

РОЗРАХУНОК РАМ ЯК ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНОЇ СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

© Давидчак О.Р., 2004

Пропонується методика визначення частот власних коливань рами із розподіленими і зосередженими масами, розроблена на основі алгоритму методу граничних елементів і методу дискретизації елементів.

Method of natural oscillations determination for framed structure with discrete-continuous parameters distributions is proposed. Procedure is based on BEM, element discretization and quasi-differential equations methods.

Вступ. Для дослідження гармонійних коливань стрижневих систем застосовують різні методи, проте кожний із них не позбавлений своїх недоліків. Зокрема методи сил і переміщень дозволяють визначати точний спектр частот власних коливань (у межах допущень, які прийняті при виведенні диференціальних рівнянь коливань), але частотні рівняння цих методів мають точки розривів другого роду, що може призвести до пропуску дійсних частот. У методі скінченних елементів (МСЕ) спектр частот обмежений і не точний через заміну системи з безмежним числом ступенів вільності на системи із скінченим числом вільності. У методі граничних елементів (МГЕ) також застосовують спрощення розрахункової схеми під час зведення зосереджених мас до еквівалентної розподіленої маси.

У роботі вільні коливання рами із розподіленими і зосередженими масами досліджені методом дискретизації на основі алгоритму методу граничних елементів.

Методика розрахунку. Рівняння поперечних коливань в амплітудному стані стрижнів рами із нерухомими вузлами мають вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E_i I_i \frac{d^2 v_i(x)}{dx^2} \right) - \omega^2 m^* v_i(x) = 0, \quad i = 1, m \quad (1)$$

де m – кількість стрижнів у рамі; $m^*_i = m_i(x) + \sum M_j \delta(x - x_j)$; m_i – розподілена маса i -го стрижня; M_j – зосереджена маса на i -му стрижні у перерізах $x = x_j$.

Розв'язок системи рівнянь подають у матричній формі [1]

$$Y(x) = B^*(x, x_0) \times Y_0 \quad (2)$$

де $Y(x)$ – матриця параметрів напружено-деформованого стану у перерізах всіх стрижнів рами; Y_0 – матриця початкових параметрів всіх стрижнів рами; $B^*(x, x_0)$ – фундаментальна матриця диференціальної системи (2)

$$B^* = \begin{vmatrix} B_1(x, x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_i(x, x_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_m(x, x_0) \end{vmatrix}; \quad Y(x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) \\ \vdots \\ Y_i(x) \\ \vdots \\ Y_m(x) \end{vmatrix}; \quad Y_0 = \begin{vmatrix} Y_{01} \\ \vdots \\ Y_{0i} \\ \vdots \\ Y_{0m} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Побудова фундаментальної матриці для диференціальних рівнянь (1), коефіцієнти яких містять дельта-функції, наведена у роботах [1, 2]. Згідно із згаданою методикою розв'язки рівнянь (1) подаються через розв'язання простого рівняння $(EI y''(x))'' = 0$, матриця фундаментальних розв'язків якого при $EI = \text{const}$ має вигляд

$$B(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & x - \alpha & \frac{(x - \alpha)^2}{a_o * 2!} & \frac{(x - \alpha)^3}{a_o * 3!} \\ 0 & 1 & x - \alpha & \frac{(\alpha - x)^2}{a_o * 2!} \\ 0 & 0 & 1 & x - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Граничні параметри стрижнів системи будуть зв'язані рівняннями рівноваги й сумісності переміщень вузлів. Це дозволяє перенести граничні параметри стрижнів із матриці Y у матрицю Y_0 , виконати відповідні перетворення матриці B^* і звести систему (2) до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих граничних параметрів стрижнів за такою схемою [3]:

$$Y = B^* * Y_0 \rightarrow B^* * Y_0 - Y = 0 \rightarrow B_*^* * Y_* = 0. \quad (4)$$

Спектр частот власних коливань знаходять з умови рівності нулю визначника

$$|B_*^*| = 0 \quad (5)$$

Рівняння (5) дає змогу за допомогою підбору визначити повний спектр частот системи.

Приклад розрахунку. Дослідити на вільні коливання раму із зосередженою масою, показану на рисунку.

Для плоскої рами записуються умови рівноваги і сумісності переміщень вузлів 1 і 2, які наведені у матриці $Y(1)$. У матриці Y_0 такими, що дорівнюють нулю є 1, 3, 5, 9, 13, 15, 17, 19 рядки.

Відповідно у матриці B^* стовпці із аналогічними номерами замінюємо нульовими членами, а на місце нульових рядків матриці Y_0 переносимо граничні параметри матриці $Y(1)$. Після перетворення матриці B^* отримуємо визначник стійкості, фіксуємо зміну знака якого, визначаємо частоти власних коливань. Члени матриці B^* визначаємо за методикою, викладеною у роботах [1, 2], яка враховує фактичне розташування зосереджених мас.

