col diag mes tr
ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 81–85

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 81–85

ГРАНИЧНО-РІВНОВАЖНИЙ СТАН БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧЧЯ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ПОПЕРЕЧНИМ ЗГИНОМ

В.З. Станкевич[a], Б.М. Стасюк[b], Т.Б. Децик[c]

[a] *Львівський науково-дослідний інститут судових експертиз,*
Львівська філія Дніпропетровського національного унфверситету залізничного транспорту
ім. акад. В. Лазаряна, вул. І. Блажкевича 12, Львів, Україна
[b] *Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. С. Бандери 12, Львів, Україна
[c] *Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя,*
вул. Руська 56, Тернопіль, Україна

(Отримано 15 червня 2011 р.)

Запропоновано гранично-інтегральний метод аналітичного визначення концентрації напружень при поперечному згині бруса круглого попереччя, що містить внутрішню плоску кругову тріщину. Вважається, що тріщина розташована на достатній віддалі від поверхні бруса, при якій впливом поверхні на концентрацію напружень в околі контуру тріщини можна знехтувати. Для отримання виразів коефіцієнтів інтенсивності напружень використано теорему Дайсона та представлення функцій розкриття тріщини у вигляді комбінації полігармонічних многочленів.

Ключові слова: тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, полігармонічний многочлен, граничні інтегральні рівняння

2000 MSC: 74R10

УДК: 539.3

Вступ

Відомо, що міцність стрижневих елементів конструкцій залежить насамперед від виду та величини навантаження, розмірів і механічних характеристик матеріалів цих елементів. Похибки у розрахунках на міцність, зумовлені спрощеними розрахунковими схемами, наближеними методами обчислень та величинами діючих навантажень, компенсують відповідними коефіцієнтами запасу міцності. За наявності у тілах тріщин, чужорідних включень тощо, необхідно додатково проводити міцнісні розрахунки з врахуванням зазначених дефектів, позаяк останні можуть виступати ініціаторами значних концентрацій напружень і призвести за подальшої експлуатації конструкції до її передчасного руйнування [1–2]. До цього часу в літературі переважають розв'язки двовимірних (плоских, осесиметричних) задач механіки руйнування без врахування специфіки навантажень елементів конструкцій та машин [3, 4]. При цьому відповідні задачі розв'язані методом сингулярних інтегральних рівнянь [5, 6] та методом скінченних елементів [7, 8]. Значний інтерес для практики представляють розв'язки тривимірних задач теорії пружності для тіл з тріщинами, оскільки вони коректніше описують модель руйнування тіл з дефектами [9, 10]. Для розв'язання тривимірних задач механіки руйнування набув метод граничних інтегральних рівнянь [9, 11]. У пропонованій роботі згаданий метод використано для отримання точних аналітичних виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень у квадратурах на контурі внутрішньої тріщини глибокого залягання у брусі під статичним навантаженням.

Постановка задачі

Розглянемо безмежне тіло, послаблене дисковою тріщиною радіуса a, яка займає плоску область S. Протилежні поверхні $S^{\pm}$ тріщини зазнають дії статичних зрівноважених зусиль σ_{j3}, $j = \overline{1,3}$. Виберемо в області S декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, щоб тріщина лежала у координатній площині x_1Ox_2 (рис. 1).

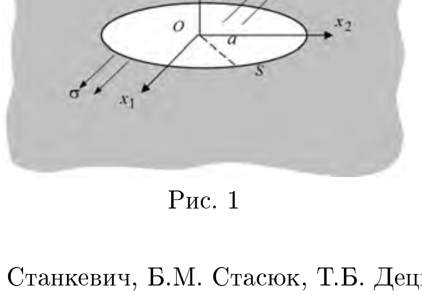

Рис. 1

Задача визначення напружено-деформованого стану тіла з дефектом зводиться до розв'язування диференціального рівняння руху

$$(1-2\nu)\Delta_3\mathbf{u} + grad\, div\, \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

з крайовими умовами на поверхнях тріщини

$$\sigma_{j3}(x) = \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}(x)cos\,(x_3,x_i)\,,\quad j=\overline{1,3},\ x\in S. \tag{2}$$

Тут $\mathbf{u}\,(u_1,u_2,u_3)$ і σ_{ij} – відповідно вектор пружних переміщень і компоненти тензора напружень; Δ_3 – тривимірний оператор Лапласа; ν – коефіцієнт Пуассона.

