

О. С. Ланець¹, О. Ю. Качур¹, В. М. Боровець¹,
П. Р. Дмитерко¹, І. А. Деревенько¹, А. Я. Зварич²

¹ Національний університет “Львівська політехніка”,

² Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

ВСТАНОВЛЕННЯ ВЛАСНОЇ ЧАСТОТИ КONTИНУАЛЬНОЇ ДІЛЯНКИ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ ВІБРОМАШИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ НАБЛИЖЕНОГО МЕТОДУ РЕЛЕЯ–РІТЦА

© Ланець О. С., Качур О. Ю., Боровець В. М., Дмитерко П. Р.,
Деревенько І. А., Зварич А. Я., 2020

<https://doi.org/10.23939/istcipa2020.54.005>

Мета. Полягає у встановленні першої власної частоти континуальної ділянки у вигляді стрижня (тіла з розподіленими параметрами) міжрезонансної вібраційної машини. **Методика.** Робота базується на фундаментальних методах механіки, зокрема теорії механічних коливань. Власні частоти та реакції в опорах континуальної ділянки знаходили за методом початкових параметрів, застосовуючи функції Крилова та метод Релея–Рітца. **Результати.** У роботі розглянуто дискретну модель міжрезонансної вібраційної машини і встановлено парціальну частоту її реактивної маси, яка і є вихідним параметром, який має забезпечити континуальна ділянка. З використанням аналітичних методів сформоване частотне рівняння континуальної ділянки. Знайдено значення її першої власної частоти, яка практично збіглася з парціальною частотою дискретної моделі. Континуальну ділянку у вигляді стрижня змодельовано у програмному продукті SOLIDWORKS Simulation. **Наукова новизна.** Вперше обґрунтовано найоптимальнішу схему кріплення континуальної ділянки у вигляді пружного стрижня, що встановлений на двох шарнірних опорах, один з кінців якого консольно закріплений, а другий приводиться в рух від ексцентрика. Вперше з використанням методу Релея–Рітца аналітично знайдено власну частоту континуальної ділянки, що є визначальним параметром для синтезу міжрезонансних дискретно-континуальних вібраційних машин, в яких було узгоджено парціальну частоту дискретної моделі із значенням першої власної частоти стрижня. **Практична значущість.** Встановлені аналітичні вирази дозволять сформулювати ефективну концепцію побудови інженерної методики розрахунку дискретно-континуального вібраційного технологічного обладнання різноманітного технологічного призначення, здатного ефективно реалізовувати міжрезонансні режими роботи. Достатня точність запропонованих аналітичних виразів сприяє їх широкому використанню на практиці.

Ключові слова: міжрезонансна вібраційна машина, дискретно-континуальна система, метод Релея–Рітца, власна частота тіла.

Вступ. Сьогодні вібраційні технології поширені у всіх галузях промисловості. Вібраційні машини як технологічне обладнання забезпечують ефективні режими роботи, володіють низькою собівартістю. Ще з XIX століття розвивалися методи розрахунку та базові конструкції широкого класу вібраційних машин. З того часу пір в промисловості найбільшого поширення отримали одномасові конструкції з інерційним приводом та двомасові резонансні, переважно з електромагнітним, ексцентриковим та інерційним приводами.

Аналіз літературних джерел за темою статті. Розвиток промисловості, сучасні тенденції енергозбереження передбачають пошук нових рішень у створенні високоефективного вібраційного технологічного обладнання. Ще в кінці 40-х років XX століття в США з'являється перша згадка про

тримасову вібраційну машину, авторами якої є William W. Triggs та американська компанія “The Traylor Vibrator Company” [24, 25]. З того часу такі вібраційні машини набули масового поширення в промисловості. Можна виділити розробки таких науковців: John C. O'Connor [10], Joseph W. Sherwen [12, 13], Arthur W. Forman [4], Gulertan Vural та Albert Linz [6], Franklin C. Pereny [5], Mikata Yoshitaka і Higuchi Sunao [15], Mikata Yoshitaka та ін., [14], Albert R. Probert [3], Richard B. Kraus [19], Mouldsdale Timothy та ін., [16], Wang Yun [22]. Проте автори не запропонували ефективного розрахунку тримасових міжрезонансних вібраційних машин, що не дозволило повноцінно розкрити їх потенціал.

