УДК 621.01

І.В. КУЗЬО, О.В. ЛАНЕЦЬ, Я.В. ШПАК
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра механіки та автоматизації машинобудування

ВСТАНОВЛЕННЯ КОНСТРУКТИВНО-СИЛОВИХ ПАРАМЕТРІВ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ КОЛИВАЛЬНИХ МАС У ВІБРАЦІЙНІЙ МАШИНІ З АЕРОІНЕРЦІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ

© Кузьо І.В., Ланець О.В., Шпак Я.В., 2012

Наведено аналітичні залежності для встановлення інерційно-жорсткісних та силових параметрів механічної коливальної системи, що забезпечують робочі білярезонансні режими роботи вібраційної машини з аероінерційним збуренням. Складено математичну модель такої машини та проаналізовано рух її коливальних мас та маси дебалансу в перехідних та усталених режимах роботи.

In the article the analytical dependences for calculation of inertia-inflexibility and power parameters of mechanical oscillating system, which provide the working near resonances mode of behavior of the vibratory machine with an aeroinertia drive, are resulted. The mathematical model of such machine is made and motion of it oscillating masses and and unbalanced mass in transient state and steady-state behavior of work is analysed.

Вступ та огляд літератури. Сьогодні джерелом збурення більшості вібраційного технологічного обладнання є інерційні віброзбуджувачі, що приводяться в рух переважно від асинхронних двигунів [1, 2]. Номінальні режими роботи такого обладнання – зарезонансні. Стрімко розвивається двомасове вібраційне технологічне обладнання з інерційними віброзбуджувачами, режим роботи яких дорезонансний стосовно єдиної власної частоти системи. У таких машинах використання білярезонансних режимів дає змогу істотно знизити споживану потужність приводу. Однак основним недоліком конструкцій як з зарезонансними режимими роботи, так і з дорезонансними, – це ймовірність виходу з ладу електродвигуна під час роботи вібраційної машини у білярезонансних режимах, адже непередбачене “зависання” обертів дебалансу на одній з резонансних частот за його розгону може викликати перегрівання обмотки збурення електродвигуна.

У [3, 4] пропонується підхід у збуренні інерційного віброзбуджувача, який отримав назву аероінерційного збурення. Згідно з ним віброзбудник жорстко з’єднується з крильчаткою, яка приводиться в обертальний рух за допомогою повітряних потоків, що розкручують дебаланс на номінальну частоту обертання білярезонансного режиму роботи вібраційної машини. Умовне “фіксування” обертів дебалансу здійснюється його “зависанням” у дорезонансному режимі стосовно однієї з власних частот тримасової механічної коливальної системи. При цьому вібраційний момент [5–7] на валу дебалансного віброзбудника є вищим за збурювальний, який генерується крильчаткою. Дебаланс, не маючи необхідного моменту збурення для переходу через резонанс, “зависає” на певній частоті обертання у дорезонансному режимі.

Перевагою схеми з аероінерційним збуренням є її простота та наявність автоматично набутого захисту приводу від перевантаження в умовах використання резонансних режимів роботи. Адже неспроможність переходу через резонанс дебалансу, збуреного повітряним потоком, ніяк не впливає на саме джерело збурення. Цей підхід повністю усуває вплив руху дебалансу на джерело збурення, а як наслідок, – інерційний віброзбудник може входити у будь-які режими роботи.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Постановка проблеми та формування завдань досліджень. Створення вібромашин з аероінерційним збуренням вимагає наявності чіткої методики розрахунку параметрів механічної коливальної системи. Залишається не до кінця обґрунтованим вибір інерційних параметрів таких систем. Є необхідність глибшого аналізу руху незрівноваженої маси дебалансу у білярезонансних режимах роботи. Тому у цій роботі увага зосереджуватиметься на розробці комплексної методики розрахунку інерційно-жорсткісних та силових параметрів механічної коливальної системи, що забезпечуватиме синтез вібраційних машин з аероінерційним збуренням, робочі режими роботи яких білярезонансні. Крім того, буде сформована математична модель такої машини та проаналізований рух її коливальних мас та маси дебалансу у перехідних та усталених режимах роботи.

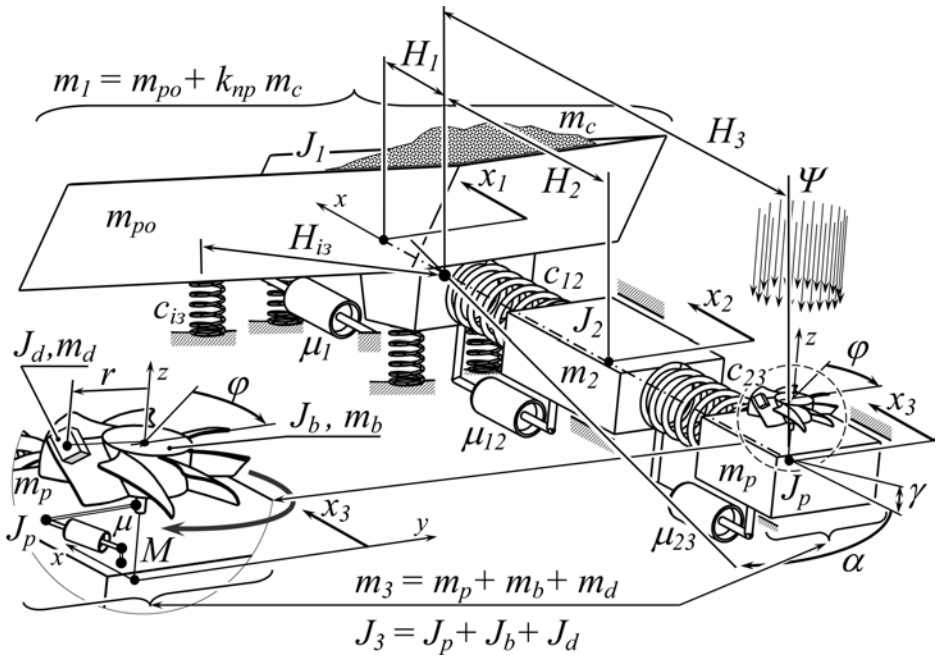


Рис. 1. Принципова схема тримасової вібромашини на основі інерційного віброзбуджувача зі збуренням від повітряних потоків Ψ

1. Опис моделі вібраційної машини з аероінерційним збуренням. Принципову схему тримасової вібраційної машини з аероінерційним збуренням, в якій реалізуються робочі прямолінійні коливання вздовж осі x, показано на рис. 1. Вважаємо, що закон зміни жорсткості у пружних елементах не виходить за межі лінійності і відповідає закону Гука. Це виправдано за умови реалізації малих коливань у вібраційній машині. Механічну систему розглядаємо як таку, що складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних пружними системами чітко визначеної жорсткості. Щодо врахування середовища у математичній моделі, то приймаємо модель, де опір руху робочого органа вібраційної машини відображається коефіцієнтом в'язкого тертя μ_1, а інертність самого середовища – у вигляді частки k_{np} приєднаної маси середовища завантаження m_c, що умовно приєднана до робочого органа m_{po}. Тому інерційне значення коливальної маси m_1, що виконує функцію робочого органа, формується як $m_1 = m_{po} + k_{np} m_c$.

Робочий орган масою m_{po} та моментом інерції стосовно власного центра мас J_{po}, проміжна маса m_2 з моментом інерції J_2 та реактивна m_p (J_p) здійснюють прямолінійні коливання вздовж осі x за координатами відповідно x_1, x_2 та x_3. У зв'язку з тим, що центри вищеперерахованих мас вздовж осі x рознесені і розташовуються стосовно центра мас системи на відстані відповідно

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

H_1, H_2, H_3, уся система має можливість здійснювати кутові коливання у горизонтальній площині за координатою α. Реактивна маса m_p, маса крильчатки m_b з моментом інерції J_b стосовно власної осі симетрії та маса дебалансу m_d утворюють масу m_3. Проміжна маса m_2 приводиться в рух завдяки кінематичному збуренню від маси m_3. Своєю чергою, маса m_1 кінематично збурюється від маси m_2.

Силове збурення вимушених коливань у системі відбувається за рахунок дії потоків повітря Ψ на крильчатку, до однієї з лопатей якої жорстко прикріплена незрівноважена маса m_d (маса дебалансу). Крутний момент M, що виникає на крильчатці, приводить в обертальний рух масу m_d на радіусі r, відцентрові сили від якої і є причиною виникнення знакозмінного силового збурення маси m_3, а як наслідок, її коливальних рухів вздовж осі x. У зв'язку з тим, що крильчатка із незрівноваженою масою розташована на відстані H_3 від центра мас системи, виникає збурювальний момент, який провертатиме механічну систему в горизонтальній площині. Це і буде причиною паразитних коливань за координатою α.

Маси m_1, m_2 та m_3 попарно з'єднані між собою пружними системами із жорсткостями відповідно c_{12} та c_{23} у напрямку коливань вздовж осі x. Вважатимемо, що вздовж осі y значення цих жорсткостей є на порядок вищими порівняно з жорсткостями у напрямку вздовж осі x. Вібраційна машина встановлена на нерухому основу через віброізолятори жорсткістю $c_{iз}$, що кріпляться до маси m_1. Кут кидання у вібраційній машині γ. Він відображає нахил стосовно горизонту умовної лінії, що з'єднує її центри мас та центри жорсткостей пружних систем.

