

## МНОГОСЛОЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СТРУКТУРНОЙ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

При отсутствии априорных данных о геологическом строении участка исследований структурная нелинейная обратная задача (ОЗ) является некорректной, а ее решение неоднозначное, физически несодержательное или трудно интерпретируемое. Поэтому представляется возможным использовать фиксированную в пространстве многослойную модель линейной ОЗ с горизонтальными пластами, разбитыми на довольно большое количество блоков в виде параллелепипедов (от 400 до 2500) и решать линейную ОЗ относительно аномальной плотности (АП) или интенсивности намагничивания (ИН) каждого блока. Положительный опыт решения линейных ОЗ для моделей из 3–4 слоев по 400–1200 блоков в каждом слое уже имеется, благодаря высокой устойчивости решений, получаемых итерационными фильтрационными методами. Приписывая центру каждого блока значение АП или ИН, полученное решением ОЗ, и проводя между ними в пространстве изолинии, получаем геологически содержательные, представительные и легко интерпретируемые карты и разрезы АП или ИН с участками довольно гладких изолиний или с зонами интенсивных аномалий со сложной конфигурацией изолиний. В статье приведены различные методы оптимизации решения ОЗ и методологические приемы, чередование которых при решении структурной линейной ОЗ гравиметрии или магнитометрии позволило бы использовать модель из 8 горизонтальных пластов по 400 блоков в каждом, чего уже достаточно для построения простейших, но довольно детальных вертикальных разрезов АП и ИН.

**Ключевые слова:** гравиметрия; магнитометрия; обратная задача; многослойная модель; вертикальный разрез.

### Введение

В настоящее время в рудной геофизике методы решения нелинейных обратных задач (ОЗ) гравиметрии и магнитометрии успешно применяются для поисков высокоаномальных рудных тел в кристаллических породах, а также для изучения структуры верхней части кристаллического фундамента и формы его поверхности [Миненко та ін., 2007]. Для исследования глубинного строения используют трехслойные модели, и после каждого решения из поля вычитают влияние верхнего пласта, а в модель добавляют один слой, снова решают нелинейную ОЗ [Миненко, 2007] и т.д. Иногда на каждом этапе решают трехслойную линейную ОЗ для модели с менее тонкими, но горизонтальными слоями блоков [Миненко и др., 2009]. Таким образом получают равномерную сетку значений аномальной плотности (АП) или интенсивности намагничивания (ИН) для построения вертикальных разрезов, горизонтальных планов или блок-диаграмм. Основным недостатком этих методов – очень большая трудоемкость, которая при ручном управлении часто приводит к потере данных на каком-то этапе, и решение ОЗ приходится даже по несколько раз начинать сначала.

### Анализ известных достижений

Известны методы решения линейных и нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии с критерием оптимизации по минимуму суммы квадратов (МСК) невязок поля (НП) или по МСК итерационных поправок к АП или ИН. Для решения ОЗ используются слоистые модели, обычно с тремя горизонтальными слоями блоков или со слоями переменной мощности и переменной глубиной до них по площади. Основным недоста-

ток известных методов состоит в том, что при отсутствии априорных данных о глубине, АП и ИН приходится решать ОЗ поэтапно с ограниченным количеством слоев в модели на каждом этапе – не более четырех. Переход к каждой более глубокой трехслойной модели влечет за собой ошибки от использования предыдущей модели. Поэтому приходится на каждом этапе по несколько раз проверять выход решения на постоянные значения АП или ИН по каждому блоку, а это очень трудоемкая операция, и в некоторых моделях достигается только при большом количестве итераций [Миненко, 2007; Миненко и др., 2009]. Кроме того, решение ОЗ с одним критерием оптимизации быстро приводит к выходу на постоянные значения АП или ИН, чаще всего для более глубоких пластов, которые еще не достигли их реальных значений.

### Цель исследования

Целью статьи является разработка ряда методов оптимизации решений линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии и методики их чередования по несколько итераций для моделей с увеличенным до 8–10 количеством горизонтальных пластов, что обеспечит построение вертикальных разрезов и блок-диаграмм АП и ИН.

