

ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA WYTRZYMAŁOŚCI NA ŚCISKANIE BETONU KLASY B20

© Skrzypczak I., 2007

In this paper investigation results of concretes samples, obtained from construction realized in Podkarpacie region, have been presented. Conformity of empirical data with theoretical distributions has been tested with application of four distributions: normal, lognormal, gamma, chi².

Wprowadzenie. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej wytrzymałość betonu na ściskanie był przedmiotem wielu badań i analiz statystycznych [1,3 - 11], których wyniki są zróżnicowane.

Celem artykułu jest prezentacja przeprowadzonych dotychczas analiz wyników badań tej cechy mechanicznej betonu pochodzących z dostępnych dla autora publikacji i przyjętych założeniach normowych [12 - 15] oraz analiza statystyczna wyników badań wytrzymałości betonu na ściskanie. Na podstawie empirycznej próby statystycznej buduje się różne modele probabilistyczne. W przeprowadzonych dotychczas analizach zakładano, że zmienna losowa opisująca wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład normalny, logarytm-normalny, Weibulla i Pearsona. Wytrzymałość betonu na ściskanie może być opisana modelem logarytm-normalnym lub modelem normalnym, co znalazło swój wyraz w przyjętych zaleceniach normowych [12-15]. Rozkład gamma nie znalazł praktycznego zastosowania jako rozkład modelowy, świadczy to o braku danych w literaturze opisującej dotychczasowe opracowania. Interesujące wydają się być wyniki analizy rozkładu Weibulla. W publikacji [15] można się spotkać, ze stwierdzeniem, że „z rozkładem Weibulla często się spotykamy we wszelkiego rodzaju badaniach wytrzymałościowych i zmęczeniowych, np. trwałość wyrobów nieraz ma rozkład Weibulla”.

Problem rozrzutu wyników wytrzymałości betonu wykonanego w laboratorium został poruszony w [8], gdzie stwierdzono, że „założenie rozkładu normalnego jest na tyle bliskie rzeczywistości, że jest przydatne w obliczeniach”.

Ciekawe wyniki pracy badawczej z zakresu wytrzymałości betonów na ściskanie w zakładach prefabrykacji przedstawiono w [1]. Autorzy pracy [1] posilkowali się wynikami badań z trzech różnych wytwórni produkujących elementy prefabrykowane. Pierwszą była wytwórnia płyt stropowych charakteryzująca się niską mechanizacją robót, dwie pozostałe wytwórnie charakteryzowały się dużym stopniem mechanizacji robót. Dla obu typów wytwórni sporządzono histogramy wytrzymałości betonu. Do wyznaczenia parametrów rozkładu założono, że rozkład wytrzymałości betonu na ściskanie jest opisany krzywą gęstości rozkładu normalnego.

Również w obszernym opracowaniu [10], gdzie do analizy statystycznej wykorzystano dane nie tylko z przemysłu budowlanego Niemiec, lecz również z Anglii, Belgii, Chile, Szwajcarii, Włoch, Kanady, USA wykazano, że rozrzut wyników wytrzymałości betonu produkowanego w warunkach przemysłowych i przedstawionego histogramem można opisać krzywą rozkładu normalnego.

Praca [9], dotycząca badań zmienności wyników wytrzymałości betonu jest jedną z pierwszych w Polsce z tego zakresu. Wyniki opracowań statystycznych objęły betony 4 klas: B14, B17, B20 i B25. Pochodziły one z 6 zakładów produkujących beton w sposób przemysłowy. Dysponowano łącznie około 17500 wynikami. W pracy stwierdzono, że „Spośród stojących do dyspozycji badacza krzywych rozkładu i odpowiednich równań wydaje się być najodpowiedniejszą do badania właściwości betonów konstrukcyjnych, czyli betonów o wartościach wytrzymałości średniej $f=14-25\text{MPa}$ –Krzywa Pearsona, a zwłaszcza jej typ III”.

W publikacji [4] złożono, że zmienna losowa opisująca wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład normalny. Opracowanie statystyczne objęło wyniki badań dwóch klas betonów B35 i B45. Wyniki te zebrane zostały podczas realizacji obiektów inżynierskich w Niemczech, w latach 1991-1993. Liczebność próby dla obu klas nie była jednakowa, dla B35 $n=5706$, a dla B45 $n=1534$. Weryfikacji dopasowania rozkładu rzeczywistego z rozkładem normalnym wykonano testem χ^2 oraz λ -Kolmogorowa. Z przeprowadzonych analiz statystycznych wynikało, że rozkład wytrzymałości betonu na ściskanie nie można opisać na poziomie istotności $\alpha=0,05$ rozkładem normalnym.

