задачі Герца. – Підйомно-транспортна техніка, 2002. – № 1, 2. – С. 53–59. 7. Римар О.М., Римар М.О. Зв'язок між нормальними напруженнями для задачі Герца // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2001. – № 442. – С. 80–86. 8. Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.М. Основы и методы прикладной теории упру гости. – К.: Вища шк., 1981. – 328 с.

УДК 517.9+534.111

А.М. Сліпчук
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра технології машинобудування

ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ СТАЛЕВОЇ НИТКИ, ЯКА РУХАЄТЬСЯ ІЗ ЗМІННОЮ ШВИДКІСТЮ, ТА МЕТОДИ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

У межах уточненої моделі розглядаються поперечні коливання одновимірних пружних систем (канату, струни, линви), які рухаються уздовж своєї недеформованої осі зі змінною швидкістю. Отримано диференціальне рівняння, яке описує динамічні процеси у зазначених одновимірних системах; запропоновано методику його дослідження. Вона дає змогу отримати залежності для визначення впливу фізико-механічних і кінематичних характеристик системи на амплітуду і частоту її коливань. Визначення оптимального закону зміни швидкості руху каната.

In borders of the specified model the transversal vibrations of the unidimensional resilient systems (to the rope, strings, tow-lines), which move along the undeformed axis variable-speed, are examined. Differential equalization which describes dynamic processes in noted unidimensional system is got; offered method of his research. It allows to get dependences for determination of influence physic-mathematical and kinematics descriptions of the system on amplitude and frequency of its vibrations.

Постановка проблеми. Із швидким розвитком техніки все частіше необхідно роз'язувати багато прикладних задач, які можна віднести до динаміки гнучких стрижнів і ниток [1–4]. Такі динамічні процеси виникають при намотуванні дроту, нитки, прокату, у певному наближенні рух носіїв інформації на стрічках, конвеєрні лінії. При невеликих швидкостях руху, а для деяких процесів навіть при значних швидкостях, нехтувати динамічними ефектами рухомої системи не можна.

Вказані вище механічні системи будемо вивчати на прикладі однорідної пружної нитки з постійним поперечним перерізом. Для того, щоб одержати диференціальне рівняння, що описує динамічний процеси в такому пружному одновимірному середовищі, введемо такі позначення: F – площа поперечного перерізу нитки; $\mathrm{S}(\mathrm{x})$ – натяг каната в перерізі з координатою x; m – маса одиниці довжини каната; E – модуль пружності.

Нехай система координат XOY нерухома, її початок збігається з лівим кінцем, а вісь OX збігається з недеформованим його положенням (див. рис. 1) [5, 6].

Позначимо: $u(x,t)$ – переміщення перерізу каната з координатою x в довільний момент часу t в напрямку, перпендикулярному до осі OX ; ΔS – додатковий натяг каната, зумовлений подовженням ділянки довжиною d_x; Δdx – зміна довжини елементу каната при коливаннях

($\Delta dx = dx - dx\cos\chi \approx dx\dfrac{\chi^2}{2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u' \approx \chi$); $R\left(u, \dfrac{du}{dt}\right)dx$ – рівнодійну сил опору та інших дисипативних сил, які діють на елемент каната завдовжки dx . Відносна деформація $\dfrac{\Delta dx}{dx}$ по всій довжині каната також буде незмінною, адже величина натягу каната постійна, а загальне його подовження обчислюється за формулою

