Оцінка фрактальної розмірності послідовності випадкових чисел за їх розподілом

Олександр Дрєєв
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення
Центральноукраїнський технічний університет
Кропивницький, Україна
drey_sanya@ukr.net

Ганна Дрєєва
Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення
Центральноукраїнський технічний університет
Кропивницький, Україна
gannadreeva@gmail.com

Abstract. The problem of determining the fractal dimension of Minkowski method by covering the realization of a number of random numbers by rectangles with known function of probability density density is solved.

Ключові слова: послідовність числова, фрактальна розмірність, розподіл.

Вступ

В задачі комунікаційних технологій в Internet є група задач, які використовують поняття фрактальної розмірності числової послідовності. Зокрема, в задачах керування навантаженням сегменту мережі, або комутації між альтернативними шляхами є необхідним врахування фрактальної природи трафіку. На цій основі розроблено багату теорію, але практичні методи, такі як R/S аналіз визначення коефіцієнту Херста, мають значні похибки. Звідки виникає протиріччя в наявності математичного апарату, який використовує фрактальні властивості інформаційних потоків, але практичні методи не дають надійних інструментів для експериментального визначення досліджуваних величин.

Поставлено задачу визначення фрактальної розмірності Мінковського методом покриття реалізації ряду випадкових чисел прямокутниками [1] з відомою функцією густини розподілу ймовірності.

Вираження розмірності з розподілу

Покриття прямокутниками. За означенням, розмірність Мінковського це є значення наступної межі: $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{-\ln(\varepsilon)}$, де ε є діаметром елементу покриття, та Nε - їх кількість. На практиці геометрично задачу розв'язують покриттям досліджуваної фігури квадратами (кубами), де за діаметр приймається його сторона. В [1] наведено варіант, при якому покриття замінюється прямокутниками шириною ε та висотою, яка є мінімальною для покриття ділянки графічного представлення числового ряду (див. рисунок).

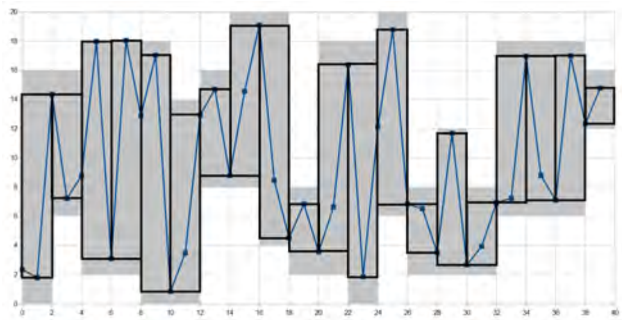

Рисунок. Покриття квадратами та прямокутниками

В цьому випадку кількість фігур покриття замінюється площею покриття $S(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\varepsilon-1} h_i$, де h_i є висотою відповідного прямокутника.

Якщо прийняти ε>1 за кількість дискретних відліків числового ряду y_k, який досліджується, тоді h_i шукається за наступним алгоритмом:

$$h_i = max(y_k) - min(y_k),\ k = i\varepsilon,...,(i+1)\varepsilon - 1.$$

Вираження розмірності через покриття прямокутниками. Для похилої прямої, покриття зі зменшенням ε в 2 рази зменшує площу теж в два рази, це відповідає розмірності D=1. Для фігури, яка покриває площину (наприклад, крива Гільберта або Піано), при змінах ε значення площі не змінюється, це відповідає фрактальній розмірності площини D=2. Тому фрактальна розмірність виражається через площі покриття [2, 3]:

$$D = 2 - \log_\gamma\left(S(\varepsilon\cdot\gamma)/S(\varepsilon)\right).$$

Вираження розмірності через математичне сподівання висоти прямокутників. Для значної кількості відліків числової послідовності N, доступна заміна висот прямокутників покриття hi на їх математичне сподівання $M(h_i)$ або M(ε), бо математичне очікування висоти прямокутника залежить від кількості відліків на розбиття. Однак, пошук математичного сподівання для кожного розбиття окремо, рівноцінно прямому рахуванню площі покриття. Тому авторами обрано шлях отримання M(ε) з початкової множини виміряних значень y_k, з якої отримується оцінка розподілу густини ймовірності p(y). Перевагою такого методу є те, що часто відома інформація про джерело послідовності чисел, і завдяки цьому відомо теоретичний розподіл ймовірності, для якого за відомим рядом уточнюють параметри. Така послідовність дій дає змогу отримати значно точніше форму розподілу ймовірності, ніж її побудова за експериментальними даними без додаткової інформації.

Використання математичних сподівань дало змогу представити фрактальну розмірність наступним виразом:

$$D = 2 - \log_\gamma\left(M(\varepsilon\cdot\gamma)/M(\varepsilon)\right).$$

Отримано вираз до визначення розподілу реалізацій висоти прямокутника за N реалізацій випадкової величини, яку було розкладено на покриття прямокутниками по ε=N/n відліків в кожному:

$$M_\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon-1)\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\left[\int_0^{\infty}\phi\, p(y-\phi)\left[\int_{y-\phi}^{y} p(\tau)d\tau\right]^{\varepsilon-2} d\phi\right]dy$$

З представленого виразу можна отримати дискретний аналог з використанням сум. З знайденого математичного сподівання висоти прямокутників покриття M_ε, можна отримати теоретичне значення фрактальної розмірності при покритті m та n відліків випадкової послідовності:

$$D = 2 - \log_{m/n}\frac{m(m-1)\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\left[\int_0^{\infty}\phi\, p(y-\phi)\left[\int_{y-\phi}^{y} p(\tau)d\tau\right]^{m-2} d\phi\right]dy}{n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\left[\int_0^{\infty}\phi\, p(y-\phi)\left[\int_{y-\phi}^{y} p(\tau)d\tau\right]^{n-2} d\phi\right]dy}$$

Висновки. Отриманий вираз дозволяє розраховувати теоретичну фрактальну розмірність реалізацій числових послідовностей на основі їх функції розподілу щільності ймовірності.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН , Серия Прикладная и компьютерная математика. – 2004. – Т. 3. – № 1. – С. 30–44.

[2] Zmeškal Oldřich, Nežádal Martin, Komendová Barbora, Julínek Martin, Bžatek Tomáš FRACTAL ANALYSIS OF PRINTED STRUCTURE IMAGES // Institute of Physical and Applied Chemistry, of the methods used to perform analysis listed above. Brno University of Technology, Brno, Czech Republic

[3] Мандельброт Б Фрактальная геометрия природы// Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.