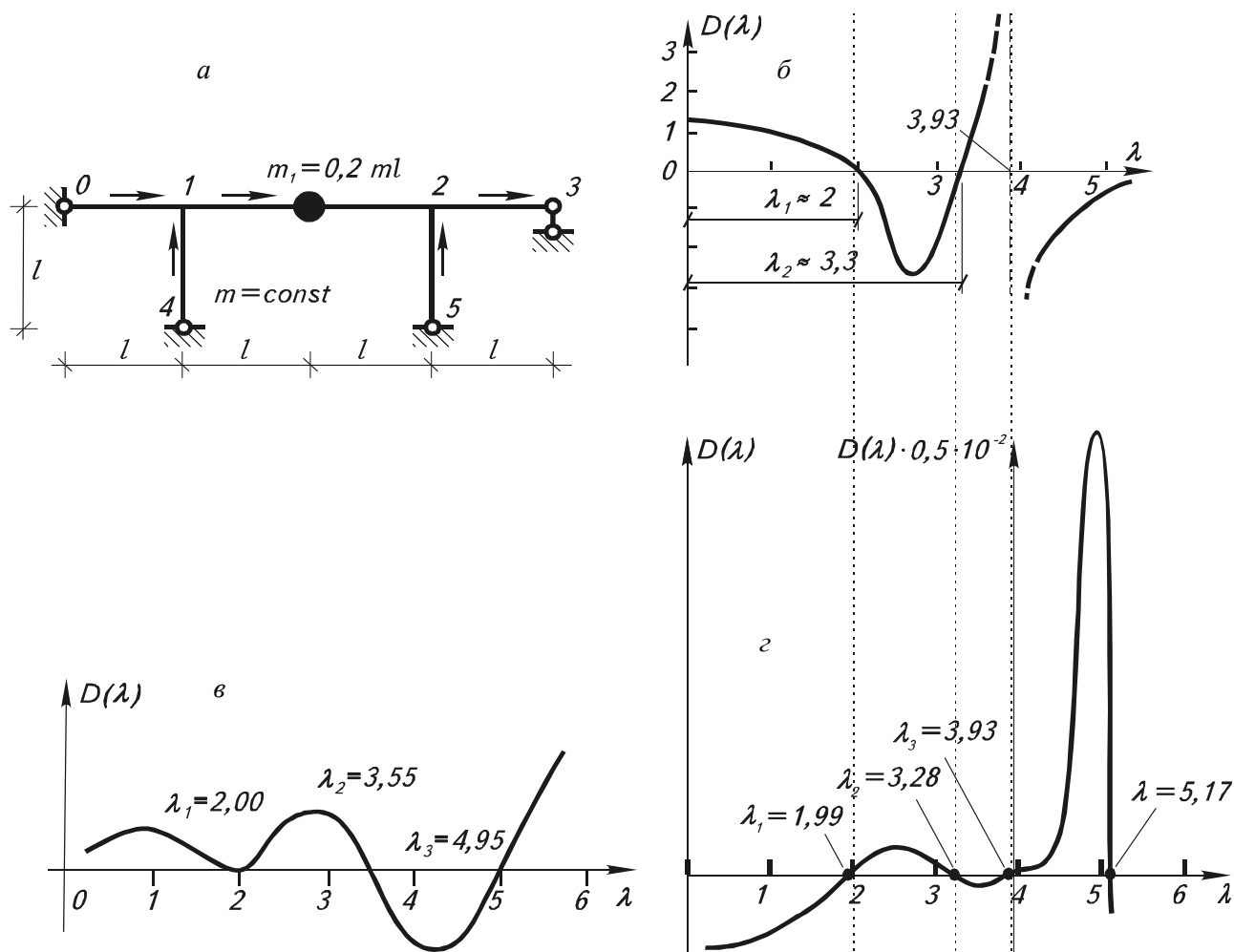
У матриці B^* крапками (".") позначені нульові члени.

На рисунку, б, в, г, показані графіки частотного визначника, отримані різними методами: на рисунку, б – графік визначника, отриманого методом переміщень при дослідженні тільки симетричних форм коливань [4]; на рисунку, в – результати досліджень методом граничних елементів [3]; рисунок, г – результати, отримані за наведеним алгоритмом. Як показує порівняльний аналіз зображених на рисунку результатів заміна точкової маси на еквівалентну розподілену МГЕ (рисунок, в) призводить до похибки, яка зростає із зростанням номера частоти, так вже для третьої частоти похибка збільшується до 30.67 % [3]. Частоти визначені за наведеним методом (метод дискретизації у поєднанні із алгоритмом МГЕ) практично не дають похибки порівняно із точним методом переміщень, при цьому номер частоти не впливає на точність отриманих результатів. Разом із цим точка розриву у визначнику, отриманому

$$Y(\ell) = \begin{bmatrix} y^{0-1}(\ell) = 0 & 1 \\ \varphi^{0-1}(\ell) = \varphi^{1-2}(0) = \varphi^{4-1}(\ell) & 2 \\ M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(0) - M^{4-1}(\ell) = 0 & 3 \\ Q^{0-1}(\ell) & 4 \\ y^{1-2}(2\ell) = 0 & 5 \\ \varphi^{1-2}(2\ell) = \varphi^{2-3}(0) = \varphi^{5-2}(\ell) & 6 \\ M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(0) - M^{5-2}(\ell) & 7 \\ Q^{1-2}(\ell) & 8 \\ y^{2-3}(\ell) = 0 & 9 \\ \varphi^{2-3}(\ell) & 10 \\ M^{2-3}(\ell) = 0 & 11 \\ Q^{2-3}(\ell) & 12 \\ y^{4-1}(\ell) = 0 & 13 \\ \varphi^{4-1}(\ell) = \varphi^{1-2}(0) = \varphi^{0-1}(\ell) & 14 \\ M^{4-1}(\ell) = M^{1-2}(0) - M^{0-1}(\ell) & 15 \\ Q^{4-1}(\ell) & 16 \\ y^{5-2}(\ell) = 0 & 17 \\ \varphi^{5-2}(\ell) = \varphi^{1-2}(\ell) = \varphi^{2-3}(0) & 18 \\ M^{5-2}(\ell) = M^{2-3}(0) - M^{1-2}(\ell) & 19 \\ Q^{5-2}(\ell) & 20 \end{bmatrix}; \quad Y_* = \begin{bmatrix} y^{0-1}(0) = 0; M^{0-1}(\ell) & 1 \\ \varphi^{0-1}(0) & 2 \\ M^{0-1}(0) = 0; Q^{0-1}(\ell) & 3 \\ Q^{0-1}(0) & 4 \\ y^{1-2}(0) = 0; M^{1-2}(\ell) & 5 \\ \varphi^{1-2}(0) = \varphi^{0-1}(\ell) & 6 \\ M^{1-2}(0) & 7 \\ Q^{1-2}(0) & 8 \\ y^{2-3}(0) = 0; Q^{1-2}(\ell) & 9 \\ \varphi^{2-3}(0) = \varphi^{1-2}(\ell) & 10 \\ M^{2-3}(0) & 11 \\ Q^{2-3}(0) & 12 \\ y^{4-1}(0) = 0; \varphi^{2-3}(\ell) & 13 \\ \varphi^{4-1}(0) & 14 \\ M^{4-1}(0) = 0; Q^{2-3}(\ell) & 15 \\ Q^{4-1}(0) & 16 \\ y^{5-2}(0) = 0; Q^{4-1}(\ell) & 17 \\ \varphi^{5-2}(0) & 18 \\ M^{5-2}(0) = 0; Q^{5-2}(\ell) & 19 \\ Q^{5-2}(0) & 20 \end{bmatrix}$$

$$B_*^* = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & B_{13}^1 & \cdot & B_{14}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & B_{12}^1 & \cdot & B_{12}^1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & -1 & B_{12}^1 & \cdot & B_{12}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & B_{12}^1 & -1 & B_{12}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^2 & B_{12}^2 & B_{12}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^2 & B_{12}^2 & B_{12}^2 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & B_{12}^2 & B_{12}^2 & B_{12}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^2 & B_{12}^2 & B_{12}^2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^3 & B_{12}^3 & B_{12}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^3 & B_{12}^3 & B_{12}^3 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 11 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^3 & B_{12}^3 & B_{12}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^3 & B_{12}^3 & B_{12}^3 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 13 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 14 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 15 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^4 & \cdot & B_{12}^4 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 17 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^5 & \cdot & B_{12}^5 \\ 18 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^5 & \cdot & B_{12}^5 \\ 19 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^5 & \cdot & B_{12}^5 \\ 20 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{12}^5 & -1 & B_{12}^5 \end{bmatrix}$$

методом переміщень ($\lambda_3 = 3.93$), збігається із коренем частотного визначника, отриманого використаним у роботі підходом. Тобто розрив у визначнику методу переміщень попадає на третю частоту власних коливань і при розрахунку згаданим методом цю частоту пропускають. Цього недоліку позбавлений запропонований у роботі метод розрахунку. Четверта частота $\lambda_4 = 5.17$ (рисунок, з) відповідає несиметричній формі коливань, тому її на графіку (рисунок, б) немає.



Графіки частотного визначника, отримані різними методами

Висновки. Запропонована нова методика визначення частот власних коливань рами із розподіленими і зосередженими масами дозволяє отримати частоту коливань із більшою точністю, ніж відомі методи, зокрема, метод переміщень та МГЕ.

1. Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2004. – № 495. – С. 62–64. 2. Давидчак О., Тацій Р. Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів // ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i inżynieria środowiska. – Rzeszow, 2004. – Z. 37. – С. 57–60. 3. Баженов В.А., Даценко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 240 с. 4. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.