Методика розрахунку дискретних міжрезонансних тримасових вібраційних машин наведена в [17]. Згідно з поданою методикою, конструктивно задавшись інерційними параметрами мас m_1 , m_2 та двома власними коловими частотами $\Omega_{\theta 1}$ та $\Omega_{\theta 2}$ тримасової коливальної системи, встановлено масу m_3 та значення жорсткостей c_{12} й c_{23} двох резонансних пружних систем, що і забезпечуватимуть заданий режим роботи системи.

Тримасові міжрезонансні вібраційні машини є перспективними для подальших досліджень, де існує необхідність у створенні нових структур коливальних систем, які можуть ефективно забезпечувати високоефективні режими роботи. В таких конструкціях вібраційних машин (John M. Morris [11], Jakhin B. Popper та Kyriat Motzkin [8], William R. Brown [23], Thomas H. Falconer [21], Peter T. Jones та Kennewick [18]) помітна тенденція до зменшення інерційного значення реактивної маси, що дозволяє їм ефективно використовувати енергоощадні міжрезонансні режими роботи.

Отже, підсумовуючи, можна стверджувати, що для підвищення енергоощадності систем у високоефективних системах реактивна маса та жорсткість відповідного пружного вузла повинні бути надмалими. Такими властивостями може володіти лише гнучке тіло, тобто континуальна система, яка оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри.

У літературі зустрічаються різноманітні підходи у розрахунку власних частот стрижнів. Так, A. Buchacz [1, 2] застосовує теорію графів. Проте, найпоширенішим є застосування класичних методів, що базуються на розв'язку диференціального рівняння пружних коливань. Для опису стрижня, що є об'єктом досліджень у нашій статті, ми користуватимемося саме класичною теорією коливань прямих пружних стрижнів.

Мета. Мета роботи полягає у встановленні першої власної частоти континуальної ділянки у вигляді стрижня (тіла з розподіленими параметрами) міжрезонансної вібраційної машини.

Методика проведення досліджень. *Наближений метод встановлення власних частот стрижня. Метод Релея–Рітца.*

Метод базується на тому, що кінетична енергія K_c та потенціальна Π_c пружного стрижня однакові [7, 9]. Тобто:

$$K_c = \Pi_c. \quad (1)$$

Кінетична енергія K_c стрижня складається з кінетичної енергії K_{cn} від переміщення по координаті y та від повертання K_{co} на кут θ . Тому:

$$K_c = K_{cn} + K_{co}, \quad (2)$$

де

$$K_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} v(x)^2 dx; \quad (3)$$

$$K_{co} = \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) v_k(x)^2 dx, \quad (4)$$

де J_{cn} – момент інерції одиниці довжини стрижня (погонні одиниці); $v(x)$ та $v_k(x)$ – лінійна та кутова швидкість як функція від x ; m_{nm} – погонна маса, яку визначають як:

$$m_{nm} = \rho h b_n. \quad (5)$$

Якщо закон руху гармонічний, як прийнято в диференціальному рівнянні поперечних коливань стрижня, що описується функцією $\partial \eta(x, t)$ [9], то можна записати:

$$v(x) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \omega w(x) \sin \omega t, \quad (6)$$

де ω – колова частота коливань стрижня; $w(x)$ – зміщення поперечного перерізу стрижня у вертикальному напрямку (вздовж осі y) залежно від координати x (по довжині пружного стрижня).

Зміщення поперечного перерізу стрижня $w(x)$ можна подати як [7, 20]:

$$w(x) = A \cos(\xi x) + B \sin(\xi x) + C \operatorname{ch}(\xi x) + D \operatorname{sh}(\xi x), \quad (7)$$

де A , B , C та D – чотири довільні постійні, які підбирають так, щоб для функції (7) виконувались крайові умови, тобто умови закріплення кінців стрижня (ділянок стрижня).

Рівняння (7) зручно шукати у вигляді:

$$w(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + C \cdot U(\xi x) + D \cdot V(\xi x), \quad (8)$$

де $S(\xi x)$, $T(\xi x)$, $U(\xi x)$ і $V(\xi x)$ – комбінації кругових і гіперболічних функцій (функції Крилова);

$$\xi = 4 \sqrt{\frac{m_{nm} \omega^2}{E J_z}}, \quad (9)$$

де E – модуль пружності I роду; J_z – момент інерції поперечного перерізу стрижня відносно нейтральної лінії перерізу (головної центральної осі z перерізу); $E J_z$ – жорсткість поперечного перерізу стрижня.