Autorzy pracy [5] objęli swoimi opracowaniami betony 4 klas B17, B20, B25, B30. Obserwacjami były wyniki badań wytrzymałości betonów produkowanych w 15 zakładach prefabrykacji podległych jednemu ze zjednoczeń województwa katowickiego w okresie 1972 – 1973r. Do opracowania statystycznego 22 betony: 4 betony klasy B17 i B20, 12 betonów klasy B25 oraz 2 betony klasy B30. Analiza statystyczna objęła zbiór 21096 wyników. Autorzy pracy postawili sobie za cel stopień dopasowania rozkładów empirycznych do trzech rozkładów teoretycznych, tj. rozkładu normalnego, rozkładu logarytm-normalnego i rozkładu Weibulla. Parametry rozkładów szacowano metodą momentów. Zgodność dopasowania rozkładów weryfikowano za pomocą testu χ^2 , na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, dla celów porównawczych przeliczając wartość statystyki χ^2 na jeden stopień swobody. Dla grupy wyników 6 klas betonów nie udało się dopasować żadnego z wymienionych rozkładów. W pozostałych 16 przypadkach zdecydowaną przewagę wykazał rozkład Weibulla. Dlatego też we wnioskach autorzy podkreślają, że można dla celów technicznych opisywać strefę centralną wytrzymałości betonu za pomocą rozkładu normalnego. Natomiast do celów naukowych należy stosować trójparymetryczny rozkład Weibulla.

Pracą badającą zmienność wyników wytrzymałości betonu na ściskanie jest praca [3]. Badania były przeprowadzone w ramach nadzoru inżynierskiego w czasie wznoszenia konstrukcji żelbetowej szkieletowo-płytowej wielokondygnacyjnego kompleksu budynków w Szczecinie. Przedmiotem badań był beton klasy B30 jako najczęściej stosowany przy budowie tego obiektu. Normowe badania wytrzymałości betonu na ściskanie były przeprowadzone dla każdej partii dostarczonego betonu. Do analizy rozkładu wytrzymałości betonu przyjęto wyniki średnich wytrzymałości na ściskanie, uzyskane w wyniku badań 94 partii betonu klasy B30. Do weryfikacji rozkładów przyjęto dwa modele: normalny i Weibulla. Oba modele poddano weryfikacji graficznej oraz za pomocą testów χ^2 i Kolmogorowa-Smirnowa. Na podstawie analizy porównawczej modeli do rozkładów empirycznych przyjęto rozkład normalny jako najbardziej zbieżny matematyczny opis badanego zjawiska. Według autorów, rozkład wytrzymałości betonu próbek kontrolnych może być z dużym stopniem zgodności opisany modelem normalnym”.

Rozrzut wyników badań wytrzymałości betonu był przedmiotem badań również w publikacji [6]. Podstawę analizy stanowiły wyniki badań wytrzymałości na ściskanie wyznaczone na normowych próbkach kostkowych o boku 150 i 100 mm oraz cylindrycznych 150/300 mm. W analizie założono, że zmienna losowa opisująca wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład normalny. Zakres badań stanowi fragment ogólniejszego programu badawczego zrealizowanego przez autorów w latach 1995 – 99, obejmującego problematykę wyznaczania właściwości mechanicznych betonów konstrukcyjnych. Badanie wytrzymałości na ściskanie wykonywano zgodnie z normą [12] na kostkach o boku 150 oraz 100 mm. Analizowano betony charakteryzujące się szerokim przedziałem wytrzymałości na ściskanie 10 – 100 MPa. Wykonano i zbadano ponad 1500 próbek pogrupowanych w 91 seriach. Każda seria obejmowała 6 – 8 próbek. Punktem wyjścia do analizy rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, za jaką przyjęto wytrzymałość betonu na ściskanie, było wizualne porównanie histogramów z naniesionymi nań wykresami gęstości prawdopodobieństwa oraz ocena zgodności danych statystycznych na siatce prawdopodobieństwa. Poprawność wnioskowania potwierdzono testami statystycznymi χ^2 oraz Kolmogorowa-Smirnowa. Z przeprowadzonych analiz statystycznych wynikało, że rozkład wytrzymałości betonu na ściskanie można traktować jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym.

