7], а обмежується зазвичай формулами для обчислення локальної точності методу, інколи – зазначенням областей стійкості. У [2–4] розглядається підхід до аналізу числових методів з точки зору теорії автоматичного керування: досліджуються частотні характеристики цифрових інтеграторів, що дозволяє здійснити реалістичнішу оцінку застосованої в цифровій моделі формули інтегрування. Там же проведено аналіз областей стійкості для поширених формул числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь за методикою [1].

Задачі досліджень. Одним з найпростіших способів дослідження поведінки числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь є використання аперіодичної ланки першого порядку з передатною функцією $\frac{1}{Ts+1}$ як тестового об'єкта (аналог звичайного диференціального рівняння першого порядку $Ty' + y = x$, де y – вихідна координата, T – стала часу, x – вхідний сигнал). Отримані тестові результати для досліджуваного методу завжди можна порівняти з аналітичним розв'язком і, отже, встановити особливості поведінки числового методу.

Виклад основного матеріалу. Краще зрозуміти поведінку числових методів можна, якщо врахувати дві обставини:

1) числовий метод розв'язування звичайних диференціальних рівнянь апроксимує вхідний сигнал у цифровій моделі аперіодичної ланки поліномом певного порядку, що визначає відповідні частотні характеристики даної цифрової моделі;

2) числовий метод апроксимує частковий розв'язок однорідного диференціального рівняння, що описує аперіодичну ланку, – експоненту; за точністю цієї апроксимації для різних величин кроків також можна визначити деякі особливості поведінки використаного числового методу, наприклад, стійкість.

Тестування проведено для популярних числових методів:

Багатокрокові (1–5-го порядків)

- Явні формули Адамса (Adams) або Адамса-Бешфорта (Adams-Bashforth)
- Неявні формули Адамса або Адамса-Малтона (Adams-Moulton)
- Формули Гіра (Gear) або, інакше, ФДН (формули диференціювання назад)

Однокрокові

- Формули Рунге-Кутта (*Runge-Kutta*)
- Формули Фельберга (*Fehlberg*)
- Формули Дормана-Прінса (*Dormand-Prince*) порядку 5(4), Богацкі-Шемпайна (*Bogacki-Shampine*) порядку 2(3) і Мерсона (*Merson*)

Для числових експериментів сталу часу аперіодичної ланки вибрано $T = 1$ с, що спрощує аналіз частотних характеристик цифрових моделей аперіодичної ланки, які отримані за допомогою вибраного числового методу. Подібний підхід, але до кількох простих цифрових інтеграторів, описано в [5]. Для визначення частотних похибок числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь амплітудні частотні характеристики (АЧХ) і фазні частотні характеристики (ФЧХ) отриманих цифрових моделей порівнюються з АЧХ і ФЧХ аперіодичної ланки. Аналіз проводиться для одиничного кроку $h = 1$ в усьому частотному діапазоні до максимальної частоти пропускання цифрової моделі $\omega_{\max}$, що визначається з теореми відліків [5] і становить для проведених експериментів $\omega_{\max} = \pi/h$.

Слід зауважити, що пряме порівняння ефективності та точності в цифрових моделях однокрокових методів з багатокроковими є не зовсім коректним, тому що в однокрокових методах на кожному кроці числового інтегрування виконується декілька (залежно від порядку методу) звертань до функції обчислення правих частин системи диференціальних рівнянь, тобто, всередині інтервалу інтегрування використовуються додаткові точки. Для перерахунку кроку інтегрування на одне звертання до функції обчислення правих частин системи диференціальних рівнянь значення кроку інтегрування слід поділити на кількість звертань до правих частин системи цього числового методу.

Хід побудови цифрових моделей показано на прикладі формули Рунге-Кутта другого порядку, чи, як його ще називають, методу Хойна (*Heun*), і неявної формули Адамса (метод Адамса-Малтона) третього порядку.

Формула Рунге-Кутта другого порядку: рівняння аперіодичної ланки $Ty' + y = x$ у нормальній формі Коші матиме вигляд $y' = f(x; y) = \frac{x - y}{T}$. Після його підстановки у формулу числового методу $y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2$, де $k_1 = h \cdot f(x_i; y_i)$, $k_2 = h \cdot f(x_i + h; y_i + k_1)$, і спрощень отримаємо рекурентну формулу цифрової моделі

$$y_{i+1} = \frac{(2T^2 + h^2 - 2hT)y_i + hTx_{i+1} + h(T - h)x_i}{2T^2},$$

на основі якої матимемо дискретну передавальну функцію, що буде використана далі для аналізу частотних характеристик цифрової моделі:

$$W_{RK2}(z) = \frac{h(T(z+1) - h)}{2T^2(z-1) + h(2T - h)}.$$

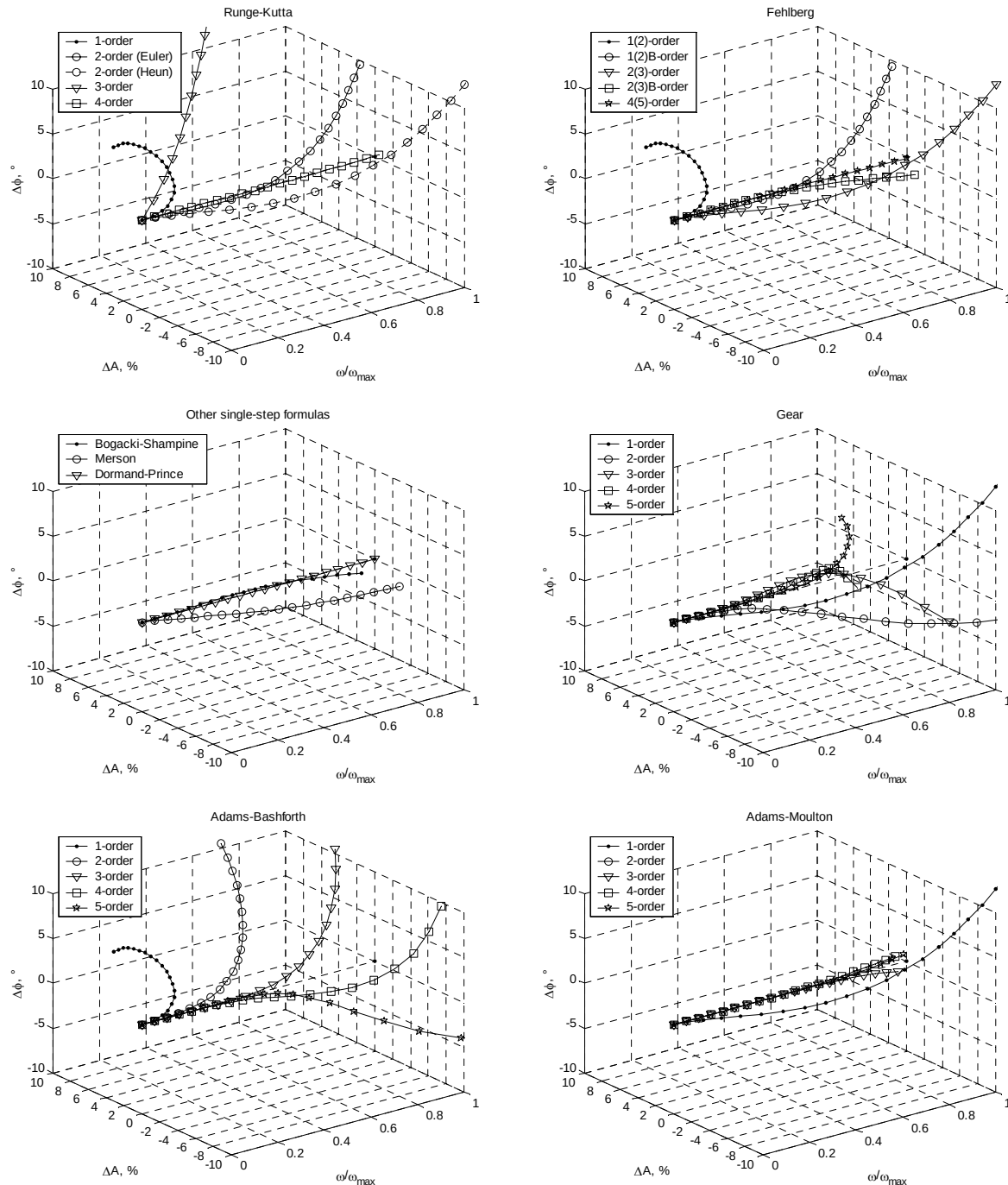
Неявна формула Адамса третього порядку: Після підстановки значення похідної $y' = \frac{x - y}{T}$ у формулу числового методу $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1})$, у результаті спрощень отримаємо рекурентну формулу цифрової моделі

$$y_{i+1} = \frac{(12 - 8h)y_i + hy_{i-1} + h(5x_{i+1} + 8x_i - x_{i-1})}{12 + 5h}$$

і, відповідно, її дискретну передавальну функцію:

$$W_{AM3}(z) = \frac{h(5z + 8 - z^{-1})}{(12T + 5h)z - 12T + 8h - hz^{-1}}.$$

Частотні характеристики похибок отриманих цифрових моделей стосовно аперіодичної ланки показано на рисунку, де за осями задано відповідні параметри: відносну частоту стосовно максимальної, тобто, $\omega/\omega_{\max}$, відносну амплітудну частотну похибку ΔA (у відсотках), фазну похибку $\Delta\phi$ (у градусах).



Графіки частотних похибок числових методів

Аналіз отриманих графіків частотних похибок дає змогу зробити певні **висновки**:

1) цифрові моделі аперіодичної ланки на основі неявних формул Адамса мають потенційно найкращі частотні характеристики; у цьому вони переважають моделі, які отримані на основі формул ФДН і явних формул Адамса, що зайвий раз свідчить про перевагу неявних методів перед явними;

2) для отримання достатньої точності цифрової моделі вистачає використовувати числовий метод з апроксимацією вхідного сигналу за трьома-чотирма точками (часто, але не завжди, це відповідає порядку числового методу); застосування методів вищого порядку нерациональне.

