

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД У ДОСЛІДЖЕННІ ВПЛИВУ ПЕРІОДИЧНИХ СИЛ НА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИВОДА

© Хитряк О. І., Сокіл М. Б., 2011

Для дослідження коливних процесів у двовимірних гнучких тілах, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, розроблено методику визначення впливу нелінійних та періодичних сил на основні параметри коливань. Розглянуто нерезонансний і резонансний випадки.

It is developed the technique of determination the influence of nonlinear and periodic forces on the main parameters fluctuations to study the oscillatory processes in two-dimensional flexible elements, which are characterized by constant speed of longitudinal motion. They are considered non-resonant and resonant cases.

Вступ. Цілу низку явищ, які відбуваються у реальних коливних системах, не вдається пояснити за лінійною теорією коливань. Водночас, математичний апарат дослідження нелінійних коливань систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами розроблений порівняно повно тільки для так званих квазілінійних систем [1], а також для систем зі степеневою нелінійністю та близьких до них [2]. Для таких систем на основі загальної ідеї методів збурень [3–5] вдається пояснити багато явищ, які для них характерні. Водночас, динамічні процеси у суцільних середовищах, що рухаються із постійною чи змінною швидкостями (йдеться передовсім про канатні витяги, гнучкі робочі елементи систем привода й транспортування, процес рулонування металевієї стрічки та інших матеріалів, трубопроводи, по яких тече рідина, тощо) залишаються малодослідженими. Для вказаного типу систем характерно, що всі частини середовища неперервно коливаються навколо рухомих точок (не мають точок із фіксованими положеннями). Ці системи описуються якісно новими математичними співвідношеннями, для яких не вдається безпосередньо застосувати відомі аналітичні методи досліджень систем із розподіленими параметрами: адже навіть для їхніх незбурених (лінійних) моделей не можна застосувати такі класичні методи інтегрування рівнянь з частинними похідними, як Фур'є чи Д'Аламбера [6]. Одночасно окремі експериментальні та теоретичні [7–8] дослідження динаміки такого класу систем вказують на низку особливостей процесів у них. Зокрема, вплив швидкості поздовжнього руху на частоту, амплітуду коливань та їх стійкість [7–9] тощо. Використання ж числових методів для ґрунтовного аналізу руху не дає бажаних результатів. З огляду на вказане, аналітичне дослідження динамічних процесів двовимірних систем, які характеризуються поздовжнім рухом, є актуальним.

Постановка задачі та методика розв'язування. Для описання динаміки вказаних систем зручно використовувати змінні Ейлера [6]. Якщо позначити у цих змінних переміщення серединної поверхні гнучкого двовимірного тіла в напрямку, перпендикулярному до площини OXY — $u(t, x, y)$, то диференціальне рівняння «динамічної рівноваги» умовно виділеного елемента можна привести до вигляду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (a^2 - V^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ef \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, q \right), \quad (1)$$

де $q = mt$, a^2, g^2 — сталі, які виражаються через фізико-механічні характеристики матеріалу, $ef(\dots) - 2p$ періодична за q функція, що описує нелінійні складові зв'язку між деформаціями та переміщеннями, в'язкопружні, а також періодичні сили, що діють на гнучке тіло; m — частота періодичного збурення; e — малий параметр.

Із урахуванням того, що тіло рухається вздовж осі OX зі сталою швидкістю V , існують залежності [7]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = V \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Наведене вище дає змогу подати диференціальне рівняння (1) у вигляді

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (a^2 - V^2)u_{xx} - g^2 u_{yy} = ef(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}, q). \quad (3)$$

Тут і нижче символи частинних похідних за змінними t , x та y позначатимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}.$$

За умови безвіддривності гнучкого елемента від ведучого і веденого барабанів крайові умови для (3) набувають вигляду

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

Як показано у [10], одночастотний розв'язок незбуреного рівняння, яке відповідає (3), тобто

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (a^2 - V^2)u_{xx} - g^2 u_{yy} = 0, \quad (5)$$