W pracy [11] przedstawiono wyniki analizy statystycznej badań wytrzymałości na ściskanie wybranych pięciu mieszanek betonowych. Betony te stosowano podczas realizacji pięciu różnych obiektów. Każdy z betonów wykonany był przez innego wykonawcę. Do badań wytrzymałościowych stosowano próbki kostkowe 150 mm. Założone klasy betonu to B20, B25, B55. Wykonano i zbadano 255 próbek. Do rzeczywistych wyników badań dopasowywano funkcję rozkładu normalnego i log-normalnego. Weryfikacji zgodności dopasowania wykonano testem λ Kolmogorowa. Wszystkie analizowane wytrzymałości betonów mogą być opisane zarówno rozkładem normalnym, jak i log-normalnym.

Tab. 1.

**Wyniki dopasowania rozkładów teoretycznych
do danych empirycznych**

Rozkład	Publikacja								
	[1]	[3]	[4]	[5]	[6]	[8]	[9]	[10]	[11]
Normalny	+	+	-	+	+	+		+	+
Logarytm-normalny				-					+
Weibulla		-		+					
Pearsona							+		

Różne propozycje rozkładu zmiennej losowej, za jaką jest przyjmowana wytrzymałość betonu na ściskanie zostały ujęte w tabeli 1 („+” przyjęcie testowanej hipotezy, „-” odrzucenie testowanej hipotezy, brak, „+” lub „-” oznacza brak badania ze względu na cechę o danym rozkładzie). Z powyższej tabeli wynika, że rozkład normalny jest najbardziej zbieżnym opisem matematycznym badanej cechy mechanicznej betonu.

Badania własne. Do analizy wykorzystano wyniki badań betonów stosowanych przy wznoszeniu konstrukcji realizowanych w województwie podkarpackim. Przedmiotem badań był beton B20, jako najczęściej stosowany. Podstawę opracowania stanowią wyniki badań wytrzymałości na ściskanie wyznaczone na normowych próbkach kostkowych o wymiarach 150x150x150mm. Przyjęto do weryfikacji zgodności dopasowania do danych empirycznych pięciu modeli: normalny, logarytm-normalny, gamma, chi-kwadrat.

Pierwszym etapem statystycznego opracowania wyników badań było zbudowanie histogramów. Przy odpowiedniej szerokości i liczbie przedziałów przyjęto formułę podaną przez T.Stugesa

$$k = 1 + 3,3 \lg(n) \quad (1)$$

gdzie n- liczba danych; k- liczba przedziałów między min i max wartością obserwowaną.

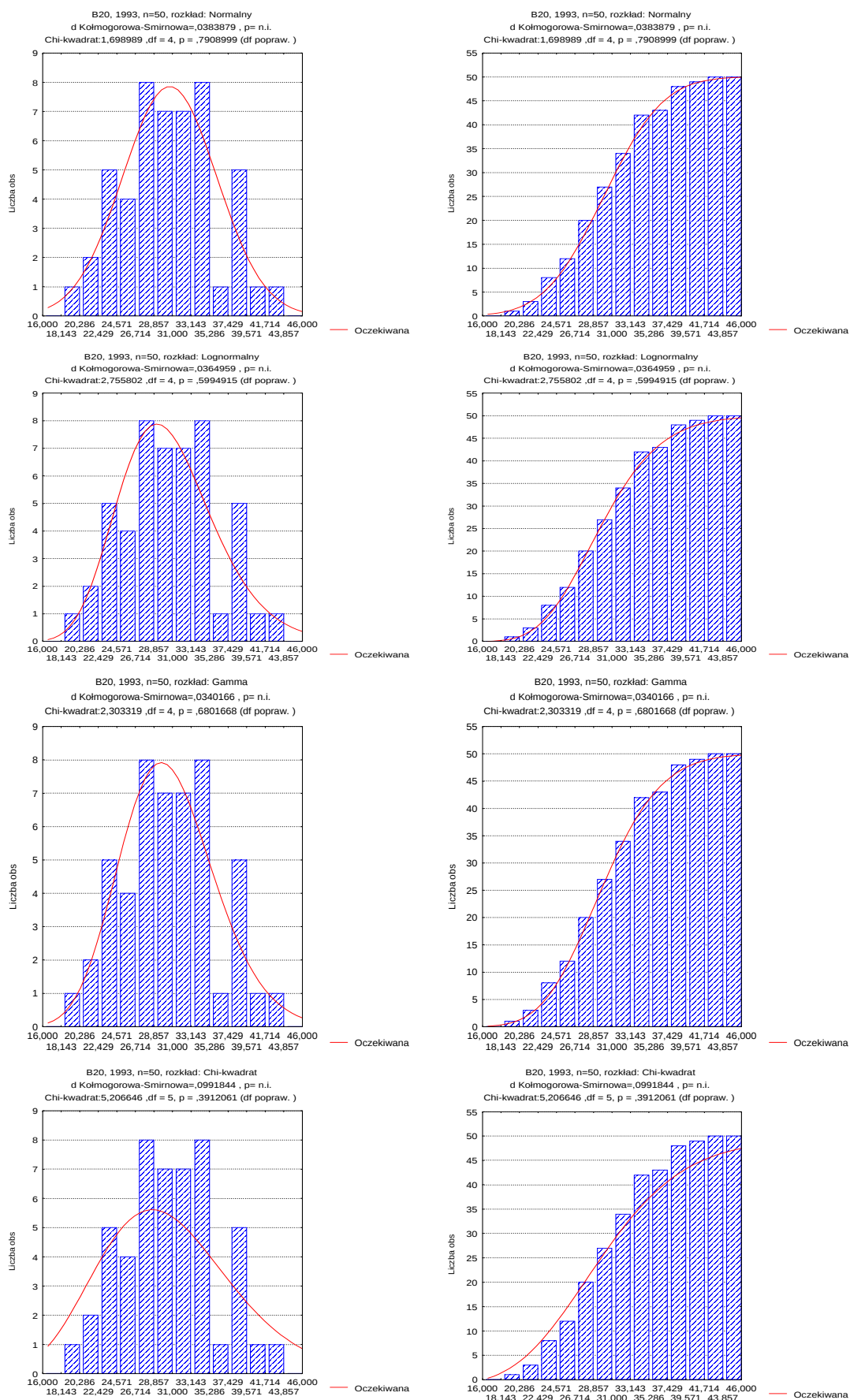
Kolejnym etapem była ocena dopasowania modelu matematycznego, do wyników badań wytrzymałości betonu. Poprawność wnioskowania potwierdzono testami statystycznymi hipotez zgodności χ^2 oraz Kołmogorowa-Smirnowa. Do obróbki statystycznej wyników wykorzystano program Statistica. Na rysunku1 przedstawiono przykładowe histogramy wytrzymałości betonu na ściskanie, odpowiadające im krzywe rozkładu prawdopodobieństwa oraz wykresy dystrybucyjny empirycznej i teoretycznej.

