

через чверть періоду коливань робочого органа. Наведені фрагменти – це спроба “зупинити час” і проілюструвати змодельований процес руху тіла анізотропною поверхнею, що здійснює поздовжні гармонійні коливання. Параметри режиму вібротранспортування на цих фрагментах відповідають наведеним вище.

РЕЗЮМЕ

Розроблена математична модель транспортування тіла анізотропною поверхнею при поздовжніх її гармонійних коливаннях дозволяє моделювати та досліджувати показники руху тіла при різних параметрах режиму вібропереміщення і характеристиках самої поверхні. Це дає змогу досягати оптимальні результати при проведенні науково-дослідних і проектних робіт, з розробки анізотропних лотків для конкретних виробничих потреб, практично без виснажливих і дорогих експериментів. Крім того, процес транспортування можна відтворити віртуально, що дозволяє наочно оцінити майбутній практичний результат.

1. Повідайло В.О., Сорочак О.З., Новіцький Я.М. Вібротранспортування штучних виробів анізотропною поверхнею // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. 1995. Вип.32. С.41–44. 2. А. с. 255829 СССР. Вибрационный конвейер / В.А.Повідайло, В.В.Лопушенко // Бюл. Изобрет. 1969. № 33. 3. А. с. 197436 СССР. Вибрационный двухмассовый конвейер / В.А.Повідайло, С.А.Димаров, В.А.Щигель // Бюл. Изобрет. 1967. № 12.

УДК 539.3

РИМАР О.М.

АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ГЕРЦА

© РИМАР О.М., 2000

The results of the analysis of the known Hertz's problem solution are presented and the peculiarities of this solution are revealed. It is shown that the application of this solution as to approximation is doubtful for the bodies with real dimensions along the z axis.

Незважаючи на бурхливий розвиток новітніх методів розрахунку широкого загалу деталей машин на навантаження, несучу здатність і довговічність, відомий розв'язок задачі Герца до цього часу знаходить широке застосування в цій галузі. В першу чергу це стосується розрахунку підшипників кочення. Розв'язок задачі Герца [1–3] в багатьох випадках є теоретичною основою оптимізації геометричних параметрів підшипників, опор, кінематичних пар тощо, як тільки з'являється необхідність враховувати особливості взаємодії деталей.

У даній роботі наведено підсумки аналізу відомого розв'язку задачі Герца з метою розширення можливостей самого розв'язку.

Розглядаючи задачу про початковий контакт в точці двох тіл (рис.1) подвійної кривизни, Герц [1] одержав рівняння для переміщень w_1 і w_2 довільних точок відносно недеформованих частин тіл.

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) = \delta - z_1 - z_2, \quad (1)$$

де δ – наближення недеформованих частин тіл, $\delta = w_{(0,0)}$; z_1, z_2 – рівняння поверхонь тіл 1 і 2 відповідно в околиці точки 0,

$$z = z_1 + z_2; \quad (2)$$

$$z_1 = f(x_1, y_1), z_2 = f(x_2, y_2), \quad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 – координатні системи тіл.

Розкладаючи рівняння (3) поверхонь тіл в околиці точки 0 в ряд Маклорена, підсумувавши їх (2) і перейшовши до єдиної системи координат x, y , Герц одержав рівняння

$$z = Ax^2 + By^2, \quad (4)$$

де параметри A і B знаходяться за відомою методикою [2, 3].

Проаналізуємо рівняння (4), яке дійсне для будь-яких значень x, y . Для точок на контурі площадки контакту координати:

$$z_{(0,b)} = z_b = Bb^2, \quad (5)$$

$$z_{(a,0)} = z_a = Aa^2, \quad (6)$$

де z_b, z_a – визначають відстань між точками обох тіл з однаковими координатами x, y відповідно, які внаслідок деформації контактують на контурі площадки контакту в площинах приведених параметрів кривизни B і A .