### Основные результаты исследований

Поставленная цель достигается тем, что для решения обратной задачи используют несколько чередующихся методов с различными критериями оптимизации. Для этого запишем известный критерий безусловной оптимизации решения линейной ОЗ по невязке  $r_{j,n+1}$  поля  $g_j$  на следующей  $n+1$ -й итерации по вычисленным на  $n$ -й

итерации значениям АП  $\sigma_{i,n}$  (аналогично ИН) горных пород в каждом  $i$ -м блоке выбранной модели:

$$F_r = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) = \min(\tau); \quad (1)$$

где  $r_{j,n+1} = r_{j,n} - \tau_{r,n+1} Z_{j,n}$ ;  $r_{j,n} = (\sigma_{i,n}, a_{ij}) - g_j$ ;

$$\sigma_{i,n+1} = \sigma_{i,n} - \tau_{r,n+1} B_{i,n}; \quad (2)$$

$$F_z = (Z_{j,n}, Z_{j,n}) = (Z, Z);$$

$$Z_{j,n} = (B_{i,n}, a_{ij});$$

$$B_{i,n} = (r_{j,n}, a_{ij} / \lambda_j \lambda_i);$$

$$\lambda_i = (a_{ij}, 1)_j; \lambda_j = (a_{ij}, 1)_i;$$

$$(r, Z) = (r_{j,n}, Z_{j,n});$$

$$\tau_{r,n+1} = (r, Z) / F_z; \quad (3)$$

$B_{i,n}$  – итерационная поправка к  $\sigma_{i,n}$ ;  $Z_{j,n}$  – итерационная поправка к невязке поля  $g_j$ ;  $\tau_{r,n+1}$  – итерационный коэффициент в оптимизированном итерационном методе по МСК невязки поля для  $n+1$ -й итерации;

$a_{ij}$  ( $i = 1, M; j = 1, N$ ) – матрица решений прямой задачи гравиметрии;

Поставленная цель достигается еще и тем, что, кроме известного метода решения ОЗ (1–3) [Миненко та ін., 2007; Миненко, 2007] (рис. 1, а, б) с критерием оптимизации (КО)  $F_r$  по квадратам текущих отклонений  $r_{j,n+1}$  поля  $g_j$ , используют также методы с КО по минимуму суммы четвертых, шестых и т.д. степеней отклонений поля (ОП), а также равные нулю суммы третьих, пятых и т.д. степеней ОП. После выполнения всех оптимизационных преобразований запишем в конечном виде формулы, используемые в новом методе:

$$F_{r,2,2} = (r_{j,n+1}^2, r_{j,n+1}^2) = \min(\tau); \quad (4)$$

$$F_{r,2,1} = (r_{j,n+1}^2, r_{j,n+1}) = 0; \quad (5)$$

$$F_{r,2m,2m-1} = (r_{j,n+1}^{2m}, r_{j,n+1}^{2m-1}) = 0; \quad (6)$$

$$F_{r,2m,2m} = (r_{j,n+1}^{2m}, r_{j,n+1}^{2m}) = \min(\tau); m \geq 2; \quad (7)$$

$$\tau_{r,4,n+1} = (r^3, Z) / (r^2, Z^2) / 3; \quad (8)$$

$$\tau_{r,2m,n+1} = (r^{2m-1}, Z) / (r^{2m-2}, Z^2) / (2m-1); \quad (9)$$

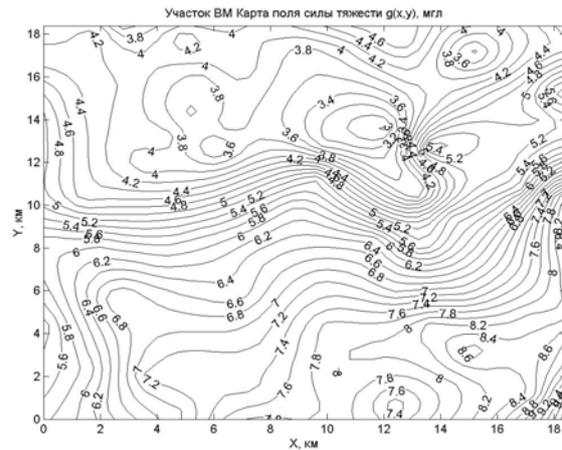
Теперь запишем метод с итерационной поправкой (ИП)  $B_{i,n}$  к АП  $\sigma_{i,n}$ , итерационным коэффициентом (ИК)  $\tau_{B,n+1}$  и новым КО по МСК ИП:

$$F_B = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) = \min(\tau); \quad (10)$$

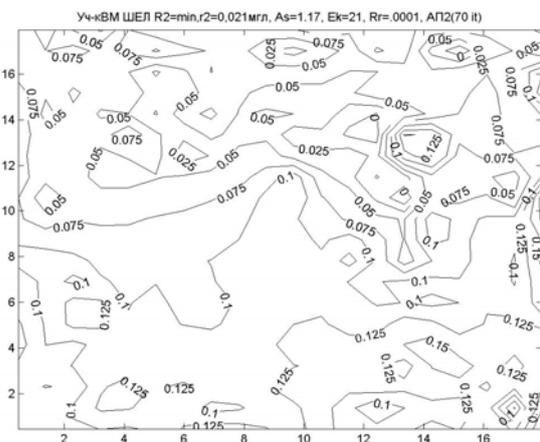
где  $B_{i,n+1} = B_{i,n} - \tau_{B,n+1} C_{i,n}$ ;  $C_{i,n} = (Z_{j,n}, a_{ij} / \lambda_j \lambda_i)$ ;

$F_c = (C_{i,n}, C_{i,n})$ ;  $f(C, B) = (B_{i,n}, C_{i,n})$ ;

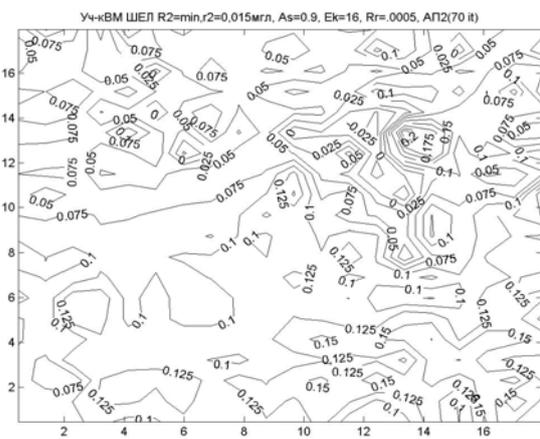
$\tau_{B,n+1} = f(C, B) / F_c$ .



а



б



в

**Рис. 1.** Карта гравитационного поля  $g_j$ : а – (сечение ИЗОЛИНИЙ здесь и далее – в МГал); карты распределения АП второго слоя модели по результатам решения линейной ОЗ; б – методом невязок поля; в – методом итерационных поправок к АП (изолинии здесь и далее – в г/см<sup>3</sup>)

В ряде работ автора, например, в [Миненко, Миненко, 2006] приведены линеаризованные оптимизирующие итерационные методы (ОИМ) с совмещенными (11) и экстремально-избиратель-

ными (13) критериями с ИК (12), а (15) – для повышения точности решения ОЗГ и выделения блоков с экстремальными скачками АП на верхней и нижней границах блоков:

$$F_{rB} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1})(r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) = F_r F_B = \min(\tau); \quad (11)$$

$$\tau_{rB,n+1} = ((C, B)(r, r) + (r, Z)(B, B)) / ((C, C)(r, r) + (Z, Z)(B, B) + 4(r, Z)(C, B)) \quad (12)$$

(здесь и дальше индексы в ИК опущены).