Tab. 2

**Wyniki testu χ^2 dla betonu klasy B20 – wartości $\chi_0^2 < \chi^2$
(poziom istotności $\alpha=0,05$; dla $\alpha_{0,05}$ i k odczytano χ^2)**

Lata	1991	1992	1993	1995	1996	1997	1998	199	2000
Stopnie swobody K	14	9	4	14	12	14	14	14	14
Wartość statystyki χ^2	23,685	16,919	9,488	23,685	21,026	23,685	23,685	23,685	23,685
Rozkład									
Normalny	58,87	17,02	1,69	83,52	22,35	97,42	97,42	98,73	98,73
Logarytm-normalny	38,62	22,41	2,76	64,23	34,55	56,90	56,89	58,09	58,09
Gamma	43,39	20,14	2,30	63,30	24,91	65,27	65,27	67,07	67,07
Chi-kwadrat	48,12	61,21	5,21	102,61	119,19	126,01	126,00	128,98	128,98

Wizualne porównanie wykresu funkcji gęstości prawdopodobieństwa i histogramu oraz w przybliżeniu liniowego rozkładu danych na siatce prawdopodobieństwa, w odniesieniu do badanej wytrzymałości betonu, skłaniają do akceptacji założonych rozkładów normalnego, logarytm-normalnego i badanej zmiennej losowej i odrzucenia rozkładu gamma oraz chi-kwadrat. W celu analitycznego potwierdzenia poprawności wnioskowania dokonano weryfikacji statystycznych hipotez zgodności. O zgodności rzeczywistego rozkładu wytrzymałości betonu na ściskanie z założonym teoretycznym rozkładem świadczą wyniki testów χ^2 i Kołmogorowa-Smirnowa.



Rys. 1. Wykresy funkcji gęstości i dystrybucyj dla założonego rozkładu i histogramy wskaźników zmienności wytrzymałości na ściskanie

Należy zauważyć, że na odrzucenie hipotezy w przypadku weryfikacji zgodności rozkładu empirycznego z teoretycznym za pomocą testu χ^2 decydujący wpływ ma łączenie mało licznych klas. Ma to swoje odzwierciedlenie w uzyskanych wynikach. Tylko dla jednej grupy danych z roku 1993 nie było podstaw do odrzucenia hipotezy, natomiast dla pozostałych okresów test wskazywał na konieczność jej odrzucenia. Jest to właśnie słaba strona tego testu – silnie reaguje na wpływ krańcowych mało licznych klas.