за крайових умов (4) можна трактувати як накладання двох хвиль із різними довжинами, але однаковими початковими фазами та амплітудами

$$u_0(t, x, y) = a(\cos(kx + dy + wt + j) - \cos(cx - dy - wt - j)), \quad (6)$$

де w — частота, a — амплітуда, k, c — хвильові числа відбитої та прямої хвилі, d — хвильове число поперечної складової хвилі, j — початкова фаза хвилі. Співвідношення для хвильових чисел та власної частоти коливного процесу визначаються так, щоб розв'язок (6) задовольняв однорідне рівняння (5) та крайові умови (4) [10]

$$k_k = \frac{pk}{l} + \frac{V\sqrt{l^2 g^2 d^2 + p^2 k^2 (a^2 - V^2)}}{al\sqrt{a^2 - V^2}}, \quad c_k = \frac{pk}{l} - \frac{V\sqrt{l^2 g^2 d^2 + p^2 k^2 (a^2 - V^2)}}{al\sqrt{a^2 - V^2}},$$

$$w_k = \frac{1}{al} \sqrt{a^2 - V^2} \cdot \sqrt{l^2 g^2 d^2 + p^2 k^2 (a^2 - V^2)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

За хвильове число d приймаємо $d = mpb^{-1}$ (b — ширина гнучкого елемента, $m = 1, 2, \dots$), тобто вважаємо, що впоперек стрічки поміщається ціла кількість півхвиль.

Достовірність залежностей (7) підтверджується хоча б тим, що із них при $g = 0$ отримується відома частота коливань для одновимірних систем [8, 11].

Якщо без урахування нелінійних сил ($e = 0$) параметри a і φ є сталі за величиною (адже у такому разі система є консервативною), то наявність нелінійних та періодичних сил порушує вказане. Тобто для збуреного випадку параметри a і φ будуть вже змінними величинами. Існують різні підходи щодо описання впливу на динаміку процесу малих нелінійних сил. Так, для довгомірних систем вважають, що вказані параметри змінюються у часі та вздовж середовища і у таких постановках задач для більшості випадків крайові умови не розглядаються. Дещо інший підхід щодо впливу нелінійних сил на динаміку процесу використовують для систем обмежених розмірів. Для них важливим фактором є крайові умови, а нелінійні сили впливають тільки на закони зміни у часі основних параметрів хвиль [8]. На наш погляд, для гнучких елементів систем транспортування (скінченної довжини) важливішим є другий підхід, який і розглядатимемо нижче. Крім наведеного, на характер зміни амплітуди суттєво впливає зовнішнє періодичне збурення. Його вплив найістотніше проявляється для резонансного випадку, тобто коли між власною ω частотою

та частотою періодичного збурення m існує залежність: $w \approx pq^{-1}m$ (p і q – взаємно прості числа). У зв'язку із наведеним для системи розглядатимемо два випадки: *нерезонансний* $w_k \neq pq^{-1}m$ і *резонансний* $w_k \approx pq^{-1}m$.

Нерезонансний випадок. Для нерезонансного випадку, як показано у [2], амплітуда і частота коливань не залежать для першого наближення від фази вимушуючої сили q . Отже, нерезонансний розв'язок рівняння (1) за крайових умов (2) шукатимемо у вигляді

$$u_0(t, x, y) = a(t)(\cos(kx + dy + wt + j(t)) - \cos(cx - dy - wt - j(t))) \quad (8)$$

Диференціюючи (9) за незалежними змінними, отримуємо

$$\begin{aligned} u_t &= aw[-\sin(kl + dy + wt + j) - \sin(cl - dy - wt - j)] + a_t[\cos(kl + dy + wt + j) - \cos(cl - dy - wt - j)] - \\ &- a j_t[\sin(kl + dy + wt + j) + \sin(cl - dy - wt - j)]; \\ u_{tt} &= a_{tt}[\cos(kl + dy + wt + j) - \cos(cl - dy - wt - j)] + a j_{tt}[\sin(kl + dy + wt + j) + \sin(cl - dy - wt - j)] - \\ &- a(j_t)^2[\cos(kl + dy + wt + j) - \cos(cl - dy - wt - j)] - 2a_t j_t[\sin(kl + dy + wt + j) + \sin(cl - dy - wt - j)] - \\ &- 2w a j_t[\cos(kl + dy + wt + j) - \cos(cl - dy - wt - j)] - aw^2[\cos(kl + dy + wt + j) - \cos(cl - dy - wt - j)]; \\ u_{xt} &= aw[-k \cos(kl + dy + wt + j) - c \cos(cl - dy - wt - j)] - \\ &- a_t[k \sin(kl + dy + wt + j) - c \sin(cl - dy - wt - j)] - a j_t[k \cos(kl + dy + wt + j) + c \cos(cl - dy - wt - j)]; \\ u_{xx} &= a[-k^2 \cos(kl + dy + wt + j) + c^2 \cos(cl - dy - wt - j)]; \\ u_{yy} &= a[-d^2 \cos(kl + dy + wt + j) + d^2 \cos(cl - dy - wt - j)]; \end{aligned} \quad (9)$$