Під час навантаження тіла відбувається розкриття поверхонь тріщини. Воно описується функціями $\alpha_j(x)$, $j=\overline{1,3}$, які характеризують зміщення відповідних точок протилежних поверхонь дефекту в напрямку осей Ox_j. Задача (1), (2) зводиться до розв'язування системи двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу відносно вказаних функцій розкриття [12]:

$$\Delta_2\iint\limits_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi + (-1)^j\nu\frac{\partial}{\partial x_{3-j}}\iint\limits_S\left[\alpha_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_2}-\alpha_2(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]\frac{dS_\xi}{|x-\xi|} = \frac{1-\nu}{G}\sigma_{j3}(x),\ \ j=1,2,$$

$$\Delta_2\iint\limits_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi = \frac{1-\nu}{G}\sigma_{33}(x),\ \ x\in S, \tag{3}$$

де G – відповідно модуль зсуву матеріалу тіла; $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двовимірний Лапласів оператор; $|x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}$.

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)

Приймаємо, що дотичні напруження σ_{13}, σ_{23} описуються квадратичними, а нормальні σ_{33} – лінійними функціями від координат x_1, x_2

$$\sigma_{j3}(x) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{m=0}^{2-k}c_{jkm}x_1^kx_2^m,\quad j=\overline{1,3}, \tag{4}$$

де c_{jkm} – відомі постійні коефіцієнти розкладу, $c_{302} = c_{311} = c_{320} = 0$.

Розв'язки інтегральних рівнянь (3) вибираємо у вигляді [12]

$$\alpha_j(x) = \sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\psi_j(x),\quad j=\overline{1,3}, \tag{5}$$

де ψ_j – невідомі функції. Представлення (5) передбачає відсутність зміщень поверхонь тріщини на її контурі. Функції ψ_j на підставі теореми Дайсона за аналогією з (4) вибираємо у вигляді поліномів

$$\psi_j(x) = \frac{1-\nu}{G}\sum_{k=0}^{2}\sum_{m=0}^{2-k}d_{jkm}x_1^kx_2^m, \tag{6}$$

де d_{jkm} – невідомі постійні коефіцієнти розкладу, які підлягають визначенню, $d_{302} = d_{311} = d_{320} = 0$.

Підставивши подання (5), (6) у рівняння (3) та використавши спектральні співвідношення для полігармонічних многочленів [13], проведено аналітичне обчислення інтегралів. Прирівнявши в правій та лівій частинах отриманих співвідношень вирази при однакових степенях змінних x_1, x_2 , інтегральні рівняння зведено до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу d_{jkm}. Розв'язавши рівняння, отримано подання для d_{jkm} через відомі коефіцієнти c_{jkm}

$$d_{j00} = \frac{2}{(\nu-2)\pi^2}[c_{j00}-c_j],\ \ j=1,2,$$

$$c_{\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = -\frac{a^2}{45(\nu-1)}\left[(\nu-1)(2\nu+5)c_{\left\{\begin{smallmatrix}120\\202\end{smallmatrix}\right\}}+(7\nu-5)c_{\left\{\begin{smallmatrix}102\\220\end{smallmatrix}\right\}}+\nu(\nu-2)c_{\left\{\begin{smallmatrix}211\\111\end{smallmatrix}\right\}}\right],$$

$$d_{\left\{\begin{smallmatrix}101\\210\end{smallmatrix}\right\}} = \frac{1}{3(\nu-1)(\nu-2)\pi^2}\left[(3\nu-4)c_{\left\{\begin{smallmatrix}101\\210\end{smallmatrix}\right\}}+\nu c_{\left\{\begin{smallmatrix}210\\101\end{smallmatrix}\right\}}\right],$$

$$d_{\left\{\begin{smallmatrix}110\\201\end{smallmatrix}\right\}} = -\frac{1}{3(\nu-2)\pi^2}\left[(\nu-4)c_{\left\{\begin{smallmatrix}110\\201\end{smallmatrix}\right\}}+\nu c_{\left\{\begin{smallmatrix}201\\110\end{smallmatrix}\right\}}\right], \tag{7}$$