Звідси параметри z_b, z_a по суті задачі є переміщеннями точки початкового контакту відносно точок на кінці малої b і великої a півосей. Назвемо такі переміщення для точок на контурі площадки контакту відносними і позначимо

$${}^1w_{(0,b)} \text{ для точок } x=0, y=b;$$

$${}^1w_{(a,0)} \text{ для точок } x=a, y=0.$$

Очевидно, що

$$\left. \begin{aligned} z_b &= {}^1w_{(0,b)} = w_{(0,0)} - w_{(0,b)}, \\ z_a &= {}^1w_{(a,0)} = w_{(0,0)} - w_{(a,0)}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $w_{(0,0)} = \delta$, $w_{(0,b)}, w_{(a,0)}$ – переміщення точок, що визначаються рівнянням (1).

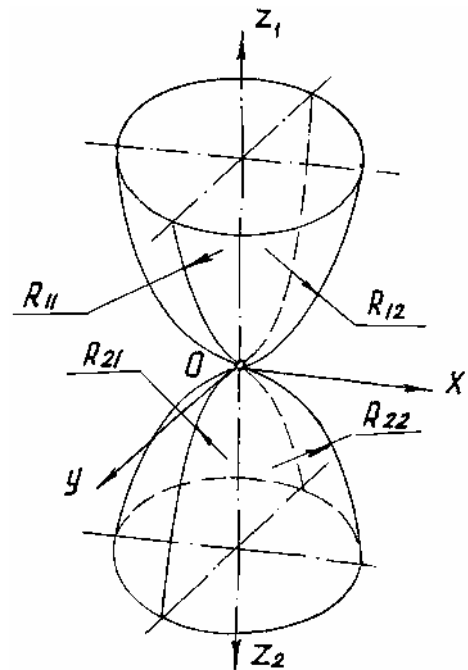


Рис.1. Початковий контакт в точці двох тіл подвійної кривизни.

Отже, рівняння (4) є рівнянням відносних переміщень для точок на контурі площадки контакту і розкриває фізичну суть утворення цієї площадки. Зауважимо, що рівняння (4) не описує поверхні тіл 1,2 і не визначає геометричну лінію перетину цих поверхонь.

Рівняння (1) має відомий [4] розв'язок для переміщень ($z=0$)

$$w_{(x,y)} = \eta p_0 b \left[K(k) - \frac{x^2}{a^2} D(k) - \frac{y^2}{b^2} B(k) \right], \quad (8)$$

де p_0 – тиск для точки $x=0, y=0$,

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \\ D(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \\ B(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (10)$$

E, ν – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона тіл 1,2; k – ексцентриситет еліпса площадки контакту; $K(k), D(k), B(k)$ – повні еліптичні інтеграли [6].

Із рівняння (8), враховуючи тотожності (7), одержимо формули для визначення переміщень $w_{(0,b)}, w_{(a,0)}$ і відносних переміщень $'w_{(0,b)}, 'w_{(a,0)}$

$$\left. \begin{aligned} w_{(a,0)} &= \eta p_0 b B(k) > 0, \\ w_{(0,b)} &= \eta p_0 b D(k) > 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} 'w_{(a,0)} &= \eta p_0 b D(k) = z_a, \\ 'w_{(0,b)} &= \eta p_0 b B(k) = z_b, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

а також формулу для наближення

$$w_{(0,0)} = \delta = \eta p_0 b K(k) \quad (13)$$

і формулу для тиску $p_0 = \frac{bB}{\eta B(k)}$.

Сума відносних переміщень (12)

$$'w_{(0,b)} + 'w_{(a,0)} = z_b + z_a = \delta, \quad (14)$$

тобто наближення δ визначається як сума відносних переміщень для двох точок на кінці малої b і великої a півосей площадки контакту. Підставивши (5), (6) в (14), одержимо:

$$\delta = b^2 B + a^2 A, \quad (15)$$

або, підставивши (12),

$$\delta = b^2 B \frac{K(k)}{B(k)}. \quad (16)$$

Інтеграли (9) можна записати у вигляді неповних інтегралів [6] $F(\varphi, k)$, $B(\varphi, k)$, $D(\varphi, k)$, для яких верхня межа

$$\varphi = \arctg \frac{z}{b} \quad (17)$$

для $z \rightarrow \infty$ набуде значення $\varphi = \pi/2$. Зауважимо, що в такому випадку всі інтеграли (9) є функціями одного коефіцієнта k ($K(k) = F(\pi/2, k)$).