$$F_{rB/\sigma} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1})(r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) / (\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}) = F_r F_B / F_\sigma = \min(\tau); \quad (13)$$

$$F_\sigma = (\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}); \quad (14)$$

$$\tau_{rB/\sigma,n+1} = ((\sigma, \sigma)((C, B)(r, r) + (r, Z)(B, B)) - (\sigma, B)(r, r)(B, B)) / ((\sigma, \sigma)((C, C)(r, r) + (Z, Z)(B, B) + 4(r, Z)(C, B)) - (r, r)(B, B)^2); \quad (15)$$

$$F_{B,r} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, r_{j,n+1})) = \min(\sigma) = \min(\tau); \quad (16)$$

$$\tau_{B,r,n+1} = ((C, B) + \lambda(\lambda_j, Z_j)) / (C, C); \quad \lambda = -(B_{i,n}, 1) / (\lambda_j, \lambda_j); \quad (17)$$

Автором также разработаны и реализованы методы условной оптимизации, например, по МСК ИП при МСК НП (16)–(17) и наоборот (18)–(19):

$$F_{r,B} = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) + \lambda((B_{i,n+1}, B_{i,n+1})) = \min(\sigma) = \min(\tau); \quad (18)$$

$$\tau_{r,B,n+1} = (\lambda(C, 1) + (r, Z)) / (Z, Z); \quad \lambda = -(\lambda_j, r_j) / M; \quad (19)$$

Из приведенной на рис. 1, в карты АП 2-го слоя следует, что за те же 70 итераций методом (10) АП восстанавливается значительно больше, чем методом (1–3) с оптимизацией по невязке поля.

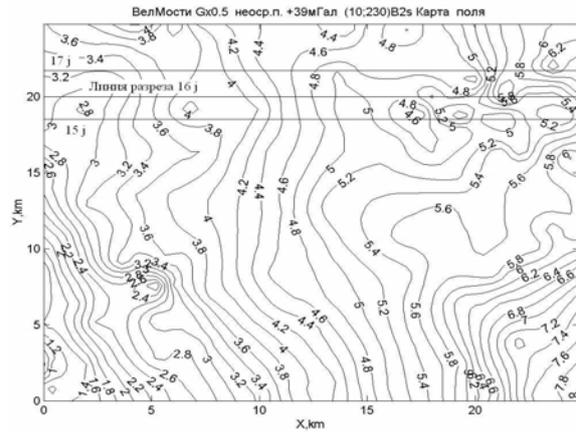
В дальнейшем использованы карты трансформаций поля силы тяжести  $G(x)$  (рис. 2, а) и магнитного поля  $Z(x)$  (рис. 3, а), вычисленных по формулам аналогов градиентов поля нецелого порядка

$$G_{0,5} = (G(x+d) - G(x))/c, \quad (20)$$

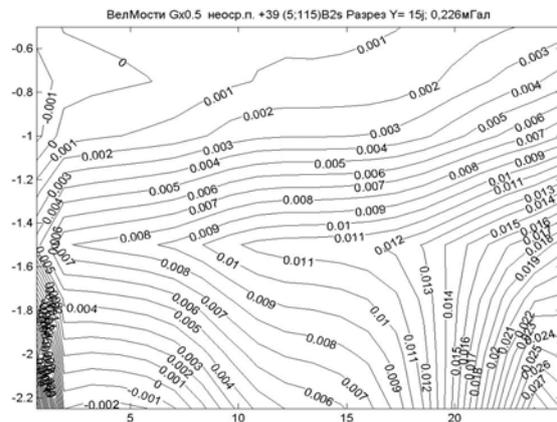
$$Z_{0,5} = (Z(x+d) - Z(x))/c, \quad (21)$$

где  $c=2$ ;  $d$  – приращение аргумента  $x$ .