$$d_{\left\{\begin{smallmatrix}120\\202\end{smallmatrix}\right\}} = -\frac{2}{45(\nu-1)(\nu-2)\pi^2}\left[2(\nu-1)(4\nu-11)c_{\left\{\begin{smallmatrix}120\\202\end{smallmatrix}\right\}} + 2(2\nu-1)c_{\left\{\begin{smallmatrix}102\\220\end{smallmatrix}\right\}} + \nu(4\nu-5)c_{\left\{\begin{smallmatrix}211\\111\end{smallmatrix}\right\}}\right],$$

$$d_{\left\{\begin{smallmatrix}102\\220\end{smallmatrix}\right\}} = -\frac{2}{45(\nu-1)(\nu-2)\pi^2}\left[2(\nu^2-1)c_{\left\{\begin{smallmatrix}120\\202\end{smallmatrix}\right\}} - 2(7\nu-4)c_{\left\{\begin{smallmatrix}102\\220\end{smallmatrix}\right\}} + \nu(\nu-5)c_{\left\{\begin{smallmatrix}211\\111\end{smallmatrix}\right\}}\right],$$

$$d_{\left\{\begin{smallmatrix}111\\211\end{smallmatrix}\right\}} = -\frac{1}{15(\nu-1)(\nu-2)\pi^2}\left[2\nu(\nu-1)c_{\left\{\begin{smallmatrix}202\\120\end{smallmatrix}\right\}} - 2\nu c_{\left\{\begin{smallmatrix}220\\102\end{smallmatrix}\right\}} + (\nu^2-8\nu+8)c_{\left\{\begin{smallmatrix}111\\211\end{smallmatrix}\right\}}\right].$$

За допомогою значень (6) функцій ψ_j, $j=\overline{1,3}$ в точках контуру області S тріщини визначають коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) відриву, поздовжнього і поперечного зсувів [12]

$$\begin{gathered}K_I(a,\varphi) = -\frac{2\pi\sqrt{\pi a}G}{1-\nu}\psi_3(a,\varphi),\\ K_{II}(a,\varphi) = -\frac{2\pi\sqrt{\pi a}G}{1-\nu}\left[\psi_1(a,\varphi)\cos\varphi + \psi_2(a,\varphi)\sin\varphi\right],\\ K_{III}(a,\varphi) = -2\pi\sqrt{\pi a}G\left[\psi_1(a,\varphi)\sin\varphi - \psi_2(a,\varphi)\cos\varphi\right].\end{gathered} \tag{8}$$

Зазначені коефіцієнти характеризують тріщиностійкість тіла з дефектом. Співвідношення (7) отримані для випадку безмежного тіла з тріщиною. Водночас ними можна користуватися і для тіл скінченних розмірів, якщо тріщина мала і знаходиться на значній віддалі від поверхні тіла. Представлення (4) відповідають найчастіше вживаним на практиці видам навантаження елементів конструкцій (сумісний згин з крученням і розтягом, косий згин, позацентровий розтяг тощо) [14]. При цьому тріщина може бути довільно орієнтована як по відношенню до поверхні тіла, так і до напрямку дії навантаження.

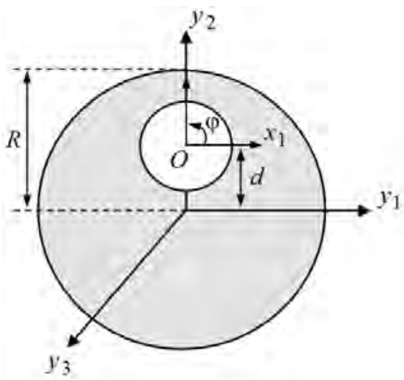

Рис. 2

Як приклад, розглянуто поперечний згин бруса круглого попереччя радіуса R, послаблений внутрішньою дисковою тріщиною, розташованою перпендикулярно до осі бруса в розтягнутій зоні. Локальні x_j і глобальні y_j координати пов'язані між собою співвідношеннями $y_1=x_1$, $y_2=x_2+d$, $y_3=x_3$ (рис. 2). У поперечному перерізі бруса діють поперечна сила Q і згинальний момент M. Розмір a тріщини і глибина d її залягання малі порівняно з розміром R ($R >> d$, $R >> a$). Це дозволяє з достатньою точністю під час розрахунків знехтувати впливом поверхні бруса і замінити його безмежним тілом. Прикладом такої задачі може бути вагонна вісь з внутрішнім дефектом технологічного характеру. Напруження на місці розташування тріщини дорівнюють [15]

