

Якщо вважати, що крайові умови для рівняння (26) відповідають шарнірно закріпленим кінцям, то одночастотний коливний процес у режимі, близькому до частоти зовнішніх збурень, можна описати залежністю.

$$u(x, t) = a \sin \frac{\pi}{l} x \cos(\nu t + \varphi). \quad (27)$$

Тільки параметри a і φ для вказаного випадку визначаються системою диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2H}{\pi\omega^2} \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \nu + V^2 \frac{\pi^2}{l^2} - \varepsilon \left(\frac{9}{128} \frac{\pi^7}{l^7} \frac{a^2}{\omega} - \frac{\pi}{l} \frac{V^2}{8\omega} \right) + 2\varepsilon \frac{H}{\pi\omega^2 a} \sin \varphi \end{aligned} \quad (28)$$

Отож, як бачимо зміна амплітуди залежить тільки від гармонійної сили, яка діє на балку. Вплив швидкості проявляється на зміну фази системи, при чому чим більша швидкість, тим частота системи зростає.

1. Гацук П., Зорій Л. *Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем*. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 2. Бабаков И.М. *Теория колебаний*. – М.: Наука, 1976. – 592 с. 3. Каударер Г. *Нелинейная механика*. – М.: Мир, 1966. – 655 с. 4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1974. – 372 с. 5. Найф А.Х. *Методы возмущений*. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

УДК 534

І.А. Вікович, Х.А. Висоцька*

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра нарисної геометрії та графіки,
* кафедра прикладної механіки

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ РУХОМОЇ СТРУНИ

© Вікович І.А., Висоцька Х.А., 2004

За допомогою асимптотичного методу нелінійної механіки визначено частоту і основний період нелінійних коливань струни, залежно від початкового натягу і швидкості її руху.

By means of an asymptotic method of nonlinear mechanics it is defined frequency and a fundamental period of nonlinear oscillations of a string depending on an initial tension and a velocity of its driving

В електротехнічній і текстильній промисловостях важливим завданням є збільшення швидкостей намотування дроту чи ниток. Збільшення швидкості намотування пов'язано із забезпеченням необхідного натягу для досягнення якісного намотування. Під час виконання технологічного процесу намотування при певних співвідношеннях величини натягу, частоти, амплітуди та швидкості руху дроту чи нитки можуть у намотувальних станках відбуватись обриви дроту (ниток). Тому дослідження динамічних процесів у намотувальних системах залишається і надалі актуальною задачею.

Для дослідження динамічних процесів у рухомій струні (нитці) важливим є знаходження оптимальних співвідношень між натягом, амплітудою коливань і швидкістю руху струни.

Переважно в існуючих дослідженнях коливань рухомої струни не враховувались швидкість руху струни. Однак у роботі [3] швидкість руху струни була врахована.

Нелінійні коливання струни, що рухається в поздовжньому напрямі, згідно з [3], можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left[1 - \beta^2 + \frac{3}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Тут u – поперечне переміщення струни, t – час, $\beta = v / \frac{P}{\rho F}$ – безрозмірна швидкість поздовжнього руху струни, v – швидкість поздовжнього руху струни, P – початковий натяг струни, ρ – густина матеріалу струни, F – площа поперечного перерізу струни, $\alpha = \left(\frac{P}{FE} \right)^{\frac{1}{2}} < 1$ – безрозмірний початковий натяг струни, E – модуль пружності матеріалу струни.

Для застосування асимптотичного методу нелінійної механіки [2] до розв'язування нелінійного диференціального рівняння коливань рухомої струни доцільно його подати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) &= 0; \\ \varphi(0) = \varphi(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'яжемо рівняння (2) без правої частини, яке запишемо у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (4)$$

де

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = - \left(2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right).$$

Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння (4), тобто

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) будемо шукати у вигляді

$$u_0 = \varphi(x) \cos \omega_0 t. \quad (6)$$

Підставляючи (6) у (5), одержимо

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Розв'язок (7) шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}, \quad (8)$$

і характеристичне рівняння (7) матиме вигляд $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, а його корені будуть $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Тоді розв'язок рівняння (7) буде

$$\varphi(x) = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x. \quad (9)$$

Використовуючи граничні умови $\varphi(0) = 0$; $\varphi(1) = 0$, знаходимо постійні інтегрування c_1 і c_2 .

Отже, розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\varphi(x) = \sin \omega_0 x,$$

де $\omega_0 = k\pi (k=1, 2, \dots)$.

Тепер розв'яжемо рівняння (4), розв'язок якого шукаємо у вигляді асимптотичного ряду [1, 2]

$$u(x,t) = a\varphi(x)\cos\psi + \varepsilon u_1(x,a,\psi) + \varepsilon^2 \dots, \quad (10)$$

де $a\varphi(x)\cos\psi$ – розв’язок рівняння (5).

Функції $u(x,a,\psi)$, що входять у ряд (10), є періодичними функціями кута ψ з періодом 2π . При цьому, наслідуючи теорію нелінійної механіки, амплітуду φ і фазу ψ , які є функціями часу, можна визначити з таких диференціальних рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 \dots; \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 \dots, \quad (12)$$

де ω_0 – власна частота коливань струни, рух якої описується незбуреним однорідним рівнянням (5).

Задача полягає у підборі відповідних виразів для функцій $u(x,a,\psi)$, $A_1(a)$ і $B_1(a)$ з таким розрахунком, щоби ряд (10), з врахуванням (11) і (12), був би розв’язком рівняння (4).

Знаходимо відповідні вирази для рівнянь (11) і (12):

$$A_1(a) = \frac{\Phi_2(a)}{N}; \quad A_1(a) = \frac{\Phi_2(a)}{N}; \quad N = -2\omega_0 P;$$

$$P = \int_0^1 \varphi^2(x) dx = \int_0^1 \sin^2 \omega_0 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2 \sin^2 \omega_0 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\omega_0 x) dx = \frac{1}{2};$$

$$\Phi_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_1(x,a,\psi) \varphi(x) \cos \psi dx d\psi;$$

$$\Phi_{21}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_1(x,a,\psi) \varphi(x) \sin \psi dx d\psi,$$

де

$$f_1(x,a,\psi) = f \left(-\omega_0 a \sin \psi \frac{d\varphi}{dx}, a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right);$$

$$f_1(x,a,\psi) = -f \left(2\beta a \omega_0 \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} + \beta^2 a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right).$$

Обчислимо $\Phi_1(a)$ і $\Phi_2(a)$:

$$\begin{aligned} \Phi_2(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2\beta a \omega_0 \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} - \beta^2 a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] \varphi(x) \sin \psi dx d\psi = \\ &= \frac{a}{\pi} \left\{ 2\beta \omega_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi \int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \varphi dx - \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \varphi dx \right\} = 0. \end{aligned}$$

Тут $\int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\psi) d\psi = \pi$; $\int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \varphi dx = \int_0^1 \varphi d\varphi = 0$; бо $\varphi(1) = 0$, що

відповідає граничним умовам закріплення струни,

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi \sin \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\psi d\psi = 0.$$

Отже, $\Phi_2(a) = 0$, то $A_1(a) = 0$. Звідки $\frac{da}{dt} = 0$ і тому $a = \text{const}$.

$$\Phi_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2a\beta\omega_0 \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} - \beta^2 a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] \varphi(x) \cos \psi dx d\psi =$$

$$= \frac{a}{\pi} \left\{ 2\beta\omega_0 \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \varphi(x) dx - \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \varphi dx \right\} = a\omega_0^2 \beta^2 \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$$

Тут $\int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0$, і $\int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \varphi(x) dx = 0$ (див. вище), а

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\psi) d\psi = \pi.$$

Оскільки $N = -2\omega_0 \int_0^1 \varphi^2(x) dx$, то $B_1(a) = \frac{\Phi_1(a)}{aN} = \frac{a\omega_0^2 \beta^2 \int_0^1 \varphi^2(x) dx}{-a\omega_0 \int_0^1 \varphi^2(x) dx} = \frac{\beta^2 \omega_0}{2};$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1 = \omega_0 - \frac{\beta^2 \omega_0}{2} = \omega_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right).$$

Отже, наближена частота коливань струни

$$\omega_I = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right). \quad (13)$$

Враховуючи, що $\omega_0 = k\pi$, знайдемо наближене значення періоду коливань струни

$$\tau_I = \frac{2\pi}{\omega_I} = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right)} = \frac{2}{1 - \frac{\beta^2}{2}}. \quad (14)$$

Точне значення періоду нелінійних коливань струни згідно з роботою [3] є

$$\tau = \frac{2}{1 - \beta^2}. \quad (15)$$

У таблиці наведено порівняння між точними [3] і наближеними значеннями періодів коливань струни для різних (безрозмірних) швидкостей поздовжнього руху струни.

Порівняння між точними [3] і наближеними значеннями періодів коливань струни для різних (безрозмірних) швидкостей поздовжнього руху струни

β	τ (точне)	τ (наближене)	Відносна похибка періодів коливань струни $\delta\%$
	$\tau = \frac{2}{1 - \beta^2}$	$\tau_I = \frac{2}{1 - \frac{\beta^2}{2}}$	$\delta = \frac{\tau - \tau_I}{\tau} \cdot 100\%$
0,1	2,020	2,010	0,495
0,2	2,083	2,040	2,064
0,3	2,197	2,094	4,68
0,4	2,380	2,173	8,697
0,5	2,666	2,285	14,29
0,6	3,125	2,439	21,952
0,7	3,921	2,649	32,44

0,8	5,555	2,941	47,05
0,9	10,526	3,361	68,06
1	∞	4	100

Перейдемо до розв'язування нелінійного рівняння (2). Для зручності застосування асимптотичного методу нелінійної механіки рівняння (2) подамо у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varepsilon f \left[2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]. \quad (16)$$

Знайдемо необхідні вирази:

$$N = -2\omega_0 \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 0; \quad u(x, t) = a\varphi(x) \cos \psi; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{d\varphi}{dx} \cos \psi; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = a^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \cos^2 \psi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \psi; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \cos^2 \psi \cdot a \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \psi = a^3 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos^3 \psi.$$

Для нелінійного випадку обчислимо вирази $\Phi_1(a)$ і $\Phi_2(a)$

$$\begin{aligned} \Phi_2(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2a\beta\omega_0 \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} - \beta^2 a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{\alpha^2} \cos^3 \psi \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] \varphi(x) \sin \psi d\psi dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3a^3}{2\alpha^2} \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \varphi(x) dx \int_0^{2\pi} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi = 0; \end{aligned}$$

$$\text{тому, що} \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi = - \int_0^{2\pi} \cos^3 \psi d(\cos \psi) = 0;$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2a\beta\omega_0 \sin \psi \frac{d\varphi}{dx} - \beta^2 a \cos \psi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{\alpha^2} \cos^3 \psi \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] \varphi(x) \cos \psi d\psi dx = \\ &= a\omega_0^2 \beta^2 \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \frac{3}{2} \frac{a^3}{\alpha^2} \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \varphi(x) dx \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \\ &= \frac{1}{2} a\omega_0^2 \beta^2 - \frac{9a^3 k^4 \pi^4}{64\alpha^2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \varphi(x) dx &= -k^4 \pi^4 \int_0^1 \cos^2 k\pi x \sin^2 k\pi x dx = -\frac{k^4 \pi^4}{4} \int_0^1 \sin^2 2k\pi x dx = \\ &= -\frac{k^4 \pi^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4\pi x) dx = \frac{k^4 \pi^4}{8}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\psi}{2} \right)^2 d\psi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2\psi + \cos^2 2\psi) d\psi = \frac{3}{4} \pi.$$

Отже,

$$\varepsilon B_1(a) = \frac{\Phi_1(a)}{aN} = -\frac{1}{2} \beta^2 \omega_0 + \frac{9}{64} \frac{a^2 k^4 \pi^4}{\alpha^2 \omega_0}.$$

Відповідно (12)

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{1}{2}\beta^2\omega_0 + \frac{9}{64}\frac{a^2k^4\pi^4}{\alpha^2\omega_0} = k\pi\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{9}{64}\frac{a^2}{\alpha^2}k^2\pi^2\right).$$

Отже, частота нелінійних коливань струни залежно від безрозмірної поздовжньої швидкості руху струни подається виразом

$$\omega_H = k\pi\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{9}{64}\frac{a^2}{\alpha^2}k^2\pi^2\right).$$

На рис. 1 показано зміну періоду коливань струни залежно від початкового натягу рухомої струни для різних швидкостей її руху, а на рис. 2 – залежність періоду коливань струни від швидкості її поздовжнього руху для $k=1,2,5$.

Обчислення проведені при таких параметрах струни: діаметр струни вибирався в межах $d = (0,1 \div 10) \cdot 10^{-3}$ м; початковий натяг – $P = 0,157 \div 1570$ Н; поздовжня швидкість руху струни $V = 5,2 \div 15$ м/с; $\rho = 7800$ кг/м³; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м².

На рис. 1 і 2 суцільною лінією позначено графічні залежності, отримані у роботі [3]; штриховою лінією – це результати обчислень у лінійній постановці, а штрихпунктирною лінією – одержані результати досліджень для нелінійних коливань рухомої струни.

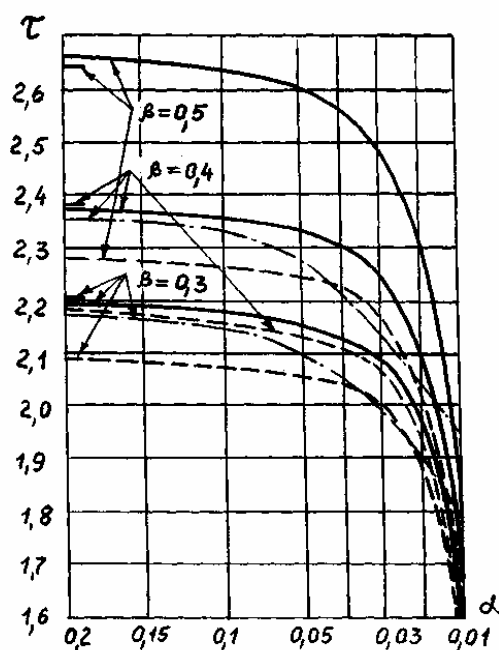


Рис. 1. Залежність основного періоду коливань струни від початкового натягу

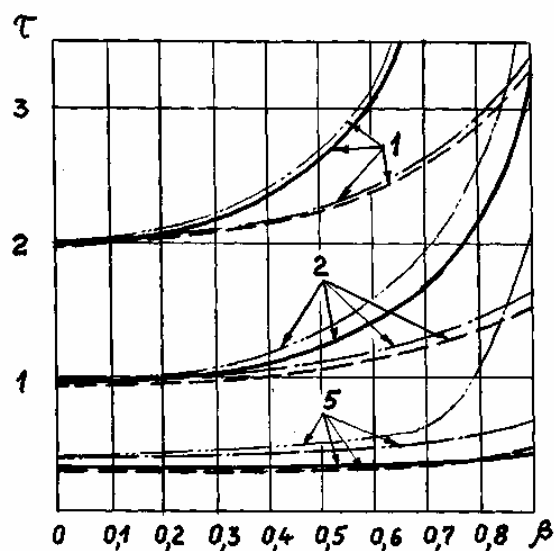


Рис. 2. Залежність періоду коливань струни від безрозмірної швидкості поздовжнього руху струни для різних значень k ($k=1,2,5$)

Одержані результати досліджень можуть бути використані в намотувальних станках для вибору оптимальних режимів їх роботи.

1. Викович И.А., Барвинский А.Ф. О собственных поперечных колебаниях консольного стержня с упругой связью // Вест. Львов. политехн. ин-та. – 1985. – № 187. – С. 16–18. 2. Митропольский Ю.А., Мойсеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 3. Моут Мл. О нелинейных колебаниях струны движущейся в продольном направлении // Тр. амер. об-ва инж. механиков. Прикл. мех. – М.: Мир, 1966. – 32. – Т. 33. – С. 180–182.