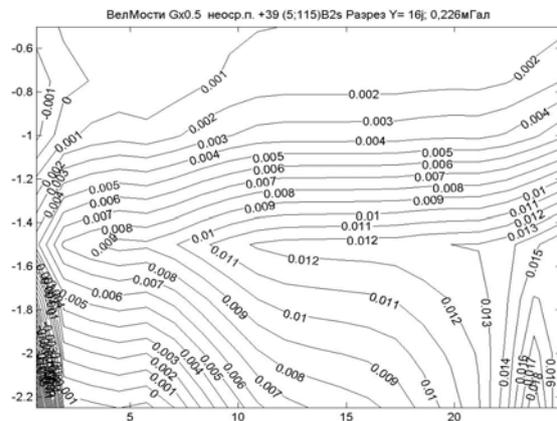
Эти поля позволяют при различных  $c$  правильно выбрать постоянный фон аномалии и однозначно решать ОЗ. На рис. 2, б, в приведены полученные решением линейной ОЗ по МСК ИП  $V_{i,n}$  к АП для 8-слойной модели разрезы аномальной плотности в пределах глубин от 100 до 2250 м. Эти разрезы проходят через 15-й и 16-й ряды блоков слоя из  $400=20 \times 20$  блоков, расположенных по сети  $920 \times 920$  м.



а



б



в

**Рис. 2.** Карта трансформации гравитационного поля  $G_{0,5}$  (а); вертикальные разрезы АП по результатам решения линейной ОЗ для 8-слойной модели методом итерационных поправок к АП: б – по линии  $Y=15j$ ; в – по линии  $Y=16j$

Как видно из рис. 2, б, в, изолинии АП на соседних разрезах довольно точно сходятся. Поскольку осадочные породы здесь немагнитные, то решение обратной задачи магнитометрии выполнено для 8-слойной модели кристаллического фундамента, расположенной в пределах глубин от 1900 до 3650 м. Причем два верхних пласта кри-

таллических пород фундамента более выветрены и имеют более низкую ИН, чем более глубокие слои (рис. 3, б, в, г). Но здесь расстояние между 7-м, 11-м и 15-м рядами блоков, через которые проведены разрезы, равно 3680 м. Поэтому на всех трех разрезах геологические структуры существенно различаются, но вполне объясняются магнитными аномалиями на карте (рис. 3, а). При решении ОЗ на нескольких итерациях поочередно использовались и другие методы с критериями условной оптимизации, например, по минимуму суммы квадратов значений АП при МСК невязок поля (22-23) и при МСК ИП к АП (24-25), для которых КО, ИК и коэффициенты Лагранжа  $\lambda$  имеют вид:

$$F_{\sigma,r} = (\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) = \min(\sigma) = \min(\tau);$$

$$\tau_{\sigma,r,n+1} = ((\sigma, B) + \lambda(\lambda_j, Z_j)) / (B, B);$$

$$\lambda = -(\sigma_{i,n}, 1) / (\lambda_j, \lambda_j);$$

$$F_{\sigma,B} = (\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}) + \lambda((B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) = \min(\sigma) = \min(\tau);$$

$$\tau_{\sigma,B,n+1} = ((\sigma, B) + \lambda(C, 1)) / (B, B);$$

$$\lambda = -(\sigma_{i,n}, 1) / M; \quad (25)$$

Большая часть приведенных методов оптимизации решения ОЗ проверена при интерпретации поля реальных вариаций силы тяжести. Поскольку последние два метода малочувствительны к изменению АП, разработаны обратные для них методы: для МСК ИП при МСК АП (26)-(27) и МСК ИП к АП при МСК АП (28)-(29), которые дают намного большее восстановление АП и поля:

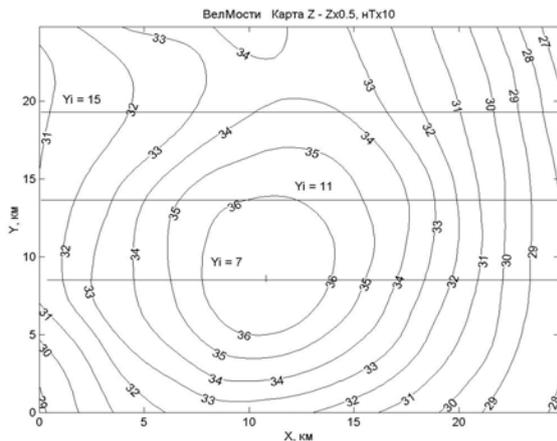
$$F_{r,\sigma} = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) + \lambda((\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}) = \min(\sigma) = \min(\tau);$$