У динамічну модель у вигляді демпферів вводяться коефіцієнти в'язкого тертя μ_{12}, μ_{23}, які пропорційні до швидкості і відображають розсіювання енергії у відповідних пружних системах. Якщо матеріал пружин сталь, величини $\mu_{i,i+1}$ відображатимуть конструкційний гістерезис і визначатимуться як $\mu_{i,i+1} = \Upsilon c_{i,i+1} / \omega$, де Υ – коефіцієнт внутрішнього частотно-незалежного тертя; ω – кутова частота обертання дебалансу (вона ж частота, з якою збурюється система). Коефіцієнт μ_1 є комплексним показником, що описує зовнішній в'язкий опір руху маси m_1 і викликаний впливом маси середовища завантаження m_c та в'язким тертям у віброізоляційних пружних елементах жорсткістю $c_{iз}$. Коефіцієнт μ відображає в'язке тертя під час обертання крильчатки.

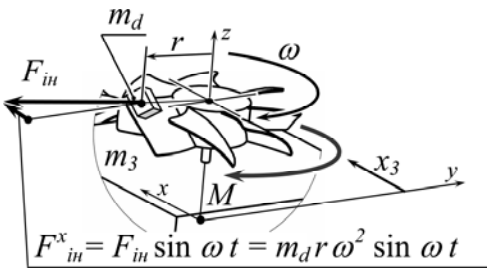


Рис. 2. Принципова схема дії інерційної відцентрової сили

2. Математична модель вібромашини з аероінерційним збуренням, коли інерційна сила є задана явно від часу. Інерційна відцентрова сила від незрівноваженої маси m_d становить $F_{ін} = m_d\, r\, \omega^2$ (рис. 2). Величина силового збурення маси m_2 вздовж цієї осі x відображається як проекція на вісь x відцентрової сили і становить $F^x_{ін} = m_d\, r\, \omega^2 \sin \omega\, t$. Тоді система диференціальних рівнянь для лінійної тримасової системи (рис. 1), знехтувавши рухом за узагальненою координатою α, матиме відомий запис [8, 9, 11]:

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + c_{із}x_1 + \mu_1\dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2\,\ddot{x}_2 + c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_3\,\ddot{x}_3 + c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = m_d\, r\,\omega^2 \sin\,\omega\, t. \end{cases} \quad (1)$$

Користуючись загальними методами розв'язання системи диференціальних рівнянь (1), аналітичні вирази руху мас за трьома незалежними ступенями вільності шукаємо у вигляді $x_1 = X_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = X_2 e^{i\omega t}$ та $x_3 = X_3 e^{i\omega t}$, де X_1, X_2 та X_3 – амплітудні значення лінійних вимушених коливань відповідно за незалежними координатами x_1, x_2 та x_3. Підставляючи ці вирази в (1) і скоротивши у кожній частині системи рівнянь член $e^{i\omega t}$, після деяких перетворень можна отримати залежності для визначення значень X_1, X_2 та X_3. У матричному записі за амплітудами коливань мас це рішення матиме вигляд: $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{F}$, де $\mathbf{X}$ – матриця-стовпець невідомих (матриця переміщень); $\mathbf{C}^{-1}$ – матриця коефіцієнтів за невідомих (матриця жорсткості); $\mathbf{F}$ – матриця-стовпець збурювального зусилля від інерційного віброзбуджувача. У такому випадку система рівнянь (1) у матричному вигляді запишеться як:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} + c_{із} - m_1\omega^2 + \\ + i\,(\mu_1 + \mu_{12})\omega \end{pmatrix} & -c_{12} - i\,\mu_{12}\,\omega & 0 \\ c_{12} - i\,\mu_{12}\,\omega & \left(c_{12} + c_{23} - m_2\omega^2 + i\,(\mu_{12} + \mu_{23})\omega\right) & -c_{23} - i\,\mu_{23}\,\omega \\ 0 & -c_{23} - i\,\mu_{23}\,\omega & \left(c_{23} - m_3\omega^2 + i\,\mu_{23}\,\omega\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{iн} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Позначивши: $k_{11}(\omega) = c_{12} + c_{із} - m_1\omega^2 + i\,(\mu_1 + \mu_{12})\,\omega$; $k_{12}(\omega) = k_{21}(\omega) = -c_{12} - i\,\mu_{12}\,\omega$;

$$k_{13}(\omega) = k_{31}(\omega) = 0\,; \quad k_{22}(\omega) = c_{12} + c_{23} - m_2\omega^2 + i\,(\mu_{12} + \mu_{23})\,\omega\,;$$

$$k_{23}(\omega) = k_{32}(\omega) = -c_{23} - i\,\mu_{23}\,\omega\,; \quad k_{33}(\omega) = c_{23} - m_3\,\omega^2 + i\,\mu_{23}\,\omega,$$

розв'язок системи (2) за амплітудами коливань X_1, X_2 та X_3 відповідно мас m_1, m_2 та m_3 в усталених режимах зведуться до таких залежностей:

$$X_1(\omega) = \frac{-F_{iн} \cdot k_{12}(\omega)\,k_{23}(\omega)}{\Delta}; \; X_2(\omega) = \frac{F_{iн} \cdot k_{11}(\omega)\,k_{23}(\omega)}{\Delta}; \; X_3(\omega) = \frac{F_{iн} \cdot \begin{pmatrix} k_{12}(\omega)\,k_{21}(\omega) - \\ - k_{11}(\omega)\,k_{22}(\omega) \end{pmatrix}}{\Delta}, \quad (3)$$

де $$\Delta = k_{12}(\omega)\,k_{21}(\omega)\,k_{33}(\omega) - k_{11}(\omega)\,k_{22}(\omega)\,k_{33}(\omega) + k_{11}(\omega)\,k_{23}(\omega)\,k_{32}(\omega) \quad (4)$$

– детермінант матриці коефіцієнтів за невідомих у системі рівнянь (2).

3. Встановлення жорсткісних параметрів пружних систем у вібраційній машині з аероінерційним збуренням. На цьому етапі залишається невирішеним питання встановлення значень жорсткостей c_{12} та c_{23}. У будь-якому випадку тримасова система за довільного підбору параметрів матиме два резонансні піки власних частот системи $\Omega_{в1}$ та $\Omega_{в2}$. Конструктивно задавшись двома власними частотами $\Omega_{в1}$ та $\Omega_{в2}$ за відомих мас m_1, m_2, m_3 із (4), можна визначити значення жорсткостей c_{12} та c_{23} двох резонансних пружних систем, що і забезпечуватимуть заданий режим роботи системи. Отже, формуючи характеристичне рівняння системи, прирівнявши (4) до нуля та знехтувавши коефіцієнтами в'язкого опору та жорсткістю віброізоляторів, визначаємо значення жорсткості c_{12} через першу власну частоту коливань $\Omega_{в1}$ системи, а через другу $\Omega_{в2}$ – значення жорсткості c_{23}:

$$\underbrace{c_{12} = \frac{m_1\,\omega_{в1}^2\,[\,m_2\,m_3\,\Omega_{в1}^2 - c_{23}\,(m_2 + m_3)\,]}{m_3\,\Omega_{в1}^2\,(m_1 + m_2) - c_{23}\,(m_1 + m_2 + m_3)}; \quad c_{23} = \frac{m_3\,\Omega_{в2}^2\,[m_1\,m_2\,\omega_{в2}^2 - c_{12}\,(m_1 + m_2)]}{m_1\,\Omega_{в2}^2\,(m_2 + m_3) - c_{12}\,(m_1 + m_2 + m_3)}}. \quad (5)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Розв'язуючи як систему (5), вирази для встановлення значень жорсткостей c_{12} та c_{23} набудуть вигляду

$$c_{12_{1,2}} = \frac{(m_2+m_3)\,m_1\,\Omega_{в2}^2\,[(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,\Omega_{в2}^2\,(\Lambda^2-1) \pm C]}{(m_1+m_2+m_3)\left[(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,\Omega_{в2}^2\,(\Lambda^2-1) + (\pm C - 2\,m_1\,m_3\,\Omega_{в2}^2)\right]}; \tag{6}$$

$$c_{23_{1,2}} = \frac{(m_1+m_2+m_3)\;m_2\,\Omega_{в2}^2\,(\Lambda^2-1) \pm C}{2\;(m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3)}, \tag{7}$$

де $\Lambda = \Omega_{в1}/\Omega_{в2}$; $C = \sqrt{(m_1+m_2+m_3)\;m_2\,\Omega_{в2}^4\left[(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,(\Lambda^2-1)^2 - 4\,m_1\,m_3\,\Lambda^2\right]}$. (8)

4. Синтез аналітичних залежностей для встановлення інерційних параметрів коливальних мас та маси дебалансу у тримасових вібраційних машинах з аероінерційним збуренням. Інерційні параметри m_1 та m_2 конструктивно задаються проектантом, а параметр m_3, за уже відомих двох мас, встановлюється з таких міркувань. За заданих двох власних частот $\Omega_{в1}$ та $\Omega_{в2}$ маса m_3 повинна бути такою, щоб система могла існувати. Тобто за відомих двох власних частот $\Omega_{в1}$ та $\Omega_{в2}$ та мас m_1, m_2, m_3 значення жорсткостей c_{12} та c_{23} двох резонансних пружних систем, розрахунок яких проводиться з використанням виразів (6) та (7), після завершення формування системи повинні бути дійсними числами.