Оперуючи амплітудними значеннями, вираз (11) запишемо як:

$$v(x) = \omega w(x), \quad (10)$$

За аналогією (до виразу (16)) кутова швидкість провертання ділянки стрижня становить:

$$v_k(x) = \omega \theta(x) = \omega \frac{dw(x)}{dx}. \quad (11)$$

Підставляючи (10) до (3), кінетична енергія K_{cn} від переміщення по координаті y визначається як:

$$K_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} \omega^2 w(x)^2 dx, \quad (12)$$

Підставляючи (11) до (4), кінетичну енергію від провертання K_{co} на кут $\theta(x)$ визначаємо як:

$$K_{co} = \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) \omega^2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (13)$$

де погонний момент інерції як функція від x , розглядаючи тіло як стрижень, запишемо так:

$$J_{cn}(x) = \frac{\rho h b_n}{3} x^2 = \frac{m_{nm}}{3} x^2. \quad (14)$$

Підставляючи (12), (13) до (2), повну кінетичну енергію визначаємо як:

$$K_c = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} \omega^2 w(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) \omega^2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (15)$$

Потенціальну енергію зігнутої осі стрижня Π_c визначаємо як

$$\Pi_c = \Pi_{cz} + \Pi_{cd}, \quad (16)$$

де

$$\Pi_{cz} = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_z \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (17)$$

– потенціальна енергії сили згинання;

$$\Pi_{cd} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \left(\frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx \quad (18)$$

– потенціальна енергія від зсуву в шарах стрижня; G – модуль пружності II роду; F_c – площа поперечного перерізу стрижня (постійна по довжині стрижня); $Q(x)$ – розподіл поперечних сил по довжині стрижня; k_y – коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу [20].

Тож, сумарна потенціальна енергія (16) становитиме:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} EJ_z \int_0^L \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left(\frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (19)$$

Порівнявши кінетичну енергію K_c стрижня (215) та його потенціальну енергію Π_c (19), власну частоту Ω_θ коливань стрижня визначаємо як:

$$\omega = \Omega_\theta = \sqrt{\frac{EJ_z \int_0^L \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left(\frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx}{m_{nm} \int_0^L w(x)^2 dx + \int_0^L J_{cn}(x) \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx}}. \quad (20)$$

Наближений метод встановлення власних частот стрижня як тіла з розподіленими параметрами.

Наближений метод встановлення власних частот стрижня, конструктивну схему кріплення якого зображено на рис. 1. Оскільки розглядаємо континуальну систему, тіло якої має розподілені параметри, то кінетична K_c та потенціальна Π_c енергії будуть визначатися відповідно за виразами (15) та (19).

Згідно з розрахунковою схемою лівий кінець є вільним і в ньому присутні поперечні переміщення $w(x)$ та кут повороту $\theta(x)$. Згинальний момент $M(x)$ та поперечна сила $Q(x)$ відсутні

[7, 20]. Тоді загальне рівняння (вираз (7)) на лівій ділянці ($0 \leq x \leq L_1$), з використанням початкових умов, набуде вигляду:

$$w_{\text{лів}}(x) = \frac{A}{2}(\text{ch}(\xi x) + \cos(\xi x)) + \frac{B}{2}(\text{sh}(\xi x) + \sin(\xi x)). \quad (21)$$

На середній ділянці ($L_1 \leq x \leq L_2$) згідно з [7] рівняння прогинів запишеться як:

$$w_{\text{сеп}}(x) = \frac{A}{2}(\text{ch}(\xi x) + \cos(\xi x)) + \frac{B}{2}(\text{sh}(\xi x) + \sin(\xi x)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z}(\text{sh}(\xi(x - L_1)) - \sin(\xi(x - L_1))). \quad (22)$$