$$\tau_{r,\sigma,n+1} = ((Z, r) + (r, \lambda_j)(B, 1)^2 / M) / (Z, Z);$$

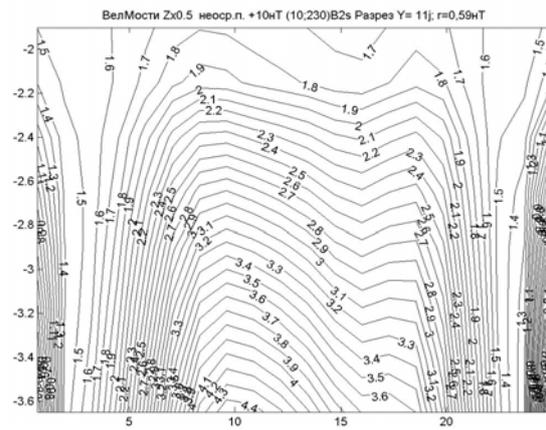
$$F_{B,\sigma} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) + \lambda((\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1}) = \min(\sigma) = \min(\tau);$$

$$\tau_{B,\sigma,n+1} = ((C, B) + (B, 1)^2 / M) / (C, C); \quad (29)$$

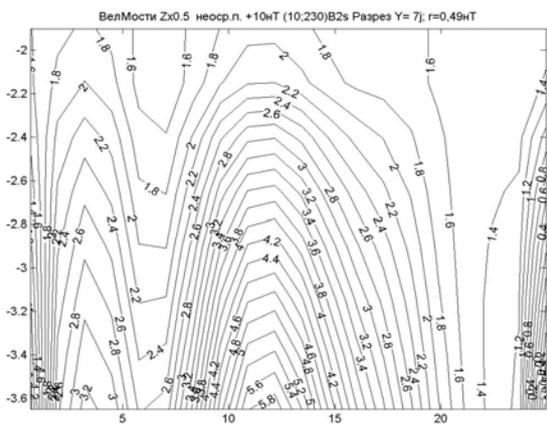
Заслуживают внимания еще несколько методов устойчивого решения ОЗ. Прежде всего, истори-



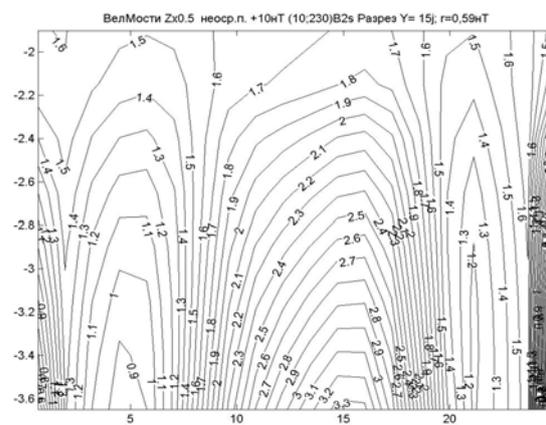
а



б



б



г

**Рис.3.** Карта магнитного поля  $Z_{0,5}$  (а) (изолинии обозначены в десятках нанотесла); вертикальные разрезы ИН по результатам решения линейной ОЗ для 8-слойной модели кристаллического фундамента методом итерационных поправок к ИН: б – по линии  $Y=7$  j; в – по линии  $Y=11$  j; г) по линии  $Y=15$  j (изолинии приведены в относит. единицах ИН)