Комплексне значення жорсткостей c_{12} та c_{23} може вийти тоді, коли добуток $[(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,(\Lambda^2-1)^2 - 4\,m_1\,m_3\,\Lambda^2]$ у підкореневому виразі (8) для C буде від'ємним. А тому перше критичне значення маси m_3 визначаємо з умови:

$$(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,(\Lambda^2-1)^2 - 4\,m_1\,m_3\,\Lambda^2 = 0, \tag{9}$$

яка встановлює її верхнє граничне значення. Використовуючи (9), інерційний параметр маси m_3 повинен визначатись згідно з нерівністю:

$$m_3 < \frac{-m_2\;(m_1+m_2)\;(1-\Lambda^2)^2}{m_2\;(1-\Lambda^2)^2 - 4\;m_1\,\Lambda^2}. \tag{10}$$

Від'ємне значення жорсткостей c_{12} та c_{23} може вийти тоді, коли добуток $[(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,\Omega_{в2}^2\,(\Lambda^2-1) + (\pm C - 2\,m_1\,m_3\,\Omega_{в2}^2)]$ у знаменнику виразу (6) для c_{12} буде від'ємним. Тому друге критичне значення маси m_3 визначаємо з умови:

$$(m_1+m_2+m_3)\,m_2\,\Omega_{в2}^2\,(\Lambda^2-1) + (\pm C - 2\,m_1\,m_3\,\Omega_{в2}^2) = 0, \tag{11}$$

яка встановлює її нижнє граничне значення. Враховуючи (11) та вирази (8), отримаємо:

$$m_3 > 0. \tag{12}$$

Отже, за відомих двох власних частот $\Omega_{в1}$ та $\Omega_{в2}$ та двох мас m_1 m_2 інерційне значення реактивної маси m_3, враховуючи (10) та (12), встановлюється за такою залежністю:

$$0 < m_3 < \frac{-m_2\;(m_1+m_2)\;(1-\Lambda^2)^2}{m_2\;(1-\Lambda^2)^2 - 4\;m_1\,\Lambda^2}. \tag{13}$$

Незрівноважену масу дебалансу m_d визначаємо з першого рівняння виразів (3), вважаючи, що крильчатка із жорстко закріпленим до неї дебалансом на радіусі r вийшла на номінальну частоту обертання у дорезонансному режимі стосовно одного з власних піків системи. Так, оперуючи наперед заданою (технологічно необхідною) амплітудою коливань X_1 активної маси

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

(робочого органа) m_1 та враховуючи, що амплітудне значення інерційного збурювального зусилля визначається як $F_{ін} = m_d\, r\, \omega^2$, вираз для встановлення інерційного значення незрівноваженої маси дебалансу m_d набуде такого вигляду:

$$m_d = \left| \frac{X_1}{r} \left[\frac{1}{c_{12}\, c_{23}} \begin{pmatrix} -\Omega^4\, m_1\, m_2\, m_3 + \Omega^2 \left(c_{12}\, m_3\, (m_1 + m_2) + c_{23}\, m_1\, (m_2 + m_3) + c_{із}\, m_2\, m_3 \right) - \\ -c_{12}\, (c_{23}\, (m_1 + m_2 + m_3) + c_{із}\, m_3) - c_{23}\, c_{із}\, (m_2 + m_3) \end{pmatrix} + \frac{c_{із}}{\Omega^2} \right] \right|. \quad (14)$$

Вираз (14) взято за модулем, оскільки амплітудне значення маси на АЧХ може приймати від'ємне значення.

5. Встановлення необхідного значення моменту збурення. Використовуючи теорію вібраційної механіки І. І. Блєхмана [7], введемо поняття вібраційного моменту. Якщо розглядати динаміку обертового руху дебалансу m_d на платформі, встановленій на фундамент через пружну систему (одномасова система, якщо не враховувати масу дебалансу), то рівняння балансу руху незрівноваженої маси m_d матиме вигляд

$$J\, \ddot{\varphi} = M\,(\omega) - R\,(\omega) + V\,(\omega)\,, \quad (15)$$

де $M\,(\omega)$ – момент збурення; $R\,(\omega)$ – момент опору обертання; $V\,(\omega)$ – вібраційний момент. Для нашого випадку момент збурення M, що є функцією швидкості обертання крильчатки $\dot{\varphi}$ (рис. 3), можна записати у вигляді лінійної залежності:

$$M\,(\omega) = M_0 - a\, \dot{\varphi}\,, \quad (16)$$

де M_0 – значення моменту збурення M за нерухомої крильчатки (коли $\dot{\varphi} = 0$); $a = \tan\beta$; β – кут нахилу лінійної залежності $M\,(\dot{\varphi})$ стосовно осі абсцис. Вважатимемо, що за зміни інтенсивності повітряного потоку Ψ, лінійна залежність $M\,(\dot{\varphi})$ переміщається паралельно по відношенню до себе. Справді, зі зростанням швидкості обертання крильчатки $\dot{\varphi}$ відносна швидкість потоків повітря Ψ стосовно її поверхней лопатей падає, питомий тиск повітря на лопаті зменшується, а тому значення моменту збурення також зменшується.

Момент опору вважатимемо пропорційним до швидкості обертання крильчатки, а тому

$$R\,(\omega) = \mu\, \dot{\varphi}\,, \quad (17)$$

де μ – коефіцієнт, що відображає в'язке тертя під час обертання крильчатки. Вібраційний момент $V\,(\omega)$ згідно з [7] має такий аналітичний запис, поширений на наш випадок:

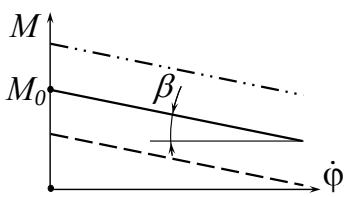


Рис. 3. Характеристика моменту збурення M крильчатки залежно від її швидкості обертання $\dot{\varphi}$

$$V\,(\omega) = -\frac{1}{2}\, \underbrace{m_d\, r\, \omega^2}_{\text{Сила, Н}}\, \underbrace{\frac{m_d\, r}{m_3}}_{\text{Плече, м}}\, \underbrace{\lambda_3}_{\text{Коефіцієнт динамічності}}\, \sin \frac{\mu_{23}\, \lambda_3}{m_3\, \omega}. \quad (18)$$

Формулу (18) можна подати і в іншому вигляді:

$$V\,(\omega) = -\frac{1}{2}\, \underbrace{\frac{m_d\, r\, \omega\, \mu_{23}}{m_3}}_{\text{Сила, Н}}\, \underbrace{\frac{m_d\, r}{m_3}}_{\text{Плече, м}}\, \underbrace{\lambda_3^2}_{\text{Квадрат коефіцієнта динамічності}}, \quad (19)$$

де λ_3 – коефіцієнт динамічності маси m_3, який шукатимемо у вигляді

$$\lambda_3(\omega) = \frac{x_3\,(\omega)\, m_3\, \omega^2}{F_{ін}\,(\omega)}. \quad (20)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

У нашому випадку, використовуючи третій вираз з (3), залежність (20) набуде такого вигляду:

$$\lambda_3(\omega) = \left| \frac{k_{12}(\omega)k_{21}(\omega) - k_{11}(\omega)k_{22}(\omega)}{\left[k_{12}(\omega)k_{21}(\omega)k_{33}(\omega) - k_{11}(\omega)k_{22}(\omega)k_{33}(\omega) + k_{11}(\omega)k_{23}(\omega)k_{32}(\omega)\right]} \times m_3\,\omega^2 \right| . \quad (21)$$

Вираз (21), як і (14), взято за модулем, оскільки амплітудне значення маси на АЧХ може приймати від'ємне значення.

Якщо прийняти умову, що крильчатка вийшла на номінальний режим обертання, то можна записати: $J\ddot{\varphi} \approx 0$. У такому випадку з формули (15), враховуючи (16)–(18) та (21), необхідний момент збурення M_ω для приведення в рух крильчатки на номінальній частоті ω визначатиметься як

$$M_\omega = \frac{1}{2}\,\frac{m_d^2\ r^2\,\omega^2\,\lambda_3}{m_3}\,\sin\frac{\mu_{23}\,\lambda_3}{m_3\,\omega} + (\mu + a)\ \omega\,, \quad (22)$$

або ж, використовуючи (19) замість (18):

$$M_\omega = \frac{1}{2}\,\frac{m_d^2\ r^2\,\omega\,\lambda_3^2\ \mu_{23}}{m_3^2} + (\mu + a)\,\omega\,. \quad (23)$$

Якщо не вважати, що $J\ddot{\varphi} \approx 0$, як і є насправді в реальних системах, особливо, коли робоча частота коливань вібраційної машини, вона ж і частота обертання крильчатки, дуже близька до власної, необхідний момент збурення M_ω потрібно корегувати так. Відомо, що формула для вібраційного моменту з врахуванням його коливання стосовно середнього рівня має вигляд [6, 7]:

$$V(\omega) = -\frac{1}{2}\,m_d\,r\,\omega^2\,\frac{m_d\,r}{m_3}\,\lambda_3\left[\sin\frac{\mu_{23}\,\lambda_3}{m_3\,\omega} - \sin\,(2\,\omega t + \gamma_x)\right], \quad (24)$$

де $\gamma_x = \dfrac{\mu_{23}\,\lambda_3}{m_3\,\omega}$ – кут, що характеризує відставання переміщення від збурюючої сили, викликаної інерційним віброзбуджувачем, у разі "зависання" частоти на одній з власних частот системи. Як бачимо, доданок $\sin\,(2\,\omega t + \gamma_x)$ змінюється за гармонійним законом. Тому у виразі для M_ω необхідно врахувати його дійсне значення, яке становитиме