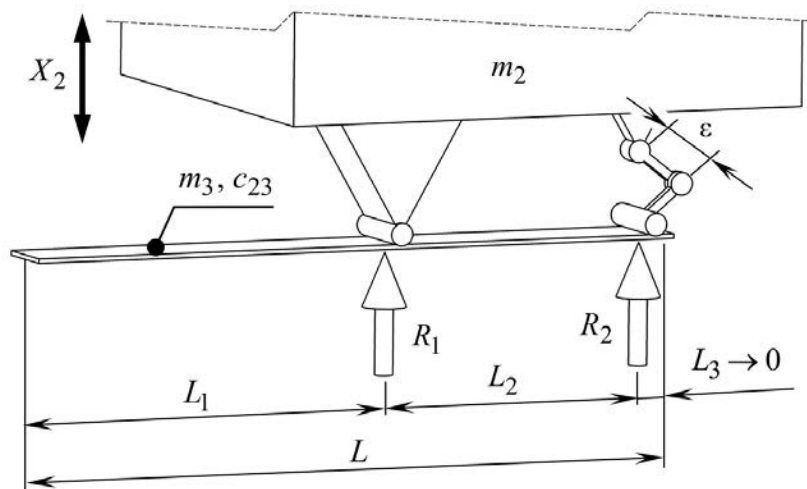


Рис. 1. Розрахункова схема стрижня відносно вільного кінця, де L_1 , L_2 – відстані від початку відліку лівого кінця відповідно до лівої та правої опор; L – довжина стрижня; R_1 , R_2 – реакції в опорах; ε – ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму

Fig. 1. Calculation scheme of the rod relative to the free end, where L_1 , L_2 – the distance from the beginning of the reference of the left end in accordance with the left and right supports; L – the length of the rod; R_1 , R_2 reactions in supports; ε – eccentricity of the crank mechanism

На правій ділянці ($L_2 \leq x \leq L$) матимемо таке рівняння прогинів:

$$w_{\text{пр}}(x) = \frac{A}{2}(\text{ch}(\xi x) + \cos(\xi x)) + \frac{B}{2}(\text{sh}(\xi x) + \sin(\xi x)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z}(\text{sh}(\xi(x - L_1)) - \sin(\xi(x - L_1))) + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z}(\text{sh}(\xi(x - (L_1 + L_2))) - \sin(\xi(x - (L_1 + L_2)))). \quad (23)$$

Рівняння (21), (22) та (23) записано у загальному вигляді. Щоб встановити першу власну частоту стрижня, необхідно знайти частотне рівняння. Для цього потрібно сформулювати систему рівнянь, що задовольнить крайові умови та умови в реакціях опор. З цією метою потрібно розглянути правий кінець стрижня, який є вільним (рис. 1).

Система чотирьох рівнянь вимушених коливань стрижня має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi L) - \cos(\xi L)) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi L) - \sin(\xi L)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \times \\ & \times (\operatorname{sh}(\xi(L-L_1)) + \sin(\xi(L-L_1))) + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} (\operatorname{sh}(\xi(L-(L_1+L_2))) + \sin(\xi(L-(L_1+L_2)))) = 0; \\ & \frac{A}{2}(\operatorname{sh}(\xi L) + \sin(\xi L)) + \frac{B}{2}(\operatorname{ch}(\xi L) - \cos(\xi L)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} (\operatorname{ch}(\xi(L-L_1)) + \cos(\xi(L-L_1))) + \\ & + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} (\operatorname{ch}(\xi(L-(L_1+L_2))) + \cos(\xi(L-(L_1+L_2)))) = 0; \\ & \frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi L_1) + \cos(\xi L_1)) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi L_1) + \sin(\xi L_1)) = \delta_1; \\ & \frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi(L_1+L_2)) + \cos(\xi(L_1+L_2))) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi(L_1+L_2)) + \sin(\xi(L_1+L_2))) + \\ & + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} (\operatorname{sh}(\xi L_2) - \sin(\xi L_2)) = \delta_2. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Знайдемо кінетичну енергію K_{cn} від переміщення, задавшись значеннями для маси погонного метра $m_{nm} = 2,028$ кг/м з (5), довжинами: $L = 0,8301$ м, $L_1 = 0,475$ м й $L_2 = 0,355$ м (оскільки права ділянка L_3 прямує до нуля, то нею будемо нехтувати при розрахунках). Встановлено, що для забезпечення перевантаження $\zeta = 5g$ на частоті вимушених коливань $\omega = 99,484$ рад/с ($n = 950$ об/хв) амплітуда коливань робочого органу (при інерційних параметрах активної $m_1 = 83,7$ кг, проміжної $m_2 = 62,1$ кг мас та жорсткості пружного вузла, що їх об'єднує $c_{12} = 3,794 \cdot 10^5$ Н/м), повинна становити $X_1 = 4,955 \cdot 10^{-3}$ м, а проміжної маси $X_2 = -5,868 \cdot 10^{-3}$ м. Підставляючи до системи (23) значення параметрів, наведених вище, то постійні A та B , реакції опор R_1 та R_2 , що відповідно складуть: $A = 0,083$, $B = -0,066$, $R_1 = -592,066$ Н та $R_2 = 341,729$ Н.