чески важный критерий В.М. Страхова о перпендикулярности вектора погрешности к вектору полезного сигнала:

$$F_{rR} = (r_{j,n+1}, R_{j,n+1}) = 0; \\ R_{j,n+1} = r_{j,n+1} + g_j; \quad (30)$$

$$\tau_{rR,n+1} = (r, r)/(Z, R_g); \\ R_g = 2r_{j,n+1} + g_j; \quad (31)$$

Поскольку метод (30)–(31), несмотря на высокую устойчивость решения, трансформирует только несколько процентов поля в АП, этот критерий в качестве дополнительного использован в методах условной оптимизации с основными критериями по НП или по ИП к АП (формулы (32)–(35)):

$$F_{r,rR} = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) + \\ \lambda((r_{j,n+1}, R_{j,n+1}) = 0) = \min(\tau); \quad (32)$$

$$\tau_{r,rR,n+1} = ((Z, r) + \lambda(Z, R_g)) / \\ ((Z, Z)(1 + \lambda)); \\ \lambda = -(\lambda_j, r) / (\lambda_j, R_g); \quad (33)$$

$$F_{B,rR} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) + \\ + \lambda((r_{j,n+1}, R_{j,n+1}) = 0) = \min(\tau); \quad (34)$$

$$\tau_{r,rR,n+1} = ((B, C) + \lambda(Z, R_g)) / \\ ((C, C) + (Z, Z)\lambda); \\ \lambda = -(B, 1) / (\lambda_j, R_g); \quad (35)$$

Метод условной оптимизации (32)–(33) дает такую же геологическую содержательность решения ОЗ, как и метод безусловной оптимизации (1)–(3).

Важно также сравнить метод безусловной оптимизации по НП (1)–(3) с методом по минимуму суммы четырех степеней невязки поля.

$$F_{r^4} = \sum (r_{j,n+1}^4); \\ \tau_{r^4,n+1} = ((Z, r^3) / (3(Z^2, r^2))); \quad (36)$$

Этот метод дает высокую геологическую содержательность решения ОЗ, как и методы безусловной оптимизации (1)–(3) и (10)–(11).

#### Обсуждение результатов

На картах АП, построенных по двум методам, несмотря на различную детальность за счет более высокой разрешающей способности метода по поправкам к АП, основные изолинии 0,05, 0,075, 0,1, 0,125 мГал и т.д. в местах плавного изменения поля, в основном, повторяются на тех же местах и примерно с такими же изгибами и изломами (рис. 1, б и 1, в). Учитывая высокую детальность метода по поправкам, именно он выбран для автоматического построения вертикальных разрезов АП (рис. 2, б и 2, в). Здесь четко прослеживается выдержанность слабо наклонных изолиний плотности почти по всему участку, хотя после глубины 1,5 км начинают проявляться субвертикальные границы плотности, по-видимому, связанные с переходом к породам кристаллического фундамента. Однако

очень низкая дифференциация осадочных горных пород по средней плотности объединенных слоев в пласты мощностью по 250 м, даже при такой высокой точности ее определения, требует использования в моделях среды структурных планов по данным сейсморазведки, чтобы определять АП для блоков, заключенных между отражающими границами. По результатам решения ОЗ магнитометрии магнитные породы до глубины 1,9 км отсутствуют. Этот вывод сделан на том основании, что в слоях 1,65–1,9 и 1,9–2,15 км дифференциация горных пород по ИН в горизонтальном направлении практически полностью отсутствует. А после этой глубины появляются вертикальные границы раздела горных пород по ИН с одновременным ростом магнитных свойств по вертикали, что связано с уменьшением степени выветрелости магнитных кристаллических горных пород с глубиной.

#### Выводы

1. В структурных ОЗ практически всегда гравитационное и магнитное поля могут быть использованы только для изучения разных геологических объектов.

2. Для идентификации пластов горных пород геометрическую модель ОЗ гравиметрии необходимо строить по данным сейсморазведки.

3. Глубины до ближайших магнитных пород определяются с большой степенью однозначности, но для определения их ИН, а, тем более, идентификации пластов горных пород фундамента необходимо иметь абсолютные определения магнитных свойств горных пород по данным бурения.

Перспектива дальнейших исследований. Необходимо разработать методику подбора разрезов кристаллического фундамента по данным магнитометрии с учетом линейного изменения ИН в блоках модели по вертикали.