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}(\sin\,(2\,\omega t + \gamma_x))^2\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ . \quad (25)$$

Отже, використовуючи (22) з врахуванням (25), що встановлює дійсне значення коливань вібраційного моменту стосовно середнього рівня, вираз, за яким визначається необхідний момент збурення M крильчатки на частоті вимушених коливань Ω, набуде такого вигляду:

$$M = \frac{1}{2}\,\frac{m_d^2\ r^2\,\Omega^2\,\lambda_3}{m_3}\left[\sin\frac{\mu_{23}\,\lambda_3}{m_3\,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + (\mu + a)\ \Omega\,. \quad (26)$$

6. Формування конструктивно-силових параметрів тримасової механічної коливальної системи вібраційної машини з аероінерційним збуренням. Формуючи коливальну систему вібраційної машини з аероінерційним збуренням, підбираємо її параметри з таких міркувань. Власні частоти технологічно задані. Так, перша власна частота коливань системи становить: $\Omega_{в1} = 2\pi \cdot 25\,Гц = 157\ рад/с$, а другу власну частоту коливань системи визначаємо з умови: $\Omega_{в2} = \dfrac{\Omega_{в1}}{\Lambda} = \dfrac{\Omega_{в1}}{(0.8\ldots0.9)} = 157/0.83 = 2\,\pi \cdot 30\,Гц = 189\ рад/с$. Значення першої та другої коливальних мас, які конструктивно задаються, формуємо з умови: $m_1 = (3\ldots5)\,m_2$ і приймаємо такими: $m_1 = 30\ кг$; $m_2 = 7\ кг$, у такому випадку співвідношення мас: $\dfrac{m_1}{m_2} = 4.3$. Інерційне значення третьої маси вибираємо з умови (13), згідно з якою $0 < m_3 < 0.29\ кг$, і приймаємо: $m_3 = 0.2\ кг$.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Значення жорсткостей двох резонансних пружних систем розраховуємо за аналітичними виразами (6) та (7). Дві комбінації жорсткостей становитимуть:

$$\begin{cases} c_{12_1} = 1.5357 \cdot 10^5 \ H/м, \\ c_{23_1} = 6.45 \cdot 10^3 \ H/м; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{12_2} = 1.8813 \cdot 10^5 \ H/м, \\ c_{23_2} = 5.26 \cdot 10^3 \ H/м. \end{cases}$$

Жорсткість віброізоляторів, виконаних з м'якого гумового шланга, становить: $c_{із} = 2 \cdot 10^5 \, H/м$. Приймаючи такі коефіцієнти внутрішнього частотно-незалежного тертя: $\chi_{12} = 0.03 \, м^3 \cdot c$ та $\chi_{23} = 0.003 \, м^3 \cdot c$, коефіцієнти в'язкого тертя, що відображають розсіювання енергії в двох резонансних пружних системах:

– для першої комбінації жорсткостей: $\mu_{12} = \dfrac{\chi_{12} \, c_{12}}{\Omega} = 30 \ H \cdot c/м$; $\mu_{23} = \dfrac{\chi_{23} \, c_{23}}{\Omega} = 0.13 \ H \cdot c/м$;

– для другої комбінації жорсткостей: $\mu_{12} = \dfrac{\chi_{12} \, c_{12}}{\Omega} = 37 \ H \cdot c/м$; $\mu_{23} = \dfrac{\chi_{23} \, c_{23}}{\Omega} = 0.11 \ H \cdot c/м$.

Покладаємо, що коефіцієнт μ_1, який описує зовнішній в'язкий опір руху маси m_1 і викликаний впливом маси середовища завантаження m_c та в'язким тертям у віброізоляційних пружних елементах жорсткістю $c_{із}$, становить: $\mu_1 = 100 \ H \cdot c/м$. Коефіцієнт μ, що відображає в'язке тертя під час обертання крильчатки, становить: $\mu = 3 \cdot 10^{-5} \dfrac{H \cdot м \cdot c}{рад}$. Ексцентриситет (радіус розташування) дебалансу стосовно осі симетрії крильчатки: $r = 0.033 \, м$. Момент інерції крильчатки: $J_b = 5 \cdot 10^{-6} \, кг \cdot м^2$. Момент інерції крильчатки з жорстко закріпленою незрівноваженою масою m_d на радіусі розташування r: $J = J_b + m_d \, r^2 = 1.8 \cdot 10^{-5} \, кг \cdot м^2$.

Кут кидання: $\gamma = 0.3 \ рад$. На цьому етапі покладаємо, що значення незрівноваженої маси становить $m_d = 12 \cdot 10^{-3} \ кг$. Амплітуда коливань активної маси $X_1 = 0.00085 \, м$ – еквівалент $2g$, адже у такому випадку перевантаження становитиме $\xi = \dfrac{X_1 \Omega^2}{g} = 2$. Необхідний збурювальний момент, що прикладається до крильчатки, та точне значення маси дебалансу встановимо після того, як визначимось, за якої комбінації жорсткостей формувати коливальну систему вібраційної машини.

7. Побудова АЧХ та встановлення раціональної конфігурації жорсткісних параметрів тримасової системи. Формування решти параметрів. Підставляючи вищенаведені параметри системи у вирази (3), отримаємо залежності на рис. 4, з яких спостерігатимемо два можливі випадки, пов'язані з наявністю двох комбінацій жорсткостей. Перша комбінація параметрів дає потужніший другий власний пік системи, а друга – потужніший перший власний пік. Необхідно встановити, яка АЧХ є найдоцільнішою для використання у вібраційних машинах з аероінерційним збуренням та на якому режимі (дорезонансному стосовно першої власної частоти коливань чи дорезонансному стосовно другої власної частоти коливань (він же є і міжрезонансний)) необхідно працювати.

Реалізація системи за першою комбінацією жорсткостей (рис. 4, а) передбачає можливість використання міжрезонансного режиму роботи, застосування якого у нашому випадку із інерційним приводом, збуреним від повітряних потоків, може бути ускладненим. Те саме явище Зоммерфельда [12] може впливати на стійкість коливань мас та обертання крильчатки або ж взагалі унеможливити входження крильчатки з прикріпленою незрівноваженою масою у міжрезонансну зону. З іншого боку, якщо ми не можемо досягнути другої власної частоти коливань з різних причин, завжди можемо використати дорезонансний режим роботи стосовно першої власної частоти коливань системи, де, як і передбачалось, крильчатка "зависатиме" на першому резонансному піку. У будь-якому випадку використання лівої гілки першої резонансної кривої зумовлюватиме порівняно стійке обертання дебалансу [5, 11].

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

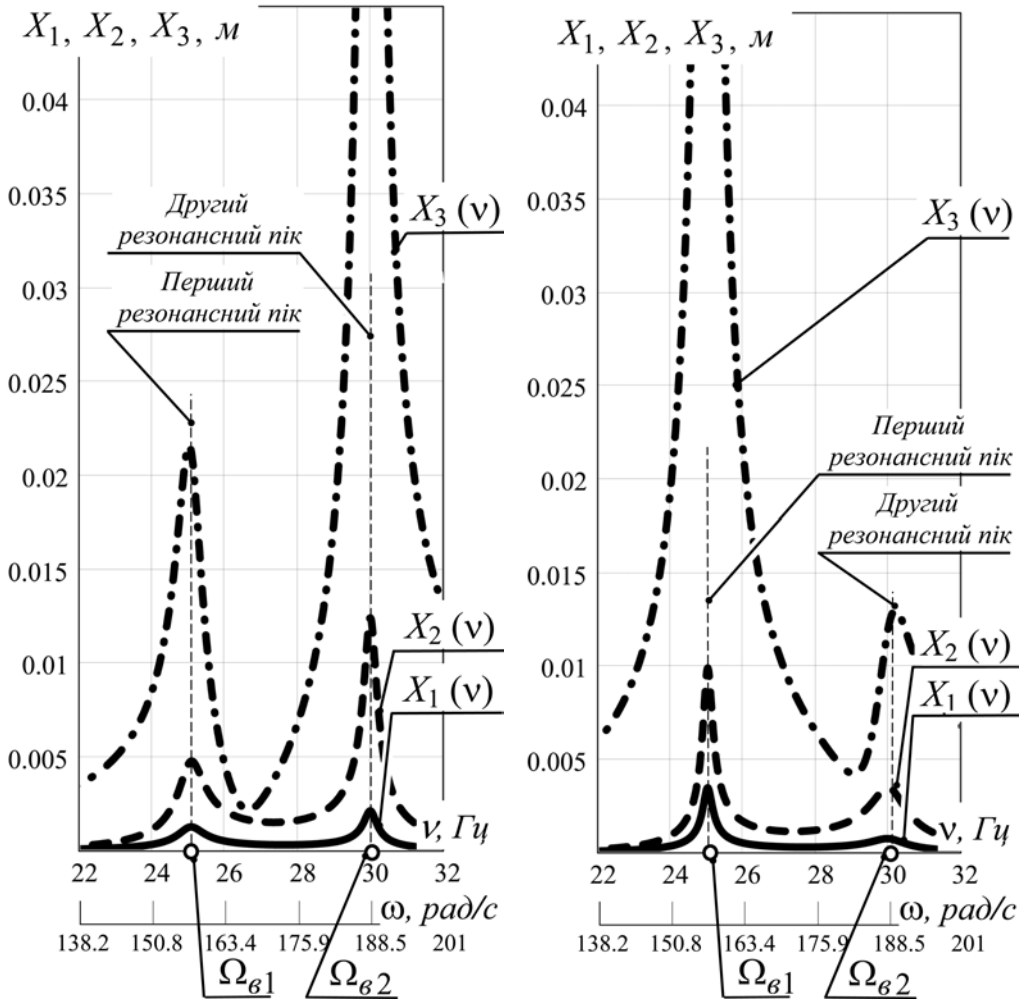


Рис. 4. Можливі АЧХ тримасової механічної коливальної структури для двох комбінацій жорсткостей резонансних пружних систем

У такому випадку передбачається, що умовне “фіксування” частоти обертання дебалансу здійснюватиметься його “зависанням” в дорезонансному режимі стосовно першої власної частоти тримасової механічної коливальної системи, де вібраційний момент [7] на валу дебалансного віброзбуджувача буде вищим за збурювальний момент, який генеруватиметься крильчаткою. Тоді дебаланс, не маючи необхідного моменту збурення для переходу через резонанс, “зависне” на певній частоті обертання у дорезонансному режимі.