Для лівої ділянки стрижня кінетична енергія K_{cn1} від переміщення (вираз (12)) з використанням (21) становитиме:

$$K_{cn1} = m_{nm} \int_0^{L_1} \left[\frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right]^2 dx_1 = 1,746 \cdot 10^{-3}. \quad (25)$$

Підставивши значення кінетичної енергії K_{cn2} від переміщення (12), до рівняння прогину (22), для середньої ділянки стрижня вона становитиме:

$$\begin{aligned} K_{cn2} = m_{nm} \int_{L_1}^{L_1+L_2} & \left[\frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \\ & \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right]^2 dx_2 = 6,67 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналітичний вираз знаходження кінетичної енергії прокрутання K_{col} (13) з врахуванням прогину на лівій ділянці стрижня (21) становитиме:

$$K_{col} = \int_0^{L_1} \left(\frac{m_{nm}}{3} x_1^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{A}{2}(\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2}(\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = 5,871 \cdot 10^{-4}. \quad (27)$$

Визначимо кінетичну енергію провертання K_{co2} на середній ділянці стрижня з використанням (22), яка становитиме:

$$K_{co2} = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{m_{nm}}{3} (x_2 - L_1)^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\}^2 dx_2 = 1,598 \cdot 10^{-5}. \quad (28)$$

Встановимо потенціальну енергію згину Π_{c3} . Підставивши вираз (21) до (17), отримаємо, що на лівій ділянці стрижня потенціальна енергія згину Π_{c31} набуде вигляду:

$$\Pi_{c31} = EJ_z \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = 9,57. \quad (29)$$

Потенціальна енергія згину Π_{c32} середньої ділянки стрижня з врахуванням (22) дорівнює:

$$\Pi_{c32} = EJ_z \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\}^2 dx_2 = 10,189. \quad (30)$$

Потенціальну енергію зсуву в шарах Π_{cd1} , згідно з виразом (21) для лівій ділянки стрижня визначаємо за рівнянням прогину (18) як:

$$\Pi_{cd1} = k\tau \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = 1,705 \cdot 10^{-3}. \quad (31)$$

Встановимо потенціальну енергію дотичних сил Π_{cd2} , що працюють на зсув для середньої ділянки стрижня згідно з (22):

$$\Pi_{cd2} = k\tau \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\}^2 dx_2 = 1,962 \cdot 10^{-3}. \quad (32)$$

Підставивши отримані вирази (25)–(32) до виразу (20), отримаємо власну частоту ω_{ec} коливань стрижня:

$$\omega_{ec} = \sqrt{\frac{\Pi_{c31} + \Pi_{c32} + \Pi_{cd1} + \Pi_{cd2}}{K_{cn1} - K_{cn2} + K_{co1} - K_{co2}}} = 93,707 \text{ рад/с}. \quad (33)$$

Встановлено, що парціальна частота дискретної моделі, в якій інерційний параметр реактивної маси $m_3 = 0,313 \text{ кг}$ та жорсткість $c_{23} = 2,864 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ становить $\omega_n = 95,672 \text{ рад/с}$. Отримане значення першої власної частоти $\omega_{ec} = 93,707 \text{ рад/с}$ методом Релея–Рітца знаходиться в околі цього значення, що дає змогу стверджувати, що континуальна ділянка у вигляді стрижня адекватно узгоджена з дискретною моделлю (масою m_3 та жорсткістю c_{23}) і, без сумнівів, наділена її властивостями.

Імітаційне моделювання. Побудуємо твердотілу модель континуальної ділянки вібраційної машини (рис. 2, а) у програмному продукті SOLIDWORKS Simulation та зафіксуємо її відповідно до розрахункової схеми (рис. 1) на двох шарнірних опорах (рис. 2, б).