#### Литература

- Міненко П.О., Міненко Р.В., Мечніков Ю.П. Оптимізація розв'язку оберненої лінійно-нелінійної задачі магнітометрії для досліджень структури кристалічного фундаменту // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. Геологія. – 2007. – № 41. – С. 29–33.
- Миненко П.А. Методы и критерии оптимизации устойчивых решений обратной задачи глубинной морской гравиметрии // Науковий вісник НГУ. – 2007. – № 11. – С. 83–91.
- Миненко П.А., Миненко Р.В., Мечников Ю.П. Исследование глубинного строения южной части Криворожского синклинали методами гравиметрии // Науковий вісник НГУ. – 2009. – № 2. – С. 60–64.
- Миненко П.А., Миненко Р.В. О поисках изобразительных экстремальных решений обратной задачи магнитометрии при исследованиях на кристаллическом фундаменте // Науковий вісник НГУ. – 2006. – № 9. – С. 39–44.

**БАГАТОШАРОВА ОБЕРНЕНА ЛІНІЙНА ЗАДАЧА  
СТРУКТУРНОЇ ГРАВИМЕТРІЇ Й МАГНІТОМЕТРІЇ**

**П.О. Міненко**

У разі відсутності апріорних даних про геологічну будову ділянки досліджень структурна нелінійна обернена задача (ОЗ) некоректна, а її розв'язок неоднозначний, фізично незмістовний або важкий для інтерпретації. Тому видається можливим використовувати фіксовану у просторі багатошарову модель лінійної ОЗ з горизонтальними шарами, розбитими на досить велику кількість блоків у вигляді паралелепіпедів (від 400 до 2500), і розв'язувати лінійну ОЗ щодо аномальної густини (АГ) або інтенсивності намагнічування (ІН) кожного блока. Позитивний досвід розв'язання лінійних ОЗ для моделей з чотирьох шарів по 400–1200 блоків у кожному шарі вже є, завдяки високій стійкості розв'язків, одержуваних ітераційними фільтраційними методами. Приписуючи центру кожного блока значення АГ або ІН, отримане розв'язком ОЗ, і проводячи між ними у просторі ізолінії, одержуємо геологічно змістовні, представницькі та легкі для інтерпретації карти та розрізи АГ або ІН з ділянками доволі гладких ізоліній та з зонами інтенсивних аномалій зі складною конфігурацією ізоліній. У статті наведено різні методи оптимізації розв'язання ОЗ і методологічні прийоми, чергування яких при розв'язанні структурної лінійної ОЗ гравіметрії або магнітометрії дало змогу використовувати модель з 8 горизонтальних шарів по 400 блоків у кожному, чого вже досить для побудови найпростіших, але доволі детальних вертикальних розрізів АГ та ІН.

**Ключові слова:** гравіметрія; магнітометрія; обернена задача; багатошарова модель; вертикальний розріз.

**MULTILAYERED INVERSE LINEAR PROBLEM  
OF STRUCTURAL GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY**

**P.A. Minenko**

In the absence of a priori information about the geological structure of study area the structural nonlinear inverse problem (IP) is incorrect and its solution is ambiguous and even physically nonsense or difficult to interpretation. Therefore it is possible to use a space-fixed multilayered model of linear IP with horizontal strata which are composed of quite a large number of blocks in the boxes form (400 to 2500) and to solve the linear IP relative to anomalous density (AD) or the intensity of magnetization (IM) of each block. The positive experience of solving of linear IP for models of 4 layers with 400–1200 boxes in each layer is available due to the high stability of the solutions which are obtained by iterative filtration methods. Attributing the center of each block the AD or IM value which is obtained by solving of IP and holding isolines between them in the space we obtain the maps and sections of AD or IM which are geologically informative, inclusive and easily interpretable. They have areas of rather smooth isolines and zones of intense anomalies with a complicated configuration of isolines. In the paper the various methods of optimization of solutions of IP and methodological techniques is describes. Its alternation in solving of structural linear IP of gravimetry and magnetometry allows using the model of 8 horizontal layers with 400 boxes in each. That is enough to build a simple but yet quite detailed vertical AD and IM sections.

**Key words:** gravimetry; magnetometry; the inverse problem; multilayer model; vertical section.