Для $b = \text{const}$, в діапазоні ексцентриситета $0 \leq k \leq 1$, формулу (16) можна записати у вигляді універсальної залежності для одиничного наближення

$$\delta_b = \frac{\delta}{b^2 B} = \frac{K(k)}{B(k)}, \quad (18)$$

яка дійсна для будь-яких значень малої півосі $b = f(P, k) = f(p_0, k)$.

Залежність (18) зображена на рис.2, за графіком якого можна знайти наближення

$$\delta = \delta_b \frac{b^2 B}{n}, \quad (19)$$

де n – коефіцієнт масштабності.

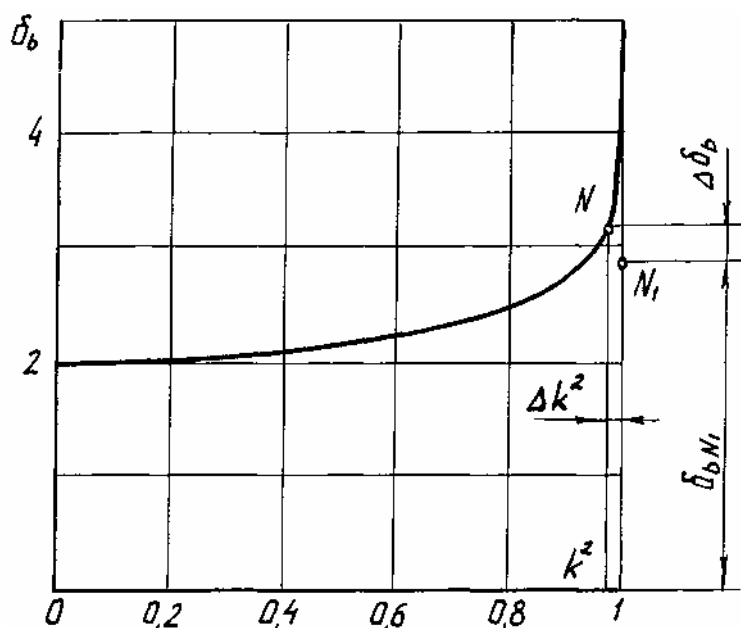


Рис.2. Залежність одиничного наближення від ексцентриситета k^2 .

Проаналізуємо графічну залежність $\delta_b = f(k)$. Для початкового контакту по лінії ($k=1$) проявляється логарифмічна особливість

$$K(k) = \ln \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \infty, \quad \delta = \infty, \quad \delta_b = \infty.$$

Розглядаючи напружений стан елементарного одиничного диска, навантаженого діаметрально з двох сторін, автор роботи [2] одержав формулу для визначення повної

деформації циліндра [2, с.97]

$$\alpha = -\frac{4q(1-\nu^2)}{\pi E} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{2R}{b} \right), \quad (20)$$

з якої наближення осей двох циліндрів із однакових матеріалів

$$\delta = -\frac{2(1-\nu^2)q}{\pi E} \left\{ \frac{2}{3} + \ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} \right\}, \quad (21)$$

де q – погонне навантаження; R – радіус циліндра.

Остання формула дає значення $\delta = f(R_1, R_2)$, де вказані радіуси є координатами z_1, z_2 точок, відносно яких знаходиться наближення точок початкового контакту. Формула (13) для наближення, таким чином, “втратила” координати z_1, z_2 контактуючих тіл, що видно із залежностей (9), (13), (17), (21). Звідси і виникає логарифмічна особливість задачі Герца.

Формулу (21) можна записати як функцію одиничного наближення δ_b для $k=1$, $B(k)=1$

$$\delta_b = \frac{\delta}{b^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} \right), \quad (22)$$

де використана підстановка

$$\frac{\eta q}{\pi} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} q = \frac{b^2 B}{2B(k)},$$

яку легко одержати з формули для визначення півосі b . Знаком (-) в (21) нехтуємо, оскільки він з’являється при визначенні переміщень w через напруження σ (обернена задача) [2].