Частотні характеристики пояснюють і незадовільну поведінку популярних формул Гіра (ФДН) у багатьох задачах, оскільки вони використовують апроксимацію функції збурення (вхідного сигналу) лише за однією точкою (поліномом нульового порядку).

Аналіз отриманих результатів дозволив визначити **частотний критерій** для числових методів розв'язку звичайних диференціальних рівнянь: їх частотні характеристики визначаються способом апроксимації вхідного сигналу даним числовим методом (*взагалі, це питання не є новим для теорії дискретних і цифрових систем керування, зокрема, в [5] розглядається апроксимація сигналу поліномами нульового і першого порядку*). Графіки частотних похибок показують, що високий порядок формули числового інтегрування ще не є свідченням ефективності застосування методу в цифровій моделі для широкого спектра вхідного сигналу – вище третього порядку виграш практично відсутній.

Такий важливий критерій для числового методу, як стійкість можна проаналізувати, розв'язуючи вищезгадане тестове диференціальне рівняння з використанням підходу, що описаний в [1]: розглядати точність апроксимації числовим методом аналітичного розв'язку (експоненти $y(t) = e^{-t}$, що зводиться до рекурентного рівняння $y_{i+1} = y_i e^{-h}$) для різних значень кроку розв'язку. Для прикладу розглянемо неявну формулу Адамса другого порядку (неявний метод трапецій) і формулу Рунге – Кутта другого порядку.

Неявна формула Адамса другого порядку: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_{i+1} + y'_i)$, підставляючи

значення похідної ($y' = -y$), з тестового рівняння отримаємо $y_{i+1} = y_i - \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i)$.

Зведемо подібні члени і отримаємо $y_{i+1} = y_i \left(\frac{2-h}{2+h} \right)$. Вираз біля y_i є апроксимацією точного значення e^{-h} першим членом розкладу в ряд Лорана.

Формула Рунге – Кутта другого порядку: $y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2$, підставивши значення похідної отримаємо

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = -hy_i;$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) = -hy_i(1-h),$$

$$\text{звідки } y_{i+1} = y_i \left(1 - h \left(1 - \frac{h}{2} \right) \right).$$

У випадку формули Рунге-Кутта вираз біля y_i є апроксимацією точного значення e^{-h} його обмеження першими двома членами розкладом у ряд.

Для досліджуваних числових методів графіки залежності апроксимуючого виразу біля y_i від кроку h порівняно з точною експонентою e^{-h} подані в [4]. Для стійкого загасаючого розв'язку апроксимуючий вираз при y_i за модулем не повинен перевищувати 1, інакше формула починає давати нестійкий розв'язок (за цим критерієм оцінюється область допустимих значень кроку h). Якщо ж апроксимоване числовим методом значення e^{-h} знаходиться в межах від -1 до 0, то отримується знакозмінний вираз біля y_i в рекурентній формулі та, відповідно, знакозмінний загасаючий розв'язок, про що і йшлося на початку статті з посиланням на неявний метод трапецій [4].

Як показано в [4], практично всі формули числового інтегрування забезпечують задовільну апроксимацію e^{-h} лише для $h \leq 1$, що в поєднанні з критерієм частотних характеристик і визначає реальну поведінку методу під час застосування в цифровій моделі. Напевно, це є головним недоліком традиційних числових методів, обійти який можна використанням числово-аналітичних методів (наприклад, Z-перетворення), щоб відповісти на запитання – навіщо апроксимувати експоненту, якщо можна використати її точне значення? Але це вже матеріал іншої статті...

Висновки. 1. Високий порядок числового методу (вище четвертого) не забезпечує суттєвого зростання точності цифрової моделі керованих електромеханічних систем.

2. Серед традиційних методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь раціональними для створення цифрових моделей є неявні формули Адамса третього-четвертого порядків.

3. Основним недоліком розглянутих числових методів є незадовільна апроксимація експоненційної складової розв'язку диференціального рівняння для випадку, коли крок розв'язку h перевищує сталу часу T диференціального рівняння $T \frac{dy}{dt} + y = x$.

4. Альтернативою застосуванню традиційних числових методів для створення цифрових моделей є числово-аналітичні методи, зокрема, Z-перетворення.

1. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Пер. с англ. – 2-е изд., стереотипное. – М., 1977. 2. Мороз В.І. Аналіз частотних характеристик чисельних методів розв'язку звичайних диференціальних рівнянь / Вісн. Держ ун-ту "Львівська політехніка". – 1995. – № 288. – С. 58–66. 3. Мороз В. Аналіз чисельних методів для аналізу керованих електромеханічних систем / Тез. доп. 3-ї Міжнар. наук.-техн. конф. "Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці", 25–30 жовтня 1999 р., Львів, Україна. 4. Мороз В. Аналіз числових методів для моделювання керованих електромеханічних систем / Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 2000. – № 403. – С. 111–113. 5. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М., 1964. 6. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М., 1990. 7. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные процедуры: Пер. с англ. – М., 1980.