АЧХ на рис. 4, б, побудована з використанням другої комбінації жорсткостей, унеможливлює входження крильчатки у міжрезонансну зону, адже другий пік є значно меншим. Здавалось би, використання дорезонансного режиму роботи стосовно потужного першого піка є вигідним. Проте для забезпечення необхідної амплітуди коливань потрібно в 3 рази більший збурювальний момент. Крім того, амплітуда коливань третьої маси до 3 разів більша порівняно з попереднім випадком. Отже, зупиняємось на характеристиці, зображеній на рис. 4, а, з дорезонансним режимом роботи стосовно першої власної частоти коливань системи. Приймаючи, що резонансне налагодження стосовно першої власної частоти коливань системи $z = 0.98$, частота вимушених коливань становить: $\Omega = \Omega_{в1} \cdot z = 157 \cdot 0.98 = 2\pi \cdot 24.5\,Гц = 154\ рад/с$.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Значення незрівноваженої маси, поклавши, що технологічно необхідне значення амплітуди коливань активної маси $X_1 = 0.00085\ м$ згідно з (14) становить $m_d = 12 \cdot 10^{-3}\ кг$. Необхідний збурювальний момент, що прикладається до крильчатки згідно з (26), становитиме $M = 0.05\ H \cdot м$.

8. Математична модель тримасової вібраційної машини з аероінерційним збуренням у вигляді автономної системи диференціальних рівнянь. Коливальна система (рис. 1) має п'ять ступенів рухомості, а саме: рух трьох мас за координатами x_1, x_2, x_3, обертання крильчатки на кут φ та поворот системи на кут α. Саме ці координати виберемо як узагальнені. Для формування диференціальних рівнянь, що описують цю механічну коливальну систему, використаємо узагальнені рівняння руху Лагранжа II роду, які загалом матимуть вигляд:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \mathrm{Q}_{q_i}, \tag{27}$$

де T, Π, Φ, Q_{q_i} – відповідно кінетична і потенціальна енергії, функція розсіювання енергії в системі (дисипативна функція Релея) та узагальнені збурювальні зусилля за лінійними координатами x_i і кутами повороту φ та α. Зупинимось на найскладнішій ділянці цієї моделі, а саме: на визначенні кінетичної енергії маси m_3 та узагальненого збурювального зусилля, що прикладається до неї. Кінетична енергія T_3 маси m_3 формуватиметься з трьох складових:

$$\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_p + \mathrm{T}_b + \mathrm{T}_d, \tag{28}$$

де $\mathrm{T}_p, \mathrm{T}_b, \mathrm{T}_d$ – кінетичні енергії відповідно реактивної маси m_p, маси крильчатки m_b та маси дебалансу m_d. Реактивна маса здійснює коливальний рух за лінійною координатою x_3 та обертальний рух за кутом повороту α, а тому:

$$\mathrm{T}_p = \frac{m_p \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J_p \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_p (H_3 \dot{\alpha})^2}{2}. \tag{29}$$

Крильчатка здійснює коливальний рух за лінійною координатою x_3 та обертальний рух за кутами повороту φ та α, а тому

$$\mathrm{T}_b = \frac{m_b \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J_b \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_b \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_b (H_3 \dot{\alpha})^2}{2}. \tag{30}$$

Маса дебалансу m_d здійснює складний рух, викликаний обертанням на радіусі r по координаті φ навколо осі симетрії крильчатки з одночасним здійсненням коливального руху за координатою x_3 та α (рис. 5). Спочатку знайдемо складові по координатних осях вектора сумарного переміщення R маси дебалансу в просторі. Враховуючи, що кут α провертання системи є малим, вважатимемо правомірними такі вирази: $\cos\alpha \approx 1$, а $\sin\alpha \approx \alpha$. З врахуванням сказаного, проекція вектора переміщення маси дебалансу на вісь x дорівнює:

$$x_d = x_3 + r\cos\varphi. \tag{31}$$

На вісь y:

$$y_d = H_3\alpha - r\sin\varphi. \tag{32}$$

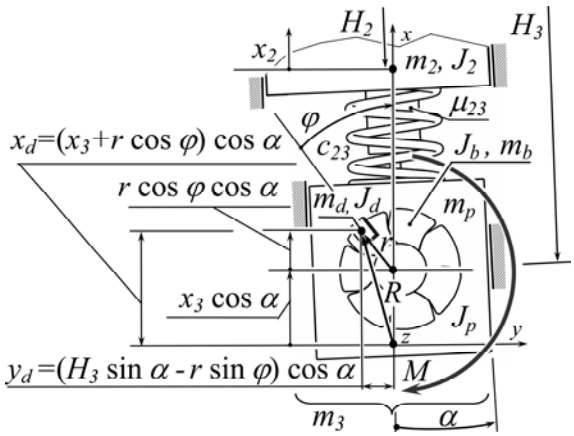


Рис. 5. Проекційний вигляд зверху на масу m_3

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Диференціюючи вирази (31) та (32) за часом t, проекції вектора сумарної швидкості маси дебалансу по осях x та y матимуть вигляд:

$$\dot{x}_d = \dot{x}_3 - r\,\dot{\varphi}\sin\varphi\,; \tag{33}$$

$$\dot{y}_d = H_3\,\dot{\alpha} - r\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,. \tag{34}$$

Квадрат сумарного вектора швидкості маси дебалансу m_d, використовуючи (33) та (34), становитиме

$$\dot{R}^2 = \dot{x}_3^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 - 2\,\dot{x}_3\,r\,\dot{\varphi}\sin\varphi + H_3^2\,\dot{\alpha}^2 - 2\,H_3\,\dot{\alpha}\,r\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,. \tag{35}$$

У такому випадку кінетична енергія маси дебалансу, враховуючи (35), набуде вигляду:

$$\mathrm{T}_d = \frac{m_d\,\dot{R}^2}{2} + \frac{J_d\,\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{J_d\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_d\,(\dot{x}_3^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 - 2\,\dot{x}_3\,r\,\dot{\varphi}\sin\varphi + H_3^2\,\dot{\alpha}^2 - 2\,H_3\,\dot{\alpha}\,r\,\dot{\varphi}\cos\varphi)}{2}\,. \tag{36}$$

Підставляючи в (28) вирази (29), (30) та (36) для кінетичних енергій складових маси m_3, отримаємо її кінетичну енергію T_3:

$$\mathrm{T}_3 = \frac{(m_p + m_b + m_d)\,\dot{x}_3^2}{2} + \frac{(J_b + m_d\,r^2)\,\dot{\varphi}^2}{2} - m_d\,r\,\dot{x}_3\,\dot{\varphi}\sin\varphi +$$

$$+\frac{J_p\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_p(H_3\,\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{J_b\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_b(H_3\,\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{J_d\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_d\,(H_3^2\,\dot{\alpha}^2 - 2\,H_3\,\dot{\alpha}\,r\,\dot{\varphi}\cos\varphi)}{2}\,. \tag{37}$$

Увівши такі позначення: $m_3 = m_p + m_b + m_d$, $J = J_b + m_d\,r^2$, $J_3 = J_p + J_b + J_d$, вираз (37) набуде скороченого вигляду:

$$\mathrm{T}_3 = \frac{m_3\,\dot{x}_3^2}{2} + \frac{J\,\dot{\varphi}^2}{2} - m_d\,r\,\dot{x}_3\,\dot{\varphi}\sin\varphi - m_d H_3\,\dot{\alpha}\,r\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{J_3\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_3\,H_3^2\,\dot{\alpha}^2}{2}\,. \tag{38}$$

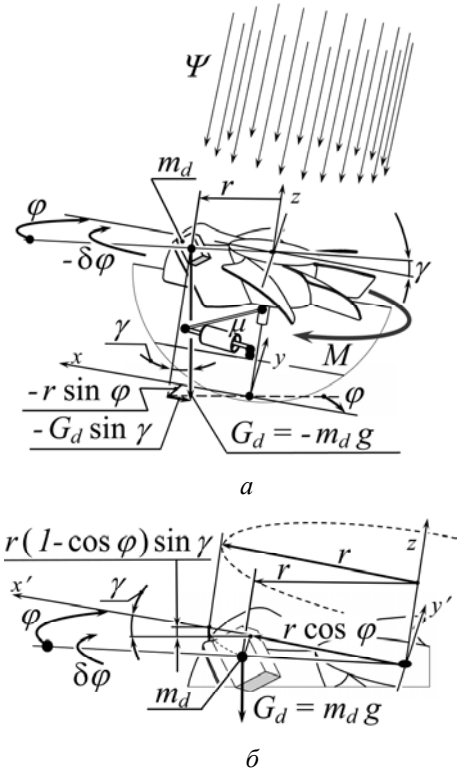


Рис. 6. Розрахункова схема для встановлення значення узагальненої сили за координатою φ

Тепер встановимо значення узагальненої сили Q_φ за координатою φ. Активними зусиллями, що діють на крильчатку, є сила ваги $G_d = m_d\,g$ незрівноваженої маси дебалансу та момент збурення M, спричинений дією потоків повітря Ψ (рис. 6, а). Аналітичний вираз, що описує закон зміни моменту збурення M крильчатки залежно від її швидкості обертання $\dot{\varphi}$, наведено в (16).