Повернемося до розгляду рис.2. Візьмемо довільну точку N_l , що визначає величину одиничного наближення δ_b (22) ($k^2=1$) для довільних параметрів $R < \infty$, $b > 0$ в межах пружності. Для точки N_l завжди знайдеться точка N з таким значенням Δk^2 , для якого приріст наближення за формулою (18) $\Delta \delta_b > 0$, тобто для наближень за формулами (18) і (22) виникає нерівність

$$\delta_{bN} > \delta_{bN_l}, \quad (23)$$

якщо $b = \text{const}$, що протирічить суті розв’язку задачі, який для $k^2=1$ визначає $\delta_{b\max}$.

Нерівність (23) ставить під сумнів застосування відомого розв’язку задачі Герца для тіл з реальними координатами z не тільки для ексцентриситета $k=1$, але і для всіх значень $0 \leq k \leq 1$.

ВИСНОВКИ

1. Рівняння (4) є рівнянням відносно переміщень для точок на контурі площадки контакту і описує фізичну суть утворення площадки.
2. Наближення точок двох тіл на безмежності дорівнює сумі відносних переміщень для двох точок на контурі площадки контакту, одна з яких знаходиться на кінці малої, а інша – на кінці великої півосей.
3. Нерівність (23) ставить під сумнів застосування відомого розв’язку задачі Герца для тіл з реальними координатами z .

1. Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper* // *J. reine und angewandte Mathematic*. 1881. 92. S.156–171. 2. Динник А.Н. *Удар и сжатие упругих тел*. К., 1952. Т.1. 151 с. 3. Беляев Н.М. *Труды по теории упругости и пластичности*. М., 1957. 632 с. 4. *Расчеты на прочность в машиностроении* / Под ред. С.Д. Пономарева. М., 1958. Т.2. 975 с. 5. Коровчинский М.В. *Распределение напряжений в окрестности локального контакта упругих тел при одновременном действии нормальных и касательных усилий в контакте* // *Машиноведение*. М., 1967. № 6. С.85–96. 6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции* / Пер. с 6-го перераб. нем. изд. М., 1977. 344 с.

УДК 621.867.52

ВРУБЛЕВСЬКИЙ І.Й., КЕРНИЦЬКИЙ І.С., ШЕНБОР В.С.

КУТОВА ЖОРСТКІСТЬ ДВОМАСОВОГО ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТЕРА-МАНІПУЛЯТОРА З ТРИКОМПОНЕНТНИМИ КОЛИВАННЯМИ

© ВРУБЛЕВСЬКИЙ І.Й., КЕРНИЦЬКИЙ І.С., ШЕНБОР В.С.

Elastic system of two-mass vibratory conveyor-manipulator by independent longitudinal, transversal and vertical vibrations consists of four elastic elements. It accepts the torsion vibration within the linear vibration. The elastic element consists of two flat grating springs that are connected at right angle. The torsion stiffness of the elastic system is investigated.

Вібраційний транспортер-маніпулятор з електромагнітним приводом незалежних трикомпонентних (поздовжніх, поперечних та вертикальних) коливань виконує переміщення виробів на площині по найрізноманітніших траєкторіях завдяки зміні комбінацій параметрів компонент. Пружна система з елементами у вигляді двох взаємно перпендикулярних решітчастих пружин дозволяє використовувати найпростішу двомасову конструкцію [1, 2]. Крім поступальних коливань, робочий орган транспортера-маніпулятора може здійснювати також і кутові коливання відносно осі, перпендикулярної до площини транспортування. Це дозволяє не тільки переміщувати вироби, але й обертати їх відносно будь-якої точки робочої площини. Для того, щоб амплітуда кутових коливань була суттєвою, власна частота кутових коливань маніпулятора повинна бути близькою до резонансної частоти. А власна частота кутових коливань, як відомо, визначається кутовою жорсткістю пружної системи.

Пружну систему транспортера-маніпулятора зобразимо у вигляді чотирьох пружних елементів з горизонтальною жорсткістю c та кутовою жорсткістю k (рис.1, а). Кожен пружний елемент складається з двох плоских решітчастих пружин, встановлених під прямим кутом одна до одної (рис.1, б). Кутову жорсткість пружної системи можна визначити за формулою [3]

$$k_0 = 4k + c(d^2 + t^2), \quad (1)$$