У вихідній задачі права частина диференціального рівняння (3) вказує на малу величину максимального значення нелінійних сил порівняно із їхньою лінійною складовою. Саме у таких задачах мале збурення, як і в автономних системах, викликає повільну зміну в часі основних параметрів коливань [1]. Нехтуючи у (9) доданками порядку малості e^2 , тобто доданками, пропорційними до a_{tt} ; j_{tt} ; $(j_t)^2$; $a_t j_t$, із (3) та (9) одержуємо закон зміни амплітуди і фази хвиль у вигляді

$$\begin{aligned} a_t \{-2w \sin(kl + dy + wt + j) - 2w \sin(cl - dy - wt - j) - 2Vk \sin(kl + dy + wt + j) + 2Vc \sin(cl - dy - wt - j)\} + \\ a j_t \{-2w \cos(kl + dy + wt + j) + 2w \cos(cl - dy - wt - j) - 2Vk \cos(kl + dy + wt + j) - 2Vc \cos(cl - dy - wt - j)\} = \\ = e \bar{f}(a, x, y, y, q), \end{aligned} \quad (10)$$

де, $y = wt + j$, а $\bar{f}(a, x, y, y, q)$ — відповідає значенню правої частини рівняння (1) за умови, що u та її похідні визначаються відповідно до розв'язку незбуреної задачі. За допомогою нескладних перетворень співвідношення (10) можна привести до вигляду

$$\begin{aligned} \cos(wt + j) \{a_t [(-2w - 2Vk) \sin(kx + dy) + (-2w + 2Vc) \sin(cx - dy)] + \\ + a j_t [(-2w - 2Vk) \cos(kx + dy) + (2w - 2Vc) \cos(cx - dy)]\} + \\ + \sin(wt + j) \{a_t [(-2w - 2Vk) \cos(kx + dy) - (-2w + 2Vc) \cos(cx - dy)] + \\ + a j_t [(-2w - 2Vk) \sin(kx + dy) + (2w - 2Vc) \sin(cx - dy)]\} = e \bar{f}(a, x, y, y, q). \end{aligned} \quad (11)$$

Враховуючи те, що функції a та φ є повільно змінними у часі, можна праву і ліву частини (12) усереднити [6] за швидкими змінними y і q отримати систему диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій a та φ

$$\begin{aligned} a_t [(-2w - 2Vk) \sin(kx + dy) + (-2w + 2Vc) \sin(cx - dy)] + \\ + a j_t [(-2w - 2Vk) \cos(kx + dy) + (2w - 2Vc) \cos(cx - dy)] = \frac{e}{p} \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \cos y dy dq; \\ a_t [(-2w - 2Vk) \cos(kx + dy) - (-2w + 2Vc) \cos(cx - dy)] + \\ + a j_t [(-2w - 2Vk) \sin(kx + dy) + (2w - 2Vc) \sin(cx - dy)] = \frac{e}{ap} \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \sin y dy dq. \end{aligned} \quad (12)$$

Зважаючи на те, що ми розглядаємо випадок коротких систем, для яких $a = a(t)$ та $j = j(t)$, із (12) маємо

$$a_t = \frac{-e}{2plb[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \int_0^b \int_0^l \left[[(w+Vk) \sin(kx+dy) + (w-Vc) \sin(cx-dy)] \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \cos y dy dq + \right. \\ \left. + [(w+Vk) \cos(kx+dy) - (w-Vc) \cos(cx-dy)] \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \sin y dy dq \right] dx dy, \\ j_t = \frac{e}{2plb[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \int_0^b \int_0^l \left[[(w+Vk) \sin(kx+dy) + (w-Vc) \sin(cx-dy)] \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \sin y dy dq - \right. \\ \left. - [(w+Vk) \cos(kx+dy) - (w-Vc) \cos(cx-dy)] \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, y, q) \cos y dy dq \right] dx dy; \quad (13)$$

Отже, одержані співвідношення (10) описують динамічний процес у нерезонансному випадку, за умови, що параметри a та j задані залежностями (13).