Проекція сили ваги G_d на вісь x, що записується як $-\,m_d\,g\sin\gamma$, діючи на плечі $r\sin\varphi$, утворюватиме момент:

$$M_g = m_d\,r\,g\sin\gamma\sin\varphi\,, \tag{39}$$

де γ – кут нахилу площини обертання крильчатки до горизонту (він же і кут кидання, кут нахилу пружних елементів стосовно вертикалі). Надамо обертальному руху крильчатки віртуальне переміщення $-\delta\varphi$ за годинниковою стрілкою у напрямку дії моменту збурення M (рис. 6, а). Тоді робота сил на віртуальному переміщенні $-\delta\varphi$, беручи до уваги вирази (16) та (39), набуде вигляду:

$$\delta A = (m_d\,r\,g\sin\gamma\sin\varphi - M_0 + a\,\dot{\varphi})(-\delta\varphi) =$$

$$= (M_0 - a\,\dot{\varphi} - m_d\,r\,g\sin\gamma\sin\varphi)\,\delta\varphi\,. \tag{40}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Узагальненою силою є коефіцієнт, що стоїть при $\delta\varphi$ у виразі (40), а тому

$$Q_\varphi = M_0 - a\,\dot{\varphi} - m_d\, r\, g \sin\gamma \sin\varphi\,. \tag{41}$$

Вище ми прийняли, що сила ваги маси дебалансу $G_d = m_d\, g$ неконсервативна, а є зовнішнім активним зусиллям, що діє на крильчатку. Якщо зарахувати силу ваги до потенціальних, як воно і є в реальності, то останній доданок у формулі (41) можна визначити за залежністю $-\dfrac{\partial \Pi_d}{\partial \varphi}$. Так, під час переміщення маси дебалансу з фіксованого положення, як показано на рис. 6, б, до збігу з віссю x, потенціальна енергія дорівнюватиме роботі сил ваги. Отже:

$$\Pi_d = m_d\, g\, h = m_d\, g\, r\,(1-\cos\varphi)\,\sin\gamma\,. \tag{42}$$

У такому випадку, диференціюючи (42) по φ:

$$-\frac{\partial \Pi_d}{\partial \varphi} = -m_d\, r\, g \sin\gamma \sin\varphi\,. \tag{43}$$

Як бачимо, в (43) отримано ідентичний доданок, як і в (41).

Перейдемо до визначення кінетичних енергій мас m_1 та m_2. Ці маси здійснюють прямолінійний коливальний рух, а тому їх сумарна кінетична енергія становить

$$T_{1,\,2} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{(J_1 + J_2)\,\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{(m_1 H_1^2 + m_2 H_2^2)\,\dot{\alpha}^2}{2}\,. \tag{44}$$

Вираз, за яким встановлюється сумарна кінетична енергія системи, сумуючи (38) та (44) та враховуючи, що $J_1 + J_2 + J_3 + m_1 H_1^2 + m_2 H_2^2 + m_3 H_3^2 = J_u$, набуде вигляду:

$$\mathrm{T} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3\, \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J\,\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_u\,\dot{\alpha}^2}{2} - m_d\, r\, \dot{x}_3\, \dot{\varphi} \sin\varphi - m_d H_3\, \dot{\alpha}\, r\, \dot{\varphi} \cos\varphi\,, \tag{45}$$

де J_u – сумарний момент інерції вібраційної установки стосовно вертикальної осі, що проходить через центр мас системи. Потенціальну енергію Π для тримасової механічної коливальної системи знайдемо як суму робіт відновлювальних сил пружності у пружних елементах, а отже:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{12} (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} c_{23} (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} c_{iз} x_1^2 + \frac{1}{2} c_{iз} H_{iз}^2 \alpha^2\,. \tag{46}$$

Дисипативну функцію Φ для системи, вважаючи, що розсіювання енергії пропорційне до швидкості, розраховуємо за таким виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_{23} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \mu\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \mu_1 H_{iз}^2 \dot{\alpha}^2\,. \tag{47}$$

Узагальнені збурювальні зусилля за координатами x_1, x_2, x_3 та α відсутні, а тому

$$Q_{x_1} = Q_{x_2} = Q_{x_3} = Q_\alpha = 0\,. \tag{48}$$

9. Формування диференціальних рівнянь руху механічної коливальної системи на основі узагальнених рівнянь руху Лагранжа II роду. Використовуючи (45), (46) та (47), знаходимо складові системи рівнянь (27):

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_1} = m_1\, \dot{x}_1; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\, \ddot{x}_1; \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_{12}\,(x_1 - x_2); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = \mu_1\, \dot{x}_1 + \mu_{12}\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2);$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_2} = m_2\, \dot{x}_2; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\, \ddot{x}_2; \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_{12}\,(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + c_{iз} x_2;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} = \mu_{12}\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_3);$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \dot{x}_3 - m_d\, r\, \dot{\varphi} \sin\varphi; \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_3} = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3 \ddot{x}_3 - m_d\, r\, \ddot{\varphi} \sin\varphi - m_d\, r\, \dot{\varphi}^2 \cos\varphi; \tag{49}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = c_{23}(x_3 - x_2); \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_3} = \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2); \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\alpha}} = J_u\, \dot{\alpha} - m_d H_3\, \dot{\varphi}\, r \cos\varphi;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\alpha}}\right) = J_u\, \ddot{\alpha} - m_d H_3\, \ddot{\varphi}\, r \cos\varphi + m_d H_3\, r\, \dot{\varphi}^2 \sin\varphi; \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = c_{iз} H_{iз}^2 \alpha; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} = \mu_1 H_{iз}^2 \dot{\alpha}.$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}} = J\, \dot{\varphi} - m_d\, r\, \dot{x}_3 \sin\varphi - m_d H_3\, \dot{\alpha}\, r \cos\varphi;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\, \ddot{\varphi} - m_d\, r\, \ddot{x}_3 \sin\varphi - m_d\, r\, \dot{x}_3\, \dot{\varphi} \cos\varphi - m_d H_3\, \ddot{\alpha}\, r \cos\varphi + m_d H_3\, \dot{\alpha}\, r\, \dot{\varphi} \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi} = -m_d\, r\, \dot{x}_3\, \dot{\varphi} \cos\varphi + m_d H_3\, \dot{\alpha}\, r\, \dot{\varphi} \sin\varphi; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = \mu\, \dot{\varphi}.$$

Перш ніж сформувати рівняння (27), зупинимось на такому нюансі. В околі однієї з власних частот системи, де і відбуватимуться вимушені коливання, зміна кутової швидкості $\dot{\varphi}$ обертання крильчатки незначна. Можна вважати, що збурювальний момент є постійним ($a = 0$) і становить $M(\Omega) = M_0 = M$. З іншого боку, момент, що прикладається до крильчатки зростає поступово упродовж кількох секунд. Миттєве подання збурювального моменту номінального значення здійснити фактично не реально. Тому зміну моменту M під час запуску системи описуватимемо такою емпіричною залежністю:

$$M(t) = M\left(1 - \mathrm{e}^{-1.6t}/1.7\right). \tag{50}$$

Підставивши вирази (49) в рівняння Лагранжа II роду (27) та врахувавши (48) та (50), система п'ятьох диференціальних рівнянь руху, що описує модель інерційної вібраційної машини зі збуренням від повітряних потоків (рис. 1), набуде вигляду:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + c_{iз} x_1 + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 - m_d\, r\, (\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) + c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = 0; \\ J_u\, \ddot{\alpha} + m_d H_3\, r\, (\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi) + c_{iз} H_{iз}^2 \alpha + \mu_1 H_{iз}^2 \dot{\alpha} = 0; \\ J\, \ddot{\varphi} - m_d\, r \sin\varphi\, (\ddot{x}_3 - g \sin\gamma) - m_d\, r \cos\varphi\, H_3\, \ddot{\alpha} = M\left(1 - \mathrm{e}^{-1.6t}/1.7\right) - \mu\, \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{51}$$

10. Подання системи диференціальних рівнянь руху у нормальному вигляді стосовно старших похідних для числового розрахунку у програмному продукті MathCAD. Як бачимо, в нелінійні диференціальні рівняння системи (51) час t не входить у явному вигляді. Ці рівняння описують рух автономної системи ланцюгового типу. Попередньо не розв'язавши їх, закон зміни у часі кута повороту φ крильчатки встановити неможливо. Загальний наближений підхід для аналітичного розв'язку системи (51) шляхом введення малих параметрів та використання методу Крилова–Боголюбова, окреслений в [5, 10] є надто складним. Тому в роботі обмежимось числовим розрахунком з використанням методу Рунге–Кутта з адаптивним кроком. Для цього систему (51) подамо у нормальному вигляді стосовно старших похідних, а саме: перепишемо її, виокремивши прискорення по кожній узагальненій координаті. У такому випадку отримаємо:

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 = \dfrac{c_{12}(x_1 - x_2) + c_{iз} x_1 + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{-m_1}; \\[2ex]
\ddot{x}_2 = \dfrac{c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)}{-m_2}; \\[2ex]
\ddot{x}_3 = \dfrac{\left[\begin{array}{c} m_d^3\ r^3 \dot{\varphi}^2 H_3^2 \cos\varphi + (c_{iз}\,\alpha + \mu_1 \dot{\alpha}) H_{iз}^2 m_d^2\ r^2 H_3 \cos\varphi \sin\varphi + J_u\, m_d^2\ r^2\, g\ \sin^2\varphi\ \sin\gamma + \\ + m_d\ r\ J_u \left[\left(\mu\ \dot{\varphi} - M\left(1 - \dfrac{e^{-1.6t}}{1.7}\right)\right)\sin\varphi - J\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\right] + \\ + (J \cdot J_u - m_d^2\ r^2\, H_3^2 + \sin\varphi)[c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)] \end{array}\right]}{m_3 m_d^2\, r^2\, H_3^2 (1 - \sin^2\varphi) + J_u m_d^2\ r^2 \sin^2\varphi - J \cdot J_u\, m_3} \\[2ex]
\ddot{\alpha} = \dfrac{\left[\begin{array}{c} -m_d^3\ r^3 \dot{\varphi}^2 H_3 \sin\varphi \cos\varphi + J\, m_3 m_d\ r\, H_3\, \dot{\varphi}^2 \sin\varphi + m_3 m_d\ r\, H_3 \cos\varphi \left(\mu\ \dot{\varphi} - M\left(1 - \dfrac{e^{-1.6t}}{1.7}\right)\right) + \\ + H_3 m_d^2\ r^2 \cos\varphi \sin\varphi [c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + m_3\, g\ \sin\gamma] + \\ + H_{iз}^2 (J\, m_3 c_{iз} \alpha - m_d^2\ r^2 \sin^2\ \varphi(\mu_1 \dot{\alpha} + c_{iз}\alpha) + J\, m_3\, \mu_1 \dot{\alpha}) \end{array}\right]}{m_3 m_d^2\, r^2\, H_3^2 (1 - \sin^2\varphi) + J_u m_d^2\ r^2 \sin^2\varphi - J \cdot J_u\, m_3} \\[2ex]
\ddot{\varphi} = \dfrac{\left[\begin{array}{c} H_3^2 m_d^2\ r^2 m_3 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \sin\varphi + m_d\, m_3\, r\, H_3 H_{iз}^2 \cos\varphi (c_{iз}\alpha + \mu_1 \dot{\alpha}) + \\ - J_u m_d^2\ r^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + J_u\, m_3 \left(\mu\ \dot{\varphi} - M\left(1 - \dfrac{e^{-1.6t}}{1.7}\right)\right) + \\ J_u m_d\ r \sin\varphi [c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + m_3\, g\ \sin\gamma] \end{array}\right]}{m_3 m_d^2\, r^2\, H_3^2 (1 - \sin^2\varphi) + J_u m_d^2\ r^2 \sin^2\varphi - J \cdot J_u\, m_3}
\end{cases}
\tag{52}
$$

11. Аналіз руху дебалансу та коливальних мас у тримасовій вібраційній машині з аероінерційним збуренням. Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь (52) та використовуючи параметри системи, наведені вище, часові залежності руху коливальних мас та маси дебалансу у перші $4\,c$ після запуску вібраційної машини (рис. 7) свідчать про те, що перехідні процеси тривали близько $3\,c$. Встановлені значення амплітуд коливань трьох мас становлять: $X_1 = 0.00085$ *мм*, $X_2 = 0.0028$ *мм*, $X_3 = 0.018$ *мм*. Рух мас здійснюється за гармонійним законом. Колова частота вимушених коливань: $\Omega = 153$ *рад*$/c$, а резонансне налагодження системи стосовно першого (робочого) резонансного піка $\Omega_{в1} = 154$ *рад*$/c$ (див. п. 6), визначаємо як $z = \Omega / \Omega_{в1} = 0.99$.

Відразу ж після запуску системи незрівноважена маса дебалансу m_d, що розташована на радіусі $r = 0.033$*мм* стосовно осі симетрії крильчатки, починає обертатися по коловій траєкторії з радіусом-вектором $R = r = 0.033$*м* (рис. 8). Радіус-вектор R розташування дебалансу стосовно нерухомої системи координат утримується на значенні 0.033*м* поки кутова швидкість обертання крильчатки не перевищить значення $\dot{\varphi} \approx 70$ *рад*$/c$.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

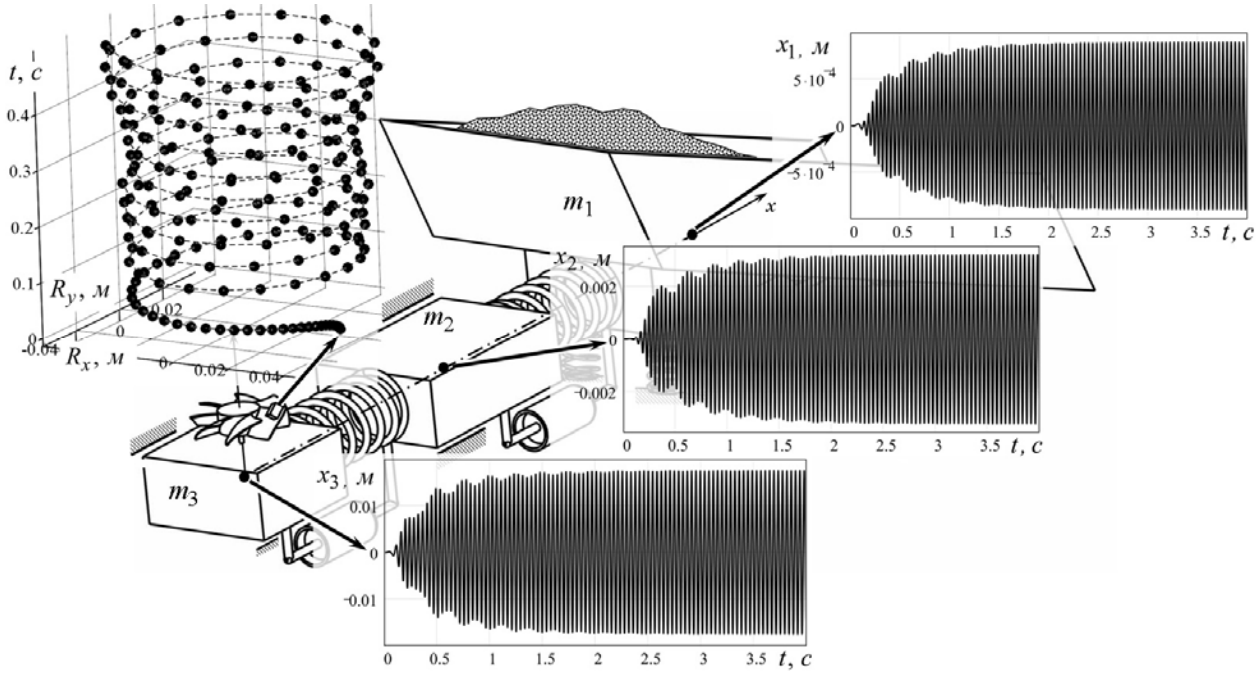


Рис. 7. Часові залежності з прив'язкою до вібраційної машини руху коливальних мас m_1, m_2, m_3 та маси дебалансу m_d в перші 4 с після її запуску (принципову схему вібраційної машини з позначеннями показано на рис. 1)