$$\sigma_{13} = -\frac{(1+2\nu)Q}{(1+\nu)\pi R^4}y_1y_2 = -\frac{(1+2\nu)Q}{(1+\nu)\pi R^4}[dx_1 + x_1x_2],$$

$$\sigma_{23} = \frac{(3+2\nu)Q}{2(1+\nu)\pi R^4}\left[R^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu}y_1^2 - y_2^2\right] =$$

$$= \frac{(3+2\nu)Q}{2(1+\nu)\pi R^4}\left[R^2 - d^2 - 2dx_2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu}x_1^2 - x_2^2\right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{4M}{\pi R^4}y_2 = \frac{4M}{\pi R^4}[d + x_2].$$

У цьому разі відмінні від нуля коефіцієнти c_{jkm} розкладу напружень дорівнюють

$$\left\{\begin{matrix}c_{110}\\c_{111}\end{matrix}\right\} = F_1\cdot\left\{\begin{matrix}d\\1\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}c_{200}\\c_{201}\\c_{220}\\c_{202}\end{matrix}\right\} = F_2\cdot\left\{\begin{matrix}R^2-d^2\\-2d\\-\dfrac{1-2\nu}{3+2\nu}\\-1\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}c_{300}\\c_{301}\end{matrix}\right\} = F_3\cdot\left\{\begin{matrix}d\\1\end{matrix}\right\},$$

де $F_1 = -\dfrac{(1+2\nu)Q}{(1+\nu)\pi R^4}$, $F_2 = \dfrac{(3+2\nu)Q}{2(1+\nu)\pi R^4}$, $F_3 = \dfrac{4M}{\pi R^4}$.

Скориставшись співвідношеннями (7), отримано вирази для коефіцієнтів d_{jkm} розкладу функцій ψ_j, $j=\overline{1,3}$

$$\left\{\begin{matrix}d_{110}\\d_{111}\end{matrix}\right\} = L_1\cdot\left\{\begin{matrix}\dfrac{4(\nu^2-\nu-1)d}{3(\nu-2)}\\\dfrac{4(\nu^2-\nu-1)}{15(\nu-1)}\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{c} d_{200} \\ d_{201} \\ d_{220} \\ d_{202} \end{array}\right\} = L_1 \cdot \left\{\begin{array}{c} \dfrac{2(N_1-N_2)}{\nu-2} \\ \dfrac{4(\nu^2-\nu-3)d}{3(\nu-2)} \\ \dfrac{8(\nu^2+4\nu-1)}{45(\nu-1)} \\ \dfrac{8(4\nu^2+\nu-4)}{45(\nu-1)} \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{c} d_{300} \\ d_{301} \end{array}\right\} = L_2 \cdot \left\{\begin{array}{c} d \\ 2/3 \end{array}\right\},$$

$$L_1 = -\frac{Q}{(1+\nu)\pi^3 R^4}, \quad L_2 = -\frac{4M}{\pi^3 R^4},$$

$$N_1 = \frac{3+2\nu}{2}\cdot(R^2-d^2), \quad N_2 = \frac{2(2\nu^3-2\nu^2+3\nu-5)}{45(\nu-1)}\cdot a^2.$$

Підставивши отримані представлення у співвідношення (6), (8), можна отримати аналітичні вирази для КІН та на підставі останніх оцінити міцність тіла з дефектом. У випадку складного напруженого стану гранично-рівноважний стан такого тіла обумовлений виконанням енергетичного критерію поширення тріщини [16]

$$(1-\nu)\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + K_{III}^2 = C,$$

де C – константа матеріалу.