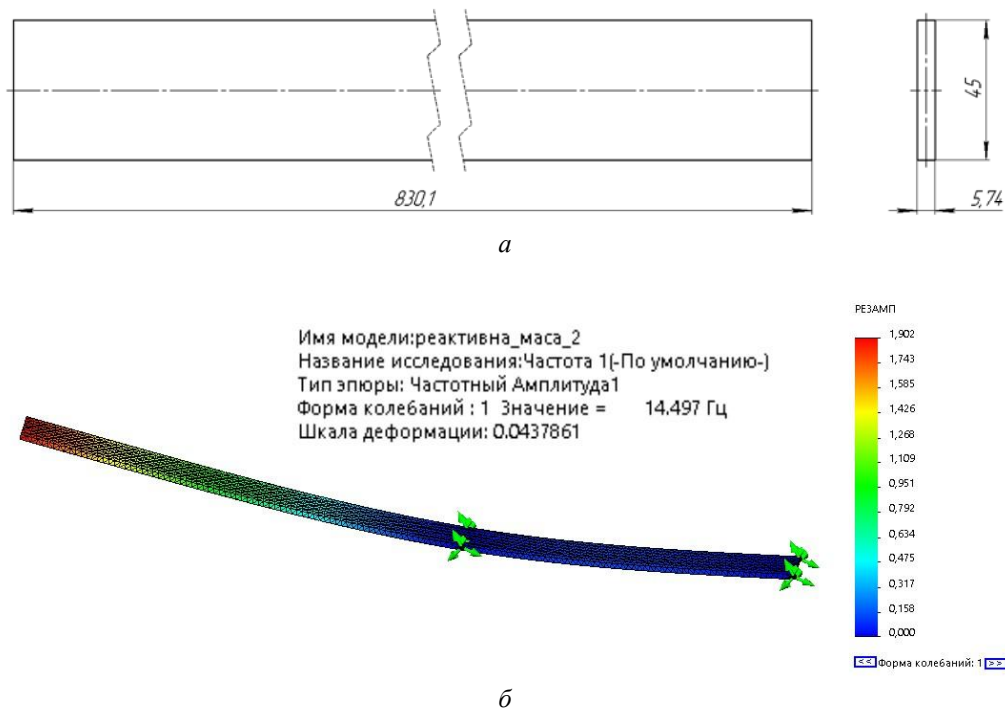


Рис. 2. Континуальна ділянка вібраційної машини з відображеними геометричними розмірами (а) та встановленою першою власною частотою коливання (б)

Fig. 2. Continuous section of the vibrating machine with reflected geometric dimensions (a) and set first natural oscillation frequency (b)

Встановимо колову частоту власних коливань стрижня, оперуючи циклічною частотою, що становитиме:

$$\omega_s = \nu_s 2\pi = 14,497 \cdot 2\pi = 91,04 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (34)$$

Отримано мінімальну похибку в результатах, що дає змогу стверджувати про достовірність отриманих аналітичних залежностей, які були сформовані за методом Рілея–Рітца.

Висновки. Вищенаведена методологія дає змогу для міжрезонансних вібраційних машин синтезувати континуальні ділянки, властивості яких практично повністю узгоджуються з відповідними ділянками дискретних систем. Це відкриває шлях до створення дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин, які апріорі здатні забезпечувати надефективні режими роботи порівняно з існуючими конструкціями. Так, розглянувши дискретну модель вібраційної машини, встановлено парціальну частоту її реактивної маси, яка стала вихідним параметром, який повинна забезпечити континуальна ділянка. Запропонована принципова схема (рис. 1) дискретно-континуальної вібраційної машини, в якій кріплення континуальної ділянки у вигляді пружного стрижня здійснюється за допомогою двох шарнірних опор, що дозволило збурювати одну з опор ексцентриковим приводом. За методом Релея–Рітца аналітично знайдено першу власну частоту континуальної ділянки, що є визначальним параметром для синтезу міжрезонансних дискретно-континуальних вібраційних машин (значення першої власної частоти узгоджене з парціальною частотою дискретної моделі). Проведено імітаційне моделювання континуальної ділянки коливної системи в середо-

вищі SOLIDWORKS Simulation з метою визначення власних частот коливань стрижня. На основі аналізу збіжності результатів аналітичних розрахунків та імітаційного моделювання в програмному продукті SOLIDWORKS підтверджено адекватність запропонованих теоретичних положень.