Резонансний випадок. ($w \approx pq^{-1}m$). Як відомо [1] у резонансному випадку на хід динамічного процесу істотно впливає різниця фаз зовнішнього збурення та власних коливань

$$J = y - q, \text{ де } q = pq^{-1}mt. \quad (14)$$

Тому, формально вводячи у (8) вказаний параметр, отримаємо

$$u(x, y, t) = a(\cos(kx+dy+q+J) - \cos(kx-dy-q-J)). \quad (15)$$

Аналогічно нерезонансному випадку диференціюванням (15) за змінними t, x, y одержимо

$$u_t = a J_t [-\sin(kl+dy+J+q) - \sin(cl-dy-J-q)] + a_t [\cos(kl+dy+J+q) - \cos(cl-dy-J-q)] - \\ - apq^{-1}m [-\sin(kl+dy+J+q) + \sin(cl-dy-J-q)]; \\ u_{tt} = a_{tt} [\cos(kl+dy+J+q) - \cos(cl-dy-J-q)] - 2a_t (pq^{-1}m + J_t) [\sin(kl+dy+wt+j) + \sin(cl-dy-wt-j)] - \\ - a J_{tt} [\sin(kl+dy+J+q) + \sin(cl-dy-J-q)] - a(pq^{-1}m + J_t)^2 [\cos(kl+dy+wt+j) - \cos(cl-dy-wt-j)]; \\ u_{xt} = a_t [-k \sin(kl+dy+J+q) + c \sin(cl-dy-J-q)] - a(pq^{-1}m + J_t) [k \cos(kl+dy+J+q) + c \cos(cl-dy-J-q)]; \\ u_{xx} = a [-k^2 \cos(kl+dy+J+q) + c^2 \cos(cl-dy-J-q)]; \\ u_{yy} = a [-d^2 \cos(kl+dy+J+q) + d^2 \cos(cl-dy-J-q)]; \quad (16)$$

Подібно, як і для нерезонансного випадку із (3), враховуючи (15), для першого наближення отримаємо співвідношення

$$a_t \{-2w \sin(kl+dy+J+q) - 2w \sin(cl-dy-J-q) - 2Vk \sin(kl+dy+J+q) + 2Vc \sin(cl-dy-J-q)\} + \\ + a(J_t + pq^{-1}m - w) \{-2w \cos(kl+dy+J+q) + 2w \cos(cl-dy-J-q) - 2Vk \cos(kl+dy+J+q) - 2Vc \cos(cl-dy-J-q)\} = \\ = e \bar{f}(a, x, y, J+q, q). \quad (17)$$