Висновки

Розглянуто тривимірну задачу теорії пружності для тіла з внутрішньою круговою тріщиною під дією довільного статичного навантаження. З використанням методу граничних інтегральних рівнянь вперше отримані аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку поперечного згину бруса.

Література

[1] Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.

[2] Gross D., Seelig Th. Bruchmechanik. – Springer, 2011. – 349 s.

[3] Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1, 2. (Под ред. Мураками Ю.) – М.: Мир, 1990. – 448 с., 1016 с.

[4] Механика разрушения и прочность материалов. Справ. пособие. В 4 т. (Под общей ред. Панасюка В.В.) – К.: Наук. думка, 1988. Т. 2 – 620 с.

[5] Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

[6] Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторі напряжений в упругих телах. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.

[7] Kattan P.J., Voyiadjis G.Z. Damage mechanics with finite elements. – Springer, 2002. – 113 p.

[8] Kuna M. Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. – Vieweg Teubner, 2008. – 445 s.

[9] Кит Г.С., Хай М. В. Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с.

[10] Шифрин Е.И. Пространсвенные задачи линейной механики разрушения. – М.: Физматлит, 2002. – 368 с.

[11] Станкевич В.З., Соболевська Ю.Г., Станкевич О.М. Розрахунок прямокутної балки з тріщиною під поперечним згином // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: збірник наукових праць / НАН України, ФМІ ім. Г.В. Карпенка. – Львів: Каменяр, 2009. Вип. 8. – С. 99–105.

[12] Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. думка, 1993. – 254 с.

[13] Станкевич В.З., Стасюк Б.М. Про розв'язування деяких двовимірних інтегральних та інтегродиференційних рівнянь з допомогою полігармонічних многочленів // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка" "Прикладна математика", 2000, №407. – С. 17–20

[14] Gross D., Hauger W., Schrooder J., Wall W.A., Bonet J. Engineering mechanics 2. Mechanics of materials. – Springer, 2011. – 309 p.

[15] Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 344 с.

[16] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

ГРАНИЧНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ

В.З. Станкевич[a], Б.М. Стасюк[b], Т.Б. Децик[c]

[a] *Львовский филиал Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна, ул. И. Блажкевича 12, Львов, Украина*
[b] *Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры 12, Львов, Украина*
[c] *Тернопольский национальный технический университет им. И. Пулюя ул. Руська 56, Тернополь, Украина*

Предлагается гранично-интегральный метод аналитического определения концентрации напряжений при поперечном изгибе бруса круглого сечения, содержащего внутреннюю плоскую круговую трещину. Предполагается, что трещина размещена на достаточном расстоянии от поверхности бруса, при котором влиянием поверхности на концентрацию напряжений в окрестности контура трещины можно пренебречь. Для получения выражений коэффициентов интенсивности напряжений использовано теорему Дайсона и представления функций раскрытия трещины в форме комбинации полигармонических многочленов.

Ключевые слова: трещина, коэффициент интенсивности напряжений, полигармонический многочлен, граничные интегральные уравнения.

2000 MSC: 74R10

УДК: 539.3

BOUNDARY-EQUILIBRIUM STATE OF A BEAM WITH CIRCULAR SECTION CONTAINING AN INTERIOR CRACK UNDER THE CROSS-BENDING

V.Z. Stankevych[a], B.M. Stasyuk[b], T.B. Detsyk[c]

[a] *Lviv branch of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport, 12 I. Blazhkevych Str., Lviv, Ukraine*
[b] *National University "Lvivska Politechnika", 12 S. Bandera Str., Lviv, Ukraine*
[c] *Ternopil National Technical University , 56 Ruska Str., Ternopil, Ukraine*

The boundary integral method of analytical definition of a stress concentration at cross bending of a beam with circular section containing an interior flat circular crack is offered. It is supposed that the crack is on distance from a beam surface sufficient to neglect influence of a surface on a stress concentration in a neighborhood of a crack contour. For deriving of formulas of stress intensity factors the theorem of Dajson and representation of crack opening functions in the form of a combination of polyharmonic polynomials is used.

Key words: crack, stress intensity factor, polyharmonic polynomial, boundary integral equation

2000 MSC: 74R10

УДК: 539.3