$$\Delta l = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \ . \tag{1}$$

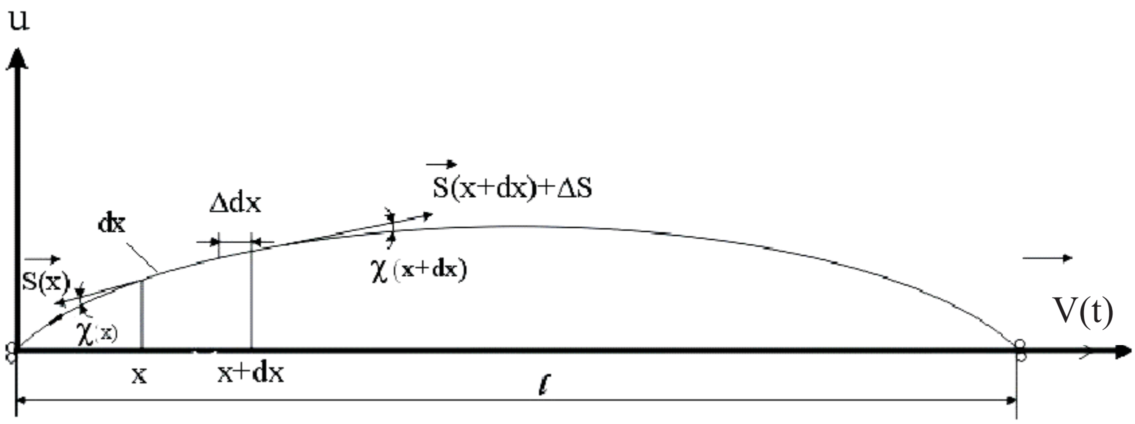

Рис. 1. Розрахункова модель і схема сил, що діють на елементарну довжину струни

Додатковий натяг каната, зумовлений його подовженням, дорівнює

$$\Delta S = \frac{EF}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \ , \tag{2}$$

використовуючи для умовно виділеного елемента довжиною dx принцип Даламбера в проекції на вісь OY, одержимо

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = (S + \Delta S)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R\left(u, \frac{du}{dt}\right) , \tag{3}$$

де $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x = x + dx} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x = x}$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Динамічні процеси, що існують в одновимірних нелінійно-пружних системах з незмінними геометричними і фізико-механічними характеристиками, вивчено достатньою мірою у випадку, якщо така система рухається уздовж своєї геометричної осі з постійною швидкістю [5, 6]. Однак багато практичних задач (пристрої для витяжки і намотування дроту, які мають змінну лінійну швидкість) вимагають при їх дослідженні уточнених підходів вивчення впливу руху середовища на динаміку процесу. Нижче розглядається задача, яка поєднує такі фактори: середовище рухається уздовж своєї осі зі швидкістю, яка змінна у часі, також враховуються його пружні характеристики.

Формулювання мети дослідження. Отже, основним завданням вирішення цієї проблеми є встановлення закону зміни амплідути лінійних поперечних коливань системи, які рухаються зі змінною швидкістю вздовж своєї осі. Необхідно отримати залежності параметрів коливання не тільки від фізико-механічних (модуля пружності) та геометричних (довжина, діаметр) величин, але і від впливу змінної швидкості руху. За законом зміни швидкості поперечного руху системи (нитки, струни) ми можемо знайти амплітуду коливання в кожний момент часу.

Викладення основного матеріалу дослідження. Для випадку нитки, яка рухається уздовж осі OX із змінною швидкістю, символи першої $\frac{d}{dt}$ і другої похідних за часом $\frac{d^2}{dt^2}$ визначаються залежностями

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{dx}{dt}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Підставляючи (1), (2), (4) у диференціальне рівняння (3), одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{EF}{2ml}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx-V^2(t)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2V(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{1}{m}R\left(u,\frac{du}{dt}\right), \tag{5}$$

де $\alpha^2=\frac{S}{m}$.

Отже, динамічні процеси у пружному канаті, який рухається вздовж своєї геометричної осі із змінною швидкістю, описується диференціальним рівнянням (5).

Для вивчення впливу додаткового подовження, а також руху каната на амплітудно-частотну характеристику його коливань будемо вважати:

а) у точках A і B відсутнє переміщення каната у напрямку осі OY, а це означає, що для диференціального рівняння (5) мають місце крайові умови

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})\big|_{\mathrm{x}=0}=\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})\big|_{\mathrm{x}=l}=0; \tag{6}$$

б) величина додаткового натягу каната зумовлена його видовженням, є малою порівняно із початковим натягом на його кінцях (це дає змогу стверджувати, що $\Delta S<<S$, а отже, $\alpha^2>>\frac{EF}{2ml}$);

в) сили опору та дисипативні сили є малими порівняно із натягом каната;

г) швидкість переміщення каната вздовж осі OX є незначною: $V<<\alpha$.

Наведені допущення дають змогу стверджувати, що максимальна величина правої частини диференціального рівняння (5) є значно меншою від величини коефіцієнти $\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Згідно із останнім розглянемо спочатку крайову задачу для незбуреного рівняння (5), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{7}$$

при крайових умовах (6).

Одночастотні розв'язки рівняння (7) при однорідних крайових умовах (6) набувають вигляду

$$u(x,t)=\sin\frac{k\pi x}{l}T(\omega t+\varphi),\ k=1,2,... \tag{8}$$

де φ – стала, яка, як і функція $T(\omega t+\varphi)$, визначається залежно від початкових умов, $\omega=\frac{k\pi}{l}\alpha$.

Треба зазначити, що система функцій $\{X_k(x)\} = \left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$ має властивість повноти і ортонормованості. Остання властивість функцій , які описують форми коливань незбуреної крайової задачі, значно спрощує процедуру знаходження впливу додаткового подовження; швидкості руху та дисипативних сил на динаміку одночастотного процесу каната. Відомо [4], що наявність сил опору та інших дисипативних сил у нелінійних механічних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами є причиною загасання коливань із вищими частотами і встановлення у них коливань із однією частотою, яка у більшості випадків близька до першої основної частоти частотного спектра. Тому знайдемо співвідношення, які визначають закони зміни амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) коливань каната у формах, близьких до першої основної частоти незбуреної системи. Для цього, помноживши обидві частини диференціального рівняння (5) на $\sin\frac{\pi}{l}x$ і зінтегрувавши отримані вирази в межах від 0 до l, отримаємо звичайне лінійне диференціальне рівняння

$$\ddot{T} + \left(\alpha^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - V^2(t)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right)T + \beta T^3 + r(T,\dot{T}) = 0 \ , \qquad (9)$$

де $\beta = \frac{EFl}{4\pi}$, $r(T,\dot{T}) = \frac{2}{l}\int_o^l F\left(aT\sin\frac{\pi x}{l}, a\dot{T}\sin\frac{\pi x}{l}T\right)\sin\frac{\pi x}{l}dx$.

Розглянемо вплив подовження і швидкості руху каната на частоту його власних коливань, тобто розглянемо диференціальне рівняння (9) для випадку $r(T,\dot{T}) \equiv 0$. Для цього приймемо такі параметри $E=2{,}06*10^{11}$Н/м^2, l=10м, F=12,56мм^2, ρ=0,099 кг/м, H=100H, T=20000H, тоді частота коливання струни $\omega = 101$Гц. Отримані результати розрахунків представлені на рис. 2 для закону зміни швидкості *V=20cos(3t)*, на рис. 3 – для *V=20sin(3t)*, а на рис. 4 – для *V=20t.*

Отже, за законом зміни швидкості переміщення нитки вздовж своєї осі ми можемо визначити величину амплітуди в кожний момент часу, тобто знайдено закон зміни амплітуди. Зокрема, бачимо з рис. 2, 3, 4, що при зростанні часу амплітуда коливання зростатиме аж до резонансу. Оскільки не враховано внутрішніх сили тертя та сил опору, то амплітуда зростатиме до безмежності або до розриву нитки. Маючи диференціальне рівняння (9), інженер може підібрати оптимальний закон зміни швидкості (тобто такий, що відповідає найменшій амплітуді коливання) та реалізувати його на практиці.

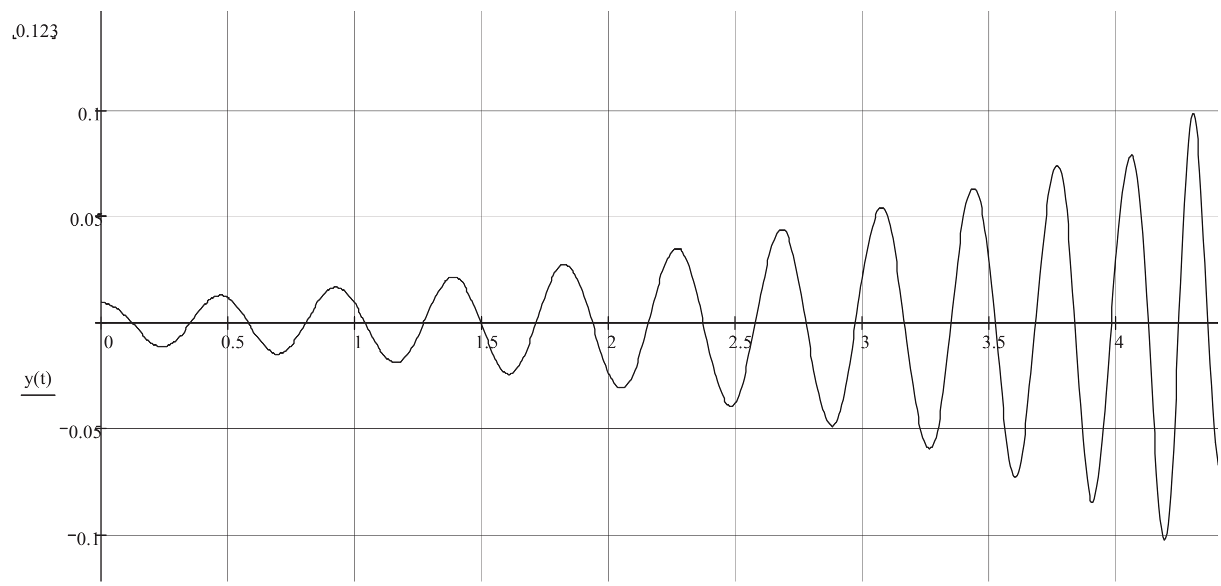

Рис. 2. Залежність амплітуди коливання сталевої нитки від часу (V = 20cos(3t)

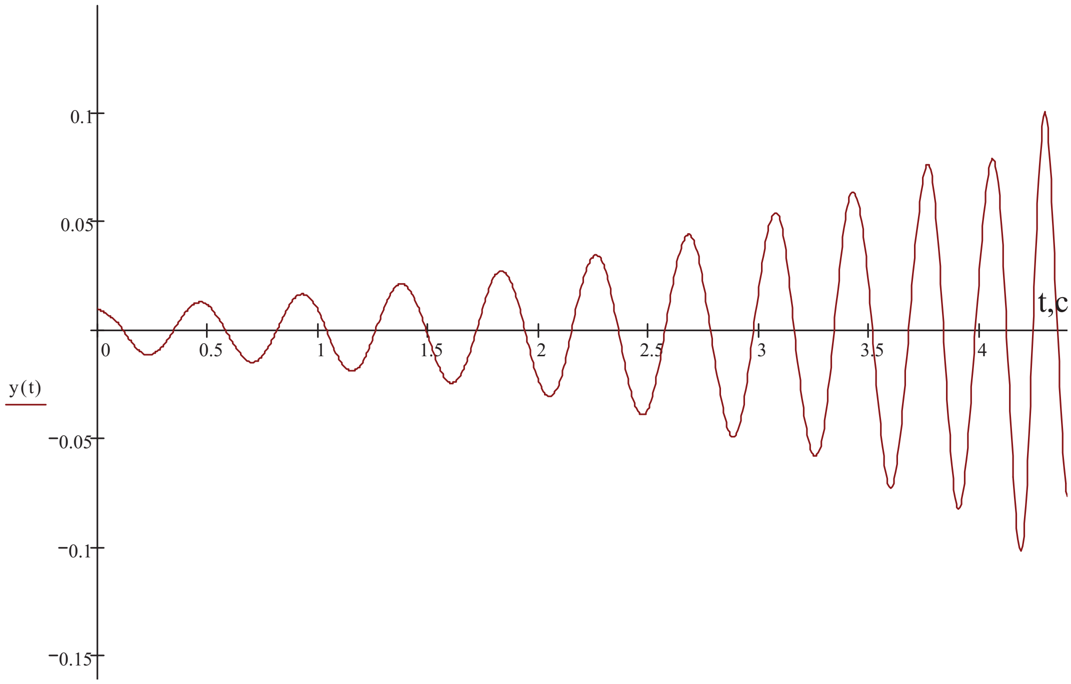

Рис. 3. Залежність амплітуди коливання сталевої нитки від часу (V = 20sin(3t))

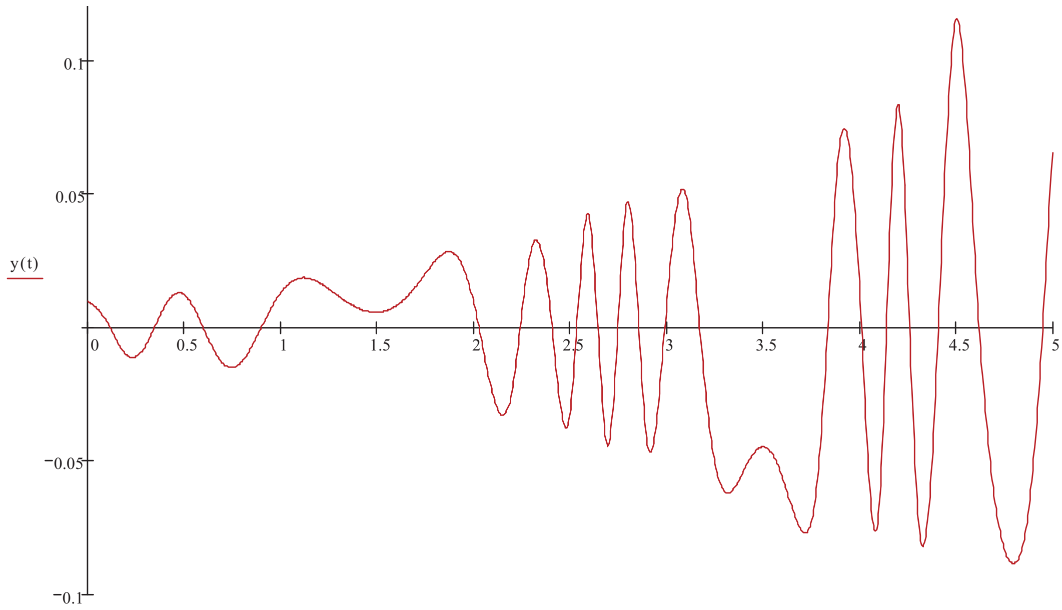

Рис. 4. Залежність амплітуди коливання сталевої нитки від часу (V=20t))

Висновки. Характер зміни амплітуди коливання при *V=20cos(3t)* та *V=20sin(3t)* буде однаковий. Величина амплітуди поперечних коливань буде меншою на 23 % ніж при швидкості *V=20t*.

1. Найфэ А. Х. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976. – 456 с. 2 .Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 3. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 4. Митропольский Ю.А, Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с. 5. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого каната і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, *паперова і деревообробна промисловість. – Львів, 2003. – № 28. – С. 89–94. 6. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 509: Динаміка, міцність та проектування машин та приладів. – С. 25–30.*

УДК 534.1+ 62-5

М.Б. Сокіл, О.І. Хитряк, В.Г. Топільницький*
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів,
*кафедра електронного машинобудування

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИЛОВИХ ЧИННИКІВ, ЩО ЗУМОВЛЮЮТЬ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ШВИДКІСТЮ РУХУ

Викладено методику розв’язування обернених задач нелінійних коливань одновимірних тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. В її основу покладено: основні ідеї методів Бубнова–Гальоркіна та асимптотичного методу нелінійної механіки; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; ідею представлення заданого дискретного закону зміни амплітуди та частоти коливань динамічного процесу систем за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.

It is described one approach to solving inverse problems of dynamics for nonlinear vibration of one-dimensional solids, which have the permanent rate of longitudinal movement. It is based on the basic idea of the Bubnov-Galerkin and the asymptotic method of nonlinear mechanics; on the principle of a single frequency of oscillations in nonlinear systems, on the idea of representation a given discrete law of changes the amplitude and frequency of oscillations in the dynamic process using ordinary differential equations.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. У різних галузях промисловості широкого застосування набули коливальні одновимірні нелінійно-пружні механічні системи з розподіленими масами та зосередженими параметрами, рух яких відбувається вздовж деякої недеформівної осі, наприклад, найрізноманітніші підйомно-транспортні механізми, конвеєри тощо. Для створення оптимальних конструкцій та розрахунку даних механічних систем, зокрема засобами автоматизованих систем функціонального, конструкторського та технологічного проектування, актуальною задачею є їх адекватне математичне представлення та моделювання. Дослідження динамічних процесів для випадку нелінійних моделей механічних систем, які характеризуються поздовжнім рухом [1–5], пов’язане із значними труднощами [6], оскільки для їх побудови не вдається застосувати класичні методи інтегрування рівнянь з частинними похідними. В аналітичному описі цього коливного процесу фігурує мішана похідна за координатною та часовою змінними. Не менш важливими, проте набагато складнішими є обернені задачі, тобто визначення відповідно до заданого закону руху об’єкта силових чинників, які виникають в системі або діють на неї ззовні та спричиняють відповідний закон її руху. Відсутність загальних підходів до розв’язання таких задач викликана труднощами побудови і дослідження їх розв’язків [7] для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які є математичними моделями опису динамічних процесів в одновимірних нелінійно-пружних механічних системах з розподіленими масами та зосередженими