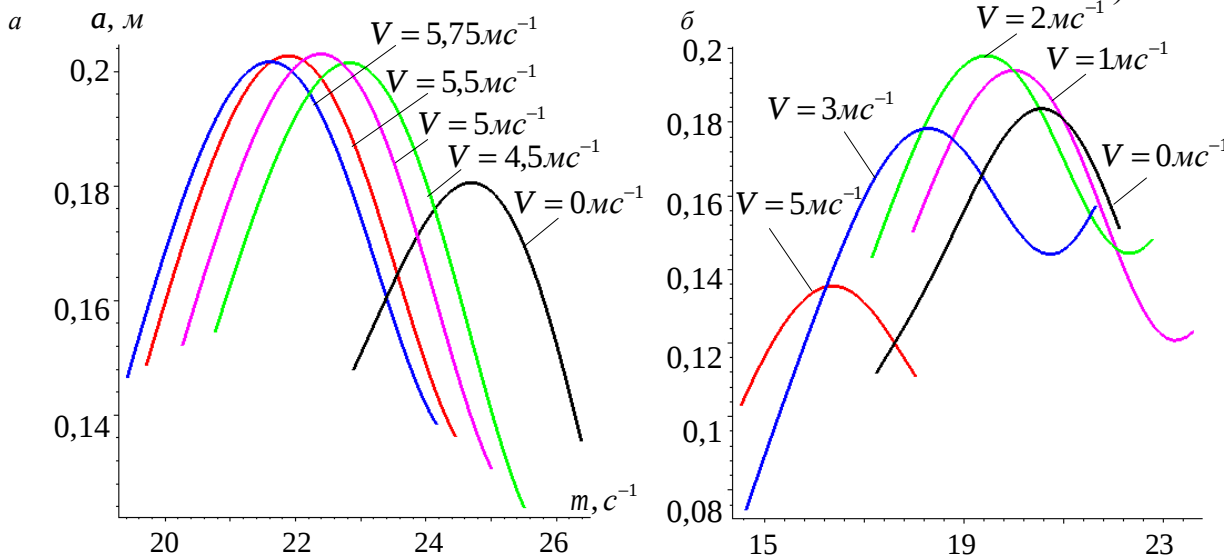
Після нескладних перетворень із (17) маємо

$$\cos(J+q) \{a_t [(-2w - 2Vk) \sin(kx+dy) + (-2w + 2Vc) \sin(cx-dy)] + \\ + a(J_t + pq^{-1}m - w) [(-2w - 2Vk) \cos(kx+dy) + (2w - 2Vc) \cos(cx-dy)]\} + \\ + \sin(J+q) \{a_t [(-2w - 2Vk) \cos(kx+dy) - (-2w + 2Vc) \cos(cx-dy)] + \\ + a(J_t + pq^{-1}m - w) [(-2w - 2Vk) \sin(kx+dy) + (2w - 2Vc) \sin(cx-dy)]\} = e \bar{f}(a, x, y, J+q, q). \quad (18)$$

Останнє співвідношення визначає зв'язок між амплітудою та різницею фаз у вигляді

$$a_t = \frac{-e}{4p^2lb[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \int_0^b \int_0^l \left[[(w+Vk) \sin(kx+dy) + (w-Vc) \sin(cx-dy)] \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, J+q, q) \times \right. \\ \left. \times \cos(J+q) dq + [(w+Vk) \cos(kx+dy) - (w-Vc) \cos(cx-dy)] \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, J+q, q) \sin(J+q) dq \right] dx dy;$$

$$J_t = w - pq^{-1}m + \frac{e}{4p^2lbq[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \int_0^l \left([(w+Vk)\sin(kx+dy) + (w-Vc)\sin(cx-dy)] \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, J+q, q) \times \right. \\ \left. \times \sin(J+q)dq - [(w+Vk)\cos(kx+dy) - (w-Vc)\cos(cx-dy)] \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, J+q, q) \cos(J+q)dq \right) dx dy; \quad (19)$$



Залежності резонансних значень амплітуди за різних значень швидкості поздовжнього руху та ширини гнучкого елемента

На рисунку подано резонансні значення амплітуди за різних значень швидкості поздовжнього руху для випадку, коли права частина рівняння (3) має вигляд

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (a^2 - V^2)u_{xx} - g^2u_{yy} = e(d_1u_t^3 - k_1u_x^2u_{xx} + H \sin mt).$$

За таких значень параметрів $k_1 = 150$; $H = 0,002$; $d_1 = 0,1$; $a = 15 \text{ мс}^{-1}$; $g = 10 \text{ мс}^{-1}$; $l = 2 \text{ м}$; $b = l/10 \text{ м}$ (рис. 1, а)) та $k_1 = 50$; $H = 100$; $d_1 = 0,001$; $a = 10 \text{ мс}^{-1}$; $g = 10 \text{ мс}^{-1}$; $l = 2 \text{ м}$; $b = l/5 \text{ м}$ (рис.1.б)).

Висновки. Наведена методика дослідження динаміки двовимірних гнучких елементів систем привода проста у інженерній реалізації, навіть порівняно із методикою [19] для одновимірних систем. Що стосується конкретних результатів, то подані графічні залежності дають змогу зробити певні висновки.