1. Buchacz A., Calculation of flexibility of vibrating beam as the subsystem of mechatronic system by means the exact and approximate methods, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 9/1 2009, 373-374.
2. Buchacz A., The supply of formal notions to synthesis of the vibrating discrete-continuous mechatronic systems, Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, International OCOSCO World Press 44/2 2011, 168-178.
3. Albert R. Probert, "Linear vibratory conveyor", GB Patent 2,238,841A, February 06.1991.
4. Arthur W. Forman, "Improvements in Vibratory Feeders", GB Patent 1,256,225, July 12.1971.
5. Franklin C. Pereny, "Vibrator", US Patent 4,117,381, September 26, 1978.
6. Gulertan Vural, Albert Linz, "Vibratory Compacting Machine", US Patent 3909148A, Sep. 30, 1975.
7. Бабаков И. М., Теория колебаний / И. М. Бабаков. Л.: Наука, 1968.
8. Jakhin B. Popper, Kyriat Motzkin, "Vibrating surface apparatus", US Patent 4,315,817A Feb. 16, 1982.
9. Пановко Я. Г., Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1976.
10. John C. O'Connor, "Vibration Producing Mechanism" US Patent 2,353,492, November 07.1944.
11. John M. Morris, "Wibratory drive mechanism", US Patent 3,180,158 April 27, 1965.
12. Joseph W. Sherwen (The General Electric Company Limited), "Improvements in or relating to electro-magnetic vibrating equipment", GB Patent 664720A, January 09, 1952.
13. Joseph W. Sherwen (The General Electric Company Limited), "Improvements in or relating to Electro-Magnetic Vibrating Equipment", GB Patent 745518A, February 29, 1956.
14. Mikata Yoshitaka, Higuchi Sunao, "Electromagnetic Vibration Conveyance Feeder for Combination Balance or the Like", JP Patent S63282615A, November 18, 1988.
15. Mikata Yoshitaka, Higuchi Tadashi, Harada Shogo, "Two trough, electromagnetically vibratory feeder", EP Patent 0349693A3, September 26, 1990.
16. Mouldsdale Timothy, John Blackwall, Wright Machinery Limited (GB), Mendelewicz Ran (IL), "Vibratory Conveyor" WO Patent 2006/125998A1, November 30, 2006.
17. Олексій Ланець, Основы розрахунку та конструювання вібраційних машин. Книга 1. Теорія та практика створення вібраційних машин з гармонійним рухом робочого органа: навч. посіб. / О. Ланець. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018.
18. Peter T. Jones, Kennewick, "Conveying Apparatus", US Patent 6,868,960 B2, March 22, 2005.
19. Richard B. Kraus, "Linear Drive for Vibratory Apparatus", CA Patent 2,518,736C, Sep. 01, 2009.
20. Пономарев С. Д. и др., Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. / С. Д. Пономарев и др. М.: Машгиз 1959.
21. Thomas H. Falconer (Eriez Manufacturing Company), "Three Mass Vibratory Feeder" US Patent 4,961,491, October 09, 1990.
22. Wang Yun, "Three-mass asymmetric vibrating mill", CN Patent 104941764A, September 30, 2015.
23. William R. Brown, "Three Mass Electromagnetic Feeder", US Patent 4,378,064, March 29, 1983.
24. William W. Triggs (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), "Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials", GB Patent 494,206A, October 21, 1938.
25. William W. Triggs (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), "Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials", GB Patent 504,782A, April 24, 1939.

O. S. Lanets¹, O. Yu. Kachur¹, V. M. Borovets¹, P. R. Dmyterko¹, I. A. Derevenko¹, A. Ya. Zvarich²¹ Lviv Polytechnic National University,² Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy

ESTABLISHMENT OF THE ORIGINAL FREQUENCY OF THE CONTINUAL SECTION OF THE INTERRESON RESEARCH MACHINE RAYLEIGH-RITZ METHOD

Aim. Is to establish the first natural frequency of the continuum in the form of a rod (body with distributed parameters) of the interresonant vibrating machine. **Method.** The work is based on fundamental methods of mechanics, in particular the theory of mechanical oscillations. The natural frequencies and reactions in the supports of the continuum were found using the method of initial parameters, using the Krylov functions and the Rayleigh-Ritz method. **Results.** The paper considers a discrete model of an interresonant vibrating machine and establishes the partial frequency of its reactive mass, which is the initial parameter that the continuous section must provide. The frequency equation of the continuum section is formed using analytical methods. The value of its first natural frequency was found, which practically coincided with the partial frequency of the discrete model. The continuous section in the form of a rod was modeled in the software product SOLIDWORKS Simulation. **Scientific novelty.** For the first time, the most optimal scheme of fastening the continuous section in the form of an elastic rod mounted on two hinged supports, one of the ends of which is cantilevered, and the other is driven by an eccentric. For the first time using the Rayleigh-Ritz method, the natural frequency of the continuum section was analytically found, which is a determining parameter for the synthesis of interresonant discrete-continuum vibrating machines in which the partial frequency of the discrete model was matched with the value of the first natural frequency of the rod. **Practical significance.** The established analytical expressions will allow to form the effective concept of construction of an engineering technique of calculation of discrete-continuous vibrating technological equipment of various technological purpose, capable to realize effectively interresonant operating modes. Sufficient accuracy of the proposed analytical expressions contributes to their widespread use in practice.