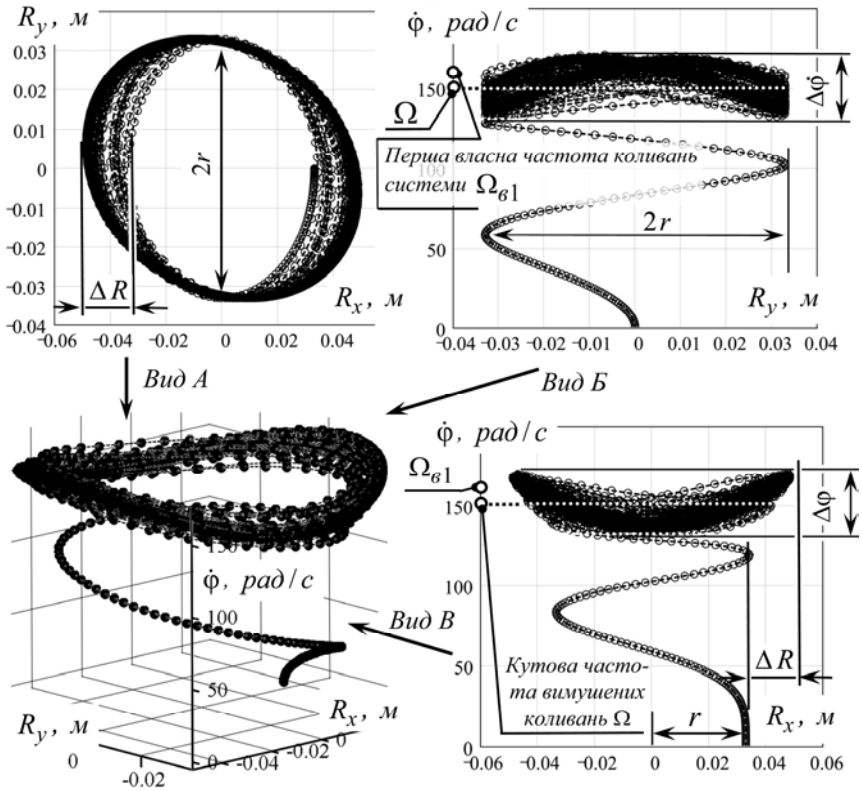
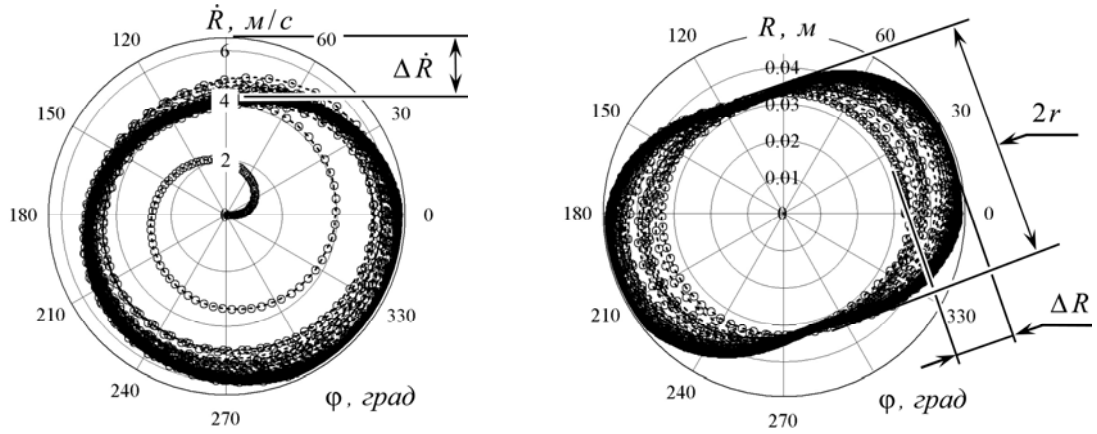


Рис. 8. Зміна кутової швидкості φ̇ обертання крильчатки залежно від проекцій радіуса вектора R розташування маси дебалансу m_d на осі x та у нерухомої системи координат

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

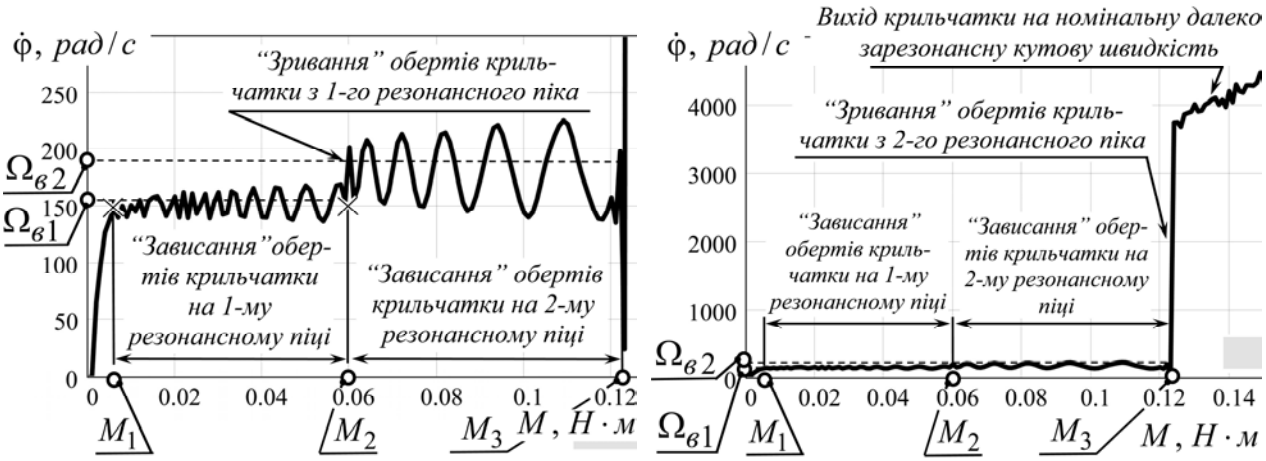
З часом, після проходження близько $3\,c$, радіус-вектор R розташування дебалансу в нерухомій системі координат змінюється у межах $R \in 0.033\ldots0.049\,м$, що пов'язано з накладанням на обертовий рух дебалансу, прикріпленого до крильчатки прямолінійного руху реактивної маси з амплітудою коливань $X_3 = 0.018\,мм$. Кутова швидкість обертання крильчатки "фіксується" зі значенням $\Omega = 153\ рад/c$ в околі першого резонансного піка системи $\Omega_{в1} = 154\ рад/c$. Кутова швидкість обертання крильчатки коливається з величиною $\Delta\dot{\varphi} = 40\ рад/c$. Однак ця зміна фактично не впливає на рух коливальних мас самої системи.

Наочніше в полярних координатах на рис. 9 зображено зміну лінійної швидкості $\dot{R}$ обертання маси дебалансу та радіуса-вектора R його розташування. Як бачимо, лінійна швидкість обертання крильчатки упродовж одного оберту коливається у межах $\dot{R} \in 4\ldots6.2\ м/c$. Радіус-вектор швидкості $\dot{R}$ описує форму равлика Паскаля, а радіус-вектор R – форму овала Касіні. Форми руху для $\dot{R}$ та R розвернуті на певний кут стосовно вертикальної осі, що пов'язано з зсувом фази між поворотом незрівноваженої маси дебалансу m_d та рухом маси m_3.



а *б*

Рис. 9. Залежності радіуса-вектора $\dot{R}$ швидкості руху маси дебалансу m_d (а) та радіуса-вектора R розташування маси дебалансу (б) від кута повороту крильчатки φ стосовно нерухомої системи координат



а *б*

Рис. 10. Залежності швидкості обертання крильчатки від прикладеного до неї збурювального моменту M, спричиненого потоками повітря Ψ
(значення кутової швидкості $\dot{\varphi}$ фіксувались на 4-й с після запуску системи)

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Проаналізуємо, як впливає момент збурення на встановлення власної частоти системи (рис. 10). Цю характеристику можна умовно розбити на три ділянки:

1. У межах моменту збурення $M = 0.004 \ldots 0.06\ H \cdot м$, прикладеного до незбалансованої крильчатки, частота її обертання залишається фактично постійною із середнім встановленим значенням кутової швидкості $\dot{\varphi} \approx \Omega = 150\ рад/с$. По суті, оберти крильчатки "зависають" на 1-му резонансному піку.

2. Зі зростанням моменту збурення, коли $M > 0.06\ H \cdot м$, відбувається "зривання" обертів крильчатки з 1-го резонансного піка. Крильчатка різко набирає оберти, фіксуючись зі значенням $\dot{\varphi} \approx \Omega = 180\ рад/с$, і фактично не змінюється у межах моменту збурення $M = 0.06 \ldots 0.12\ H \cdot м$. Оберти крильчатки "зависли" на 2-му резонансі.

3. З подальшим зростанням моменту збурення відбувається "зривання" обертів крильчатки з 2-го резонансного піка і крильчатка різко набирає оберти до значення $\dot{\varphi} = \omega = 3800\ рад/с$ і далі зростає.

Висновки. Запропоновані аналітичні залежності для встановлення інерційно-жорсткісних параметрів системи та моменту збурення крильчатки дають змогу обґрунтовано синтезувати коливальні системи з аероінерційним збуренням. Робочий режим вібромашини формується як дорезонансний стосовно першого або другого резонансного піка, утворених власними частотами системи.

1. Назаренко І. І. Машини для виробництва будівельних матеріалів: підручник / І. І. Назаренко. – К.: КУНБА, 1999. – 488 с. 2. Вибрации в технике: справочник: в 6-ти т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.).– М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4: Вибрационные процессы и машины / под. ред. Э. Э. Лавендела. – 1981. – 509 с. 3. Кузьо І. В. Формування та аналіз математичної моделі вібраційної машини з аероінерційним збуренням / І. В. Кузьо, О. В. Ланець, В. М. Гурський // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – № 2 (66). – С. 50–58. 4. Кузьо І. В. Вибір структури та обґрунтування силових і жорсткісних параметрів вібраційної машини з аероінерційним збуренням / І. В. Кузьо, О. В. Ланець, Я. В. Шпак // Серія: Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. пр. Полтавського нац. техн. ун-ту ім. Ю. Кондратюка. – 2012. – Вип. 2 (32), Т. 1. – С. 120–131. 5. Вибрации в технике: справочник: в 6-ти т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред).– М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / под. ред. И. И. Блехнана. – М., 1979. – 351 с. 6. Ярошевич М. П. Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом / М. П. Ярошевич, Т. С. Ярошевич. – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с. 7. Блехман И. И. Вибрационная механика / И. И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с. 8. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1976. – 320 с. 9. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1976. – 320 с. 10. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. – М.: Наука, 1964. – 256 с. 11. Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники / И. И. Быховский. – М.: Машиностроение, 1968. – 362 с. 12. Sommerfeld A. Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik // VDI. – 1904. – № 18. – P. 631–636.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua