МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

УДК 62-492.2

А.Я. Голдак
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ТИХОНОВА ПІД ЧАС МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ РОЗМІРІВ ПОРОШКОПОДІБНИХ МАТЕРІАЛІВ

Holdak A.

TICHONOV REGULARIZATION METHOD IN SIMULATION OF MEASUREMENT OF POWDERS' PARTICLES SIZE DISTRIBUTION

Розглянуто метод регуляризації Тихонова в застосуванні до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, що виникає під час вимірювання розподілу розмірів частинок порошкоподібних матеріалів. Подано статистичні характеристики стійкості одержаних результатів.

The Tichonov regularization method applied to Fredholm equation of first kind which appears during particles size distribution measurement is considered. Statistical characteristics of stability of obtained results are revealed.

Вступ

Вимірювання характеристик порошкоподібних матеріалів є важливим у багатьох галузях науки та техніки. Вимірювання розмірів частинок необхідне під час виготовлення різноманітних клеїв, лаків, фарб, медичних препаратів тощо. Інформація щодо розмірів частинок потрібна також під час дослідження властивостей аерозолів, для визначення та контролю запиленості приміщень. У цій статті розглянуто моделювання визначення розмірів частинок, в сенсі знаходження функції густини ймовірності $\omega(a)$ випадкової величини *a*, де a – радіус частинки, для випадку вимірювання розмірів сферичних частинок. У першому наближені можна припустити, що форма частинок, які досліджуються, є сферичною. Моделювання вимірювання $\omega(a)$ ґрунтується на використанні оптичних методів, а саме на кутовій залежності інтенсивності розсіяного світла від властивостей самих частинок.

Постановка задачі

Необхідно визначити $\omega(a)$ для значень a, що знаходяться в межах від 1 до 20 мкм. Прикладом частинок, розміри яких є в цих межах, є аерозолі та високоякісні цементи [1]. Запропонована модель визначення $\omega(a)$ фактично не залежить від розмірів частинок, які досліджують. Межі зміни радіуса *a* були вибрані, враховуючи існуючі задачі вимірювання розмірів частинок цементів та аерозолів, а також зумовлені довжиною хвилі наявного He-Ne лазера $\lambda = 0.76$ мкм.

Всі параметри електромагнітної хвилі, які можна виміряти без застосування специфічного обладнання, зводяться до визначення складових вектора Стокса [2]. До його складу входять I – інтенсивність світла, та Q, U, V – складові, що визначають стан поляризації світлового променя.

Для визначення $\omega(a)$ достатньо володіти інформацією стосовно розподілу інтенсивності розсіяного світла залежно від кута спостереження.

Наступним кроком у визначенні функції $\omega(a)$ є розв'язання інтегрального рівняння, що пов'язує інтенсивність світла розсіяного всіма сферичними частинками з $\omega(a)$. Це рівняння має вигляд

$$\int_c^d K(\theta, a) \cdot \omega(a) \cdot da = I_S(\theta), \tag{1}$$

де $I_s(\theta)$ – індикатриса інтенсивності розсіяного світла залежно від кута θ, K(θ,a) – інтенсивність світла, розсіяного частинкою радіусом а при куті θ, c та d – межі зміни радіуса a.

Описаний в [3] метод розв'язання рівняння (1) є достатньо неефективний, громіздкий та потребує великої кількості експериментальних даних. Спробуємо розв'язувати рівняння методом регуляризації Тихонова [4, 5].

Теоретичні засади

Для моделювання просторової залежності розподілу інтенсивності або, іншими словами, індикатриси розсіяного світла, скористаємося результатами, одержаними в [3]

$$K(\theta, a) = \frac{k^2 \cdot E_0^2}{\omega^2 \cdot \mu^2 \cdot \rho^2} \left[|S_2|^2 \right] \tag{2}$$

де $S_1 = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \pi_n + b_n \tau_n \right)$, $S_2 = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \tau_n + b_n \pi_n \right)$, $\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin\theta}$, а $\tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta}$, де P_n^1 – приєднана функція Лежандра, $a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx)\left[x \cdot j_n(x)\right]' - \mu_1 j_n(x)\left[mx \cdot j_n(mx)\right]'}{\mu m^2 j_n(mx)\left[x \cdot h_n^1(x)\right]' - \mu_1 h_n^1(x)\left[mx \cdot j_n(mx)\right]'}$,

$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx)\left[x \cdot j_n(x)\right]' - \mu j_n(x)\left[mx \cdot j_n(mx)\right]'}{\mu_1 j_n(mx)\left[x \cdot h_n^{(1)}(x)\right]' - \mu h_n^{(1)}(x)\left[mx \cdot j_n(mx)\right]'}$, де μ– магнітна проникність середовища, j_n та h_n – нормовані сферичні функції Бесселя першого та третього роду відповідно, $m = \frac{N_1}{N}$, де N_1 та N – показники заломлення частинки та середовища відповідно; $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot N \cdot a}{\lambda}$, λ – довжина електромагнітної хвилі $\rho = kr$, де k – хвильовий вектор, r – координата r.

На цьому етапі досліджень ми володіємо лише неповною інформацію про $\omega(a)$. Відомо, що $\omega(a)$, визначена на проміжку від 0 до ∞, має скінченну кількість екстремумів; її значення не менші від нуля; вона обмежена згори деякою константою C та задовольняє умову нормування: $\int_0^\infty \omega(x)dx = 1$. Для моделювання скористаємося відомими розподілами, що мають вищеперелічені властивості. Такими розподілами є, наприклад: розподіли Накагамі, Релея, χ^2 тощо. В цій статті розглянуто розподіли Накагамі та χ^2 [6].

Розв'язуватимемо рівняння (1), застосовуючи метод регуляризації Тихонова [5]. Запишемо рівняння (1) у вигляді [5]

$$Ay = f, \tag{3}$$

де A – інтегральний оператор, y – шукана функція, що відповідає $\omega(a)$, f – відповідає $I_s(\theta)$ рівняння (1). Замість точних значень f відомі її наближення $\tilde{f}$ таке, що

$$\left\| \tilde{f} - f \right\|_{L_2} \le \delta, \tag{4}$$

де $\delta \ge 0$ – верхня оцінка аналога похибки правої частини рівняння (1).

У методі регуляризації Тихонова ставляться дві умови: мінімізація нев'язки $\left\|Ay-f\right\|_{L_2}^2$ та мінімізації норми розв'язку $\left\|y\right\|_{L_2}^2$. Це задача умовної мінімізації і її розв'язують методом невизначених множників Лагранжа, а саме [5]:

$$\left\|Ay-f\right\|_{L_2}^2+\alpha\left\|y\right\|_{L_2}^2=\min_y, \tag{5}$$

де $\alpha > 0$ – параметр регуляризації, що виконує значення невизначеного множника Лагранжа. З (5) випливає рівняння Тихонова

$$\left(\alpha L+A^*A\right)y_\alpha=A^*f, \tag{6}$$

де L має вигляд

$$Ly=q(a)y-\frac{d}{da}\left(p(a)\frac{dy}{da}\right), \tag{7}$$

де $p(a)$ та $q(a)$ деякі функції.

Запишемо рівняння (1) у вигляді (6)

$$\alpha\cdot\left(\omega_\alpha(a)-\omega''_\alpha(a)\right)+\int_c^d R\left(a,s\right)\cdot\omega_\alpha(s)ds=F(a), \tag{8}$$

де

$$R(a,s)=R(s,a)=\int_c^d K(\theta,a)\cdot K(\theta,s)d\theta; \tag{9}$$

$$F\left(a\right)=\int_c^d K(\theta,a)\cdot I_S\left(\theta\right)d\theta. \tag{10}$$

Існує кілька підходів до вибору параметра α. Розглянемо деякі з них: в [5] принцип узагальненої нев'язки, в [6] розглядається вибір певного "оптимального" значення α.

Згідно з принципом узагальненої нев'язки α вибирається так, що

$$\left\|Ay_\alpha-f\right\|_{L_2}=\delta \tag{11}$$

при $\left\|f\right\|_{L_2}\geq\delta$ розв'язок рівняння (11) щодо α існує і є єдиним.

У [7] стверджується, що α отримане за принципом нев'язки, призводить до занадто загладженого розв'язку y_α і пропонується шукати y_α при інших значеннях α. Проаналізувавши рекомендації в [7] щодо вибору α, запишемо межі, в яких доцільно шукати значення параметра α. Одержимо такий вираз:

$$\frac{\left\|y_\alpha-y\right\|_{L_2}}{\left\|y\right\|_{L_2}}\leq\left.\frac{\left\|y_\alpha-y\right\|_{L_2}}{\left\|y\right\|_{L_2}}\right|_{\alpha=\alpha_{nev}} \tag{12}$$

де y – точний розв'язок рівняння (1), α_{nev} – значення α, визначене за принципом нев'язки.

Шукатимемо розв'язок рівняння (1) при такому значенні $\alpha=\alpha_{opt}$, за якого функціонал $\dfrac{\left\|y_\alpha-y\right\|_{L_2}}{\left\|y\right\|_{L_2}}$ досягає свого мінімального значення в межах (12).

Звичайно, точне значення y ми знаємо лише у випадку математичного моделювання, але знаючи приблизний вигляд шуканої функції y, можемо визначити не точне значення α_{opt}, а певне наближення до нього, що все одно потраплятиме в межі "помірних" значень α, тобто близько до мінімуму (12).

Моделювання

Праву частину рівняння (1) отримують, вимірюючи індикатрису розсіяного частинками світла. На етапі математичного моделювання можна лише розрахувати індикатрису розсіяного світла.

Для обчислення $I_S(\theta)$ перейдемо до дискретного аналогу рівняння (1), використавши одну з квадратурних формул. Для спрощення виберемо формулу прямокутників. Потрібно зазначити, що вибір квадратурної формули не порушує загальності, оскільки під час моделювання похибка від апроксимації рівняння (1) будь-якими квадратурними формулами дорівнює нулю.

Після розрахунку $I_S(\theta)$ введемо певне збурення. Отриману залежність позначимо $\tilde{I}_S(\theta)$.

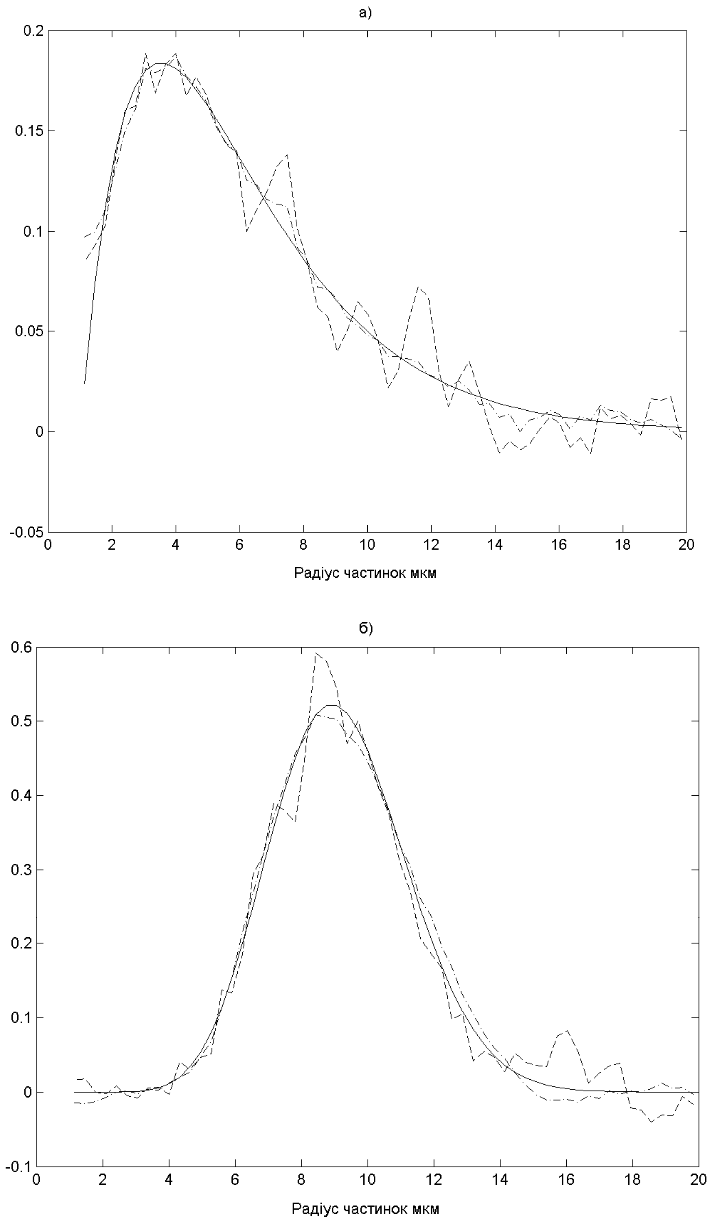
Існує кілька можливостей збурення $I_S(\theta)$:

а) додавати до кожного значення $I_S(\theta)$ випадкову величину, розподілену за певним законом, що змінюється в межах $\tilde{I}_S(\theta_i) = I_S(\theta) \pm \gamma \cdot \max(I_S(\theta))$;

б) додавати до кожного значення $I_S(\theta)$ випадкову величину, розподілену за певним законом, що змінюється в межах $\tilde{I}_S(\theta_i) = I_S(\theta_i) \pm \gamma \cdot I_S(\theta_i)$;

де δ – значення відносної похибки; $\max(I_S(\theta))$ – найбільше значення інтенсивності розсіяного світла; $I_S(\theta_i)$ – і-те значення I_S.

На нашу думку найбільше фізично правдоподібним є варіант “б”.



Розв’язки рівняння (1) для випадку коли $\omega(a)$ зображена:
а – розподілом χ^2; б – розподілом Накагамі

Далі розв'язуватимемо рівняння (1), використовуючи $\tilde{I}_S(\theta)$ методом регуляризації Тихонова. Випадкову величину γ вважатимемо розподіленою за рівномірним законом у межах ±2%. Під час визначення $\omega(a)$ нас найбільше цікавитиме такий інтервал значень $a \in [a_1, a_2]$, на якому

$$\int_{a_1}^{a_2} \omega(a)da \approx 0.90 \tag{13}$$

тобто відкинемо значення $\omega(a)$ в області "хвостів".

Як видно з рисунка, метод регуляризації Тихонова дає кращі результати при α_{opt} . Проте не відомо яку стійкість має розв'язок рівняння (1), у разі заміни α визначеного за методом нев'язки при α_{opt}. Спробуємо дослідити це так. Проведемо серію моделювань вимірювання $\omega(a)$, при цьому завада – випадкова величина γ з зазначеними вище властивостями, генерується для кожного вимірювання окремо. Значення α_{opt} визначимо лише один раз під час першого експерименту та його використовуватимемо і надалі. Знаючи точне значення $\omega(a)$, обчислимо похибки для такого інтервалу значень *a*, на якому приблизно виконується умова (13). Опрацюємо статистично отримані похибки. Було проведено 5002 симуляції визначення $\omega(a)$. Результати обробки отриманих даних наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати статистичного нагромадження похибок вимірювання $\omega(a)$

	Діапазон значень похибки визначення $\omega(a)$				
	±25%	±20%	±15%	±10%	±5%
	Кількість похибок, що попали в заданий діапазон, %				
Розподіл χ^2	94,89	91,34	85,28	73,76	50,15
Розподіл Накагамі	99,49	98,52	95,91	88,93	67,48

Спробуємо покращити отримані результати, проводячи попереднє статистичне опрацювання, а саме усереднення виміряних значень $\tilde{I}_S(\theta)$, так:

$$M\left(\tilde{I}_S(\theta_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{I}_S\left(\theta_{i_q}\right) \tag{14}$$

де *n* – кількість вимірювань $\tilde{I}_S(\theta)$.

Таблиця 2

Результати застосування усереднення вхідних даних під час подання $\omega(a)$ розподілом χ^2

Кількість усереднень	Діапазон значень похибки визначення $\omega(a)$			
	±20%	±15%	±10%	±5%
	Кількість результатів, похибки яких попали в заданий діапазон, %			
10	9.689	9.323	8.571	6.869
30	9.916	9.745	9.264	7.825
50	9.974	9.885	9.550	8.331

Таблиця 3

Результати застосування усереднення вхідних даних під час подання $\omega(a)$ розподілом Накагамі

Кількість усереднень	Діапазон значень похибки визначення $\omega(a)$			
	±15%	±10%	±5%	±3%
	Кількість результатів, похибки яких попали в заданий діапазон, %			
10	9.914	9.630	8.342	6.420
30	9.979	9.854	8.980	7.361
50	—	—	9.609	8.731

Як видно з табл. 2, 3 усереднення вхідних даних дає змогу зменшити похибку визначення $\omega(a)$.

Той факт, що при різних видах розподілів точність визначення $\omega(a)$ є різною, свідчить про необхідність попереднього калібрування приладу для кожного виду розподілу.

Висновки

Спираючись на результати, одержані в статті, можемо стверджувати, що метод регуляризації Тихонова є ефективним для визначення розподілу розмірів частинок та дає ліпші результати, ніж метод, запропонований в [3]. Статистичне усереднення початкових результатів дає змогу досягнути потрібної точності вимірювання $\omega(a)$.

1. http://www.uni-weimar.de/Bauing/aufber/Literatur/Stark-Mueller-Durban03.pdf. 2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – Москва: Мир, 1986. 3. Голдак А.Я., Шаповалов Г.О. Модель процесу вимірювання розмірів порошкоподібних матеріалів // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львів. – 2006. – Вип. 66. 4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. 5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. 1979. 6. Сизиков В.С. Устойчивые методы обработки результатов измерений. – СПб, 1999. 7. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М., 1989.

УДК 548.0:535.511

Б.В.Тибінка, І.П.Островський, А.С.Андрущак
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра телекомунікацій

АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ ЗАЛОМЛЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛАСТИН ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ІНТЕРФЕРОМЕТРИЧНО-ПОВОРОТНИМ МЕТОДОМ

B.V. Tybinka, I.P. Ostrovskiy, A.S. Andrushchak

AUTOMATIZAITON OF REFRACTIVE INDEX MEASUREMENT OF PARALLEL-SIDED PLATES FROM OPTICAL MATERIALS BY INTERFEROMETRIC TURNING METHOD

Створена автоматизована установка для вимірювання показників заломлення оптичних матеріалів інтерферометрично-поворотним методом. Установка апробована на прикладі одновісного кристалу $LiNbO_3$. Внаслідок проведених вимірювань одержані такі параметри: n_o=2.2865±0.0007, n_e = 2,2034±0,0007 (для довжини світлової хвилі λ=0,6328 мкм), які добре узгоджуються з літературними даними.

Automatizational equipment for refractive indices measurement of optical materials by interferometric-turning method was designed. The equipment is approbated on example of uniaxial crystal $LiNbO_3$. As a result of measurements the following parameters were obtained: n_o=2.2865±0.0007, n_e = 2,2034±0,0007 (for wavelength λ=0,6328 μm), which are in good agreement with literature data.

Вступ

Показник заломлення – це один із основних параметрів оптичних матеріалів, знання якого необхідне для вирішення низки фізичних задач як фундаментального, так і прикладного значення.