Висновки, що стосуються впливу швидкості поздовжнього руху:

- швидкість поздовжнього руху суттєво впливає на частоту власних коливань гнучких елементів систем привода та транспортування, а тому і на резонансні явища у них;
- для більших значень швидкості поздовжнього руху частота власних коливань є меншою, а значить, резонансні значення власних частот для більших швидкостей є меншими;
- існує порогове значення швидкості поздовжнього руху, за якого резонансна амплітуда набуває найбільшого значення;
- резонансне значення амплітуди коливань в околі швидкості порогової швидкості може бути більшим на 20–25 % ніж для випадку $V = 0$ (резонансні коливання гнучкого елемента із нерухомими кінцями).

Висновки стосовно фізико-механічних параметрів гнучкого елемента.

- зі зростанням параметра ($a = \sqrt{Tr^{-1}}$, T – величина натягу, r – погонна маса одиниці довжини гнучкого елемента) резонансні значення частот є вищими для більших значень натягу і меншими для більшої густини;

- для більших значень параметра g значення резонансної частоти є вищим, а резонансні значення амплітуди мають складну залежність.

Висновки, що стосуються величини періодичного збурення (Hr). Вона несуттєво впливає на резонансне значення амплітуди коливань, наприклад, зростання цього параметра у 10 разів збільшує резонансне значення амплітуди на 40 %.

Висновки, що стосуються нелінійної складової відновлюючої сили ($ek_1u_x^2u_{xx}$) та сили опору ($-edu_t$). Їхній вплив проявляється за незначної зміни величини частоти резонансних коливань. Збільшення коефіцієнта у 10 разів зміщує частоту власних коливань приблизно на 20 %. Величина резонансного значення амплітуди (у зоні стійких коливань) змінюється для різних значень швидкостей не більше як на 2%.

Висновки, що стосуються геометричних параметрів досліджуваного об'єкта. Із зменшенням *ширини* b гнучкого елемента частота власних коливань змінюється незначно. Що стосується резонансної амплітуди, то вона зі зменшенням ширини знижується і у граничному випадку при $b \rightarrow 0$ отримують результати, які стосуються коливань одновимірних тіл.

Зі зростанням параметра l частота власних коливань зменшується, резонансне значення амплітуди збільшується для всіх швидкостей.

Загальні висновки. Як впливає із наведеного вище, неврахування швидкості поздовжнього руху в розрахунках динамічних систем, які характеризуються постійною складовою швидкості поздовжнього руху, призводить до значних неточностей визначення амплітудно-частотної характеристики як власних, так і вимушених коливань. Причому найсприятливішими з погляду мінімальних динамічних навантажень на гнучкий елемент режимами їх експлуатації за наявності резонансних коливань є такі, що відбуваються за швидкостей, більших за порогову. У вказаному випадку максимальне значення резонансної амплітуди, а значить, і максимальні значення динамічних навантажень можуть бути меншими навіть як для випадку дорезонансних коливань, або резонансних коливань цих самих систем із закріпленими кінцями ($V = 0$). Вказану методику можна узагальнити на деякі інші класи систем, а також на складніші крайові умови. Також її можна ефективно використовувати для дослідження поздовжніх коливань рухомих середовищ.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 2. Сокіл Б.І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 55–58. 3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с. 4. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 5. B. Wan der Pol. A Teory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations // Radio Review, 1920. – №1. 6. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с. 7. Lixin Zhang Dynamic analysis of viscoelastic serpentine belt drive systems/ Zhang Lixin. – Kanada: Department of Mechanical and Industrial Engineering University of Toronto, 1999. – 349 p. 8. Мартинців М. П., Сокіл Б. І., Сокіл М. Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 9. Гацук П. М. Параметричне збурення гнучкого робочого елемента механічного приводу / П.М. Гацук, І.І. Назар // Український міжвідомчий науково-технічний збірник “Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – Львів, 2008. – № 42. – С. 65–69. 10. Сокіл М.Б., Хитряк О.І. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів приводу та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху // Військово-технічний збірник / Академія сухопутних військ. – Львів: АСВ, 2010. – Вип. 2. – С. 9–11. 11. Li-Qun Chen Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings / Li-Qun Chen // Appl. Mech. Rev., March 2005.– V. 58.2. – P. 91–116.