Tab. 3

**Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa dla betonu klasy B20 – wartości $\lambda = d_n \sqrt{n}$
(poziom istotności $\alpha=0,05$; $\lambda_{(0,95)}= 1,36$ $d_n \sqrt{n} < \lambda$)**

Rozkład	Wartości $\lambda = d_n \sqrt{n}$								
	1991 n=449	1992 n=261	1993 n=50	1995 n=664	1996 n=623	1997 n=650	1998 n=586	1999 n=692	2000 n=901
Normalny	1,19	0,40	0,27	1,83	0,45	1,71	1,62	1,92	2,19
Logarytm-normalny	0,72	0,79	0,25	1,21	1,02	1,12	1,06	1,08	1,23
Gamma	0,83	0,58	0,24	1,13	0,77	1,35	1,28	1,37	1,56
Chi-kwadrat	1,08	1,49	0,70	1,96	2,30	2,75	2,61	2,74	3,12

W przypadku testu Kołmogorowa-Smirnowa, otrzymaliśmy odmienne wyniki. Przewaga tego testu nad testem χ^2 polega właśnie na tym, że jest on niewrażliwy na działanie skrajnych mało licznych klas szeregu rozdzielczego. Wyniki testowania nie potwierdzają wstępnych założeń odnośnie rozkładu modelowego. Najkorzystniejszym do opisu rzeczywistego rozkładu wytrzymałości betonu będzie rozkład logarytm-normalny.

Również rozkład gamma zupełnie dobrze opisuje wytrzymałość betonu na ściskanie – dla próbek z 6 okresów badań nie było podstaw do odrzucenia hipotezy. Tylko dla 4 grup wyników rozkład wytrzymałości betonu na ściskanie można opisać na poziomie istotności $\alpha=0,05$ rozkładem normalnym. Rozkład chi-kwadrat charakteryzuje się najmniejszą zgodnością z rozkładem danych empirycznych, dlatego nie powinien być wykorzystywany do opisu badanej cechy.

Podsumowanie i wnioski końcowe. Na podstawie uzyskanych wyników analiz rozkładem, który charakteryzował się największą zgodnością z uzyskanymi wynikami badań wytrzymałości betonu na ściskanie betonów klasy B20 okazał się rozkład logarytm-normalny.

1 Borcz A., Jankowiak R.: Kontrola jakości betonu w zakładach prefabrykacji w świetle projektu normy „Beton zwykły”. Inżynieria i Budownictwo 1/1975. 2.Firkowicz S.: Statystyczne badanie wyrobów. WN-T, Warszawa1970. 3.Horszczaruk E., Przybylski J.: Wytrzymałość betonów na ściskanie w świetle badań normowych i badań betonu dojrzewającego w warunkach naturalnych. Przegląd Budowlany 7/1993. 4. Konopka E.: Probabilistyczny opis wytrzymałości betonu produkowanego w centralnych wytwórniach oraz określenie różnicy między projektowaną i empiryczną wytrzymałością gwarantowaną dwóch klas betonu B35 i B45. Rozprawa doktorska, Politechnika Opolska, Opole 1995. 5.Korzekwa S., Mames J.: Wytrzymałość gwarantowana betonów produkowanych w zakładach prefabrykacji. XX Jubileuszowa Konferencja Naukowa Komitetu Nauki Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Kraków-Krynica 1974. 6. Kubissa J., Koper W.: O wskaźnikach zmienności wytrzymałości współczesnych betonów konstrukcyjnych. Inżynieria i Budownictwo 4/2001. 7 Mames J.: Statystyczna ocena jakości mieszanek betonowych,. Archiwum Inżynierii Lądowej – tom XXX z.2-3/1984 8.Neville: Właściwości betonu. Cement Polski, Kraków 2000. 9. Pawłowski P.: Obliczeniowa wytrzymałość betonów zwykłych. Towarzystwo Naukowe Ekspertów Budownictwa w Polsce, Warszawa, 1997. 10.Rüsch H., Sell R., Rakwitz R.: Statistische Analyse der Betonfestigkeit. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin 1996. 11.Śliwiński J., Tracz T.: Jednorodność cech betonów cementowych stosowanych w praktyce. Problemy naukowo-badawcze konstrukcji z betonu, Monografia 247, Kraków 1999. 12 PN-88/B-03250 Beton zwykły 13.PN-84/B-03264 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie 14.PN-B-03264:1999 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. 15.PN-ENV 1992 Projektowanie konstrukcji z betonu.