Key words: interresonant vibration machine, discrete-continuum system, Rayleigh-Ritz method, natural frequency of the body.

1. Buchacz A., Calculation of flexibility of vibrating beam as the subsystem of mechatronic system by means the exact and approximate methods, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 9/1 2009, 373-374.
2. Buchacz A., The supply of formal notions to synthesis of the vibrating discrete-continuous mechatronic systems, Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, International OCOSCO World Press 44/2 2011, 168-178.
3. Albert R. Probert, "Linear vibratory conveyor", GB Patent 2,238,841A, February 06.1991.
4. Arthur W. Forman, "Improvements in Vibratory Feeders", GB Patent 1,256,225, July 12.1971.
5. Franklin C. Pereny, "Vibrator", US Patent 4,117,381, September 26, 1978.
6. Gulertan Vural, Albert Linz, "Vibratory Compacting Machine", US Patent 3909148A, Sep. 30, 1975.
7. Babakov I. M., *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations] / I. M. Babakov. – L.: Nauka 1968. [in Russian].
8. Jakhin B. Popper, Kyriat Motzkin, "Vibrating surface apparatus", US Patent 4,315,817A Feb. 16, 1982.
9. Panovko Ya. G., *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and impact] / Ya. G. Panovko. – M.: Mashinostroyeniye, 1976. [in Russian].
10. John C. O'Connor, "Vibration Producing Mechanism" US Patent 2,353,492, November 07.1944.
11. John M. Morris, "Vibratory drive mechanism", US Patent 3,180,158 April 27, 1965.
12. Joseph W. Sherwen (The General Electric Company Limited), "Improvements in or relating to electro-magnetic vibrating equipment", GB Patent 664720A, January 09, 1952.
13. Joseph W. Sherwen (The General Electric Company Limited), "Improvements in or relating to Electro-Magnetic Vibrating Equipment", GB Patent 745518A, February 29, 1956.
14. Mikata Yoshitaka, Higuchi Sunao, "Electromagnetic Vibration Conveyance Feeder for Combination Balance or the Like", JP Patent S63282615A, November 18, 1988.
15. Mikata Yoshitaka, Higuchi Tadashi, Harada Shogo, "Two trough, electromagnetically vibratory feeder", EP Patent 0349693A3, September 26, 1990.
16. Mouldsdale Timothy, John Blackwall, Wright Machinery Limited (GB), Mendelewicz Ran (IL), "Vibratory Conveyor" WO Patent 2006/125998A1, November 30, 2006.

17. Lanets Oleksii. *Osnovy rozrakhunku ta konstruyuvannya vibratsiynykh mashyn. Knyha 1. Teoriya ta prak-tyka stvorenniya vibratsiynykh mashyn z harmoniynym rukhom robochoho orhana: navch. Posibnyk* [Fundamentals of analysis and design of vibrating machines. Book 1. Theory and Practice of Development of Vibratory Machines with Harmonic Motion of the Working Element body: textbook. manual] / O. Lanets'. L'viv: Vydavnytstvo L'vivs'koyi politekhniki, 2018. [in Ukrainian].
18. Peter T. Jones, Kennewick, "Conveying Apparatus", US Patent 6,868,960 B2, March 22, 2005.
19. Richard B. Kraus, "Linear Drive for Vibratory Apparatus", CA Patent 2,518,736C, Sep. 01, 2009.
20. Ponomarev S. D. i dr., *Raschety na prochnost v mashinostroyenii* [Strength calculations in mechanical engineering]: v 3 t. / Ponomarev S. D. i dr. M.: Mashgiz 1959. [in Russian].
21. Thomas H. Falconer (Eriez Manufacturing Company), "Three Mass Vibratory Feeder" US Patent 4,961,491, October 09, 1990.
22. Wang Yun, "Three-mass asymmetric vibrating mill", CN Patent 104941764A, September 30, 2015.
23. William R. Brown, "Three Mass Electromagnetic Feeder", US Patent 4,378,064, March 29, 1983.
24. William W. Triggs (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), "Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials", GB Patent 494,206A, October 21, 1938.
25. William W. Triggs (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), "Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials", GB Patent 504,